Commentaires, compléments, oublis, errata...

(CM et Poly)

Chapitre 1

Chapitre 2

I Notion de variété différentiable

Commentaire sur la **définition 2.7** (p. 21). Ce qui est appelé ici *carte en x* est plus couramment appelé *carte centrée en x* (c'est la terminologie qui a été utilisée en CM) et est parfois incohérent avec l'usage qui en est fait dans la suite du poly où, par *carte en x*, il faut seulement comprendre : *carte dont le domaine contient x*.

Oubli du poly : un ouvert d'une variété différentiable M est une variété différentiable, un atlas étant donné par les restrictions à cet ouvert des cartes de l'atlas de M (ce sera rarement précisé, mais ce sera toujours implicitement cette structure différentiable que l'on considèrera sur un tel ouvert).

Autre oubli de taille : $\mathbb{R}^n$ possède une structure naturelle de variété différentiable dont les cartes de l'atlas (maximal) sont simplement les difféomorphismes entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ (au sens du chapitre 1).

II Applications lisses entre variétés

Il y a une lacune dans la **Définition 2.19** (p. 26), qui nous a d'ailleurs empêchés de prouver que lisse $\implies$ continu en cours. Voici la définition correcte :

Définition 2.19 (Application lisse entre variétés). *Soient M, N deux variétés et $f : M \to N$ une application. On dira que f est lisse si pour toutes cartes (U, ϕ) de M et (V, ψ) de N, $U \cap f^{-1}(V)$ est un ouvert de M et l'application*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$$

est lisse (cette application est appelée « f lue dans les cartes (U, ϕ), (V, ψ) »).

(cette précision était sans-doute sous-entendue dans le poly car pour parler de lissité de $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ sur $\phi(U \cap f^{-1}(V))$ (au sens des applications entre e.v.n.), il fallait que $\phi(U \cap f^{-1}(V))$ soit un ouvert d'e.v.n. (inclus dans l'ouvert $\phi(U)$), ce qui équivaut à l'hypothèse rajoutée, ϕ étant un homéomorphisme de l'ouvert U de M vers $\phi(U)$).

* * *

Preuve des propriétés 2.20 (p. 26). Montrons pour commencer que la propriété du point (i) (après « il faut et il suffit que ») entraîne la continuité de f. Supposons cette propriété satisfaite et considérons un ouvert V' de N. Par hypothèse, pour tout $a \in f^{-1}(V')$ (qui peut très bien être vide...), il existe des cartes (U, ϕ) et (V, ψ) en a et $f(a)$ respectivement telles que $W = U \cap f^{-1}(V)$ soit un ouvert de M (contenant a) et $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(W) \to \psi(V)$ soit lisse, donc en particulier

continue. Par composition à droite et à gauche respectivement par les homéomorphismes ϕ et ψ^{-1} (qui sont continus), on obtient que f est continue de W vers V. En particulier, $V'' := V \cap V'$ étant un ouvert (contenant $f(a)$) inclus dans l'ouvert V, $W \cap f^{-1}(V'')$ est un ouvert de l'ouvert W et donc de M, contenant a et inclus dans $f^{-1}(V')$. Ce dernier est donc voisinage de chacun de ses points, autrement dit c'est un ouvert. L'image réciproque par f de tout ouvert de N est un ouvert de M, donc f est bien continue.

Passons à la preuve du point (i). Le caractère *nécessaire* est immédiat (notons qu'il existe une carte en a et une carte en $f(a)$ car les domaines de cartes d'un atlas recouvrent l'espace sous-jacent).

Montrons donc le caractère *suffisant*. Supposons la propriété du point (i) satisfaite. Soient (U', ϕ') et (V', ψ') des cartes de M et N respectivement. On sait déjà par le début de cette preuve que f est continue et donc que $W' = U' \cap f^{-1}(V')$ est un ouvert de M (comme intersection finie de tels ouverts). Reste à montrer que $\psi' \circ f \circ (\phi')^{-1}$ est lisse sur $\phi'(W')$. Si $b \in \phi'(W')$, notons $a = (\phi')^{-1}(b)$, qui appartient à W'. Par hypothèse, il existe une carte (U, ϕ) en a et une carte (V, ψ) en $f(a)$ telles que $W = U \cap f^{-1}(V)$ soit un ouvert de M et que $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(W) \to \psi(V)$ soit lisse. Alors, sur $\phi'(W \cap W')$ (qui est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si n est la dimension de M, comme image par un homéomorphisme d'un ouvert de M),

$$\psi' \circ f \circ (\phi')^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ (\phi')^{-1}),$$

où $\phi \circ (\phi')^{-1}$ est lisse de $\phi'(W \cap W')$ vers $\phi(W \cap W')$ en tant que changement de carte d'un même atlas, $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est lisse sur $\phi(W \cap W')$ (comme restriction à cet ouvert d'une application lisse sur $\phi(W)$) à valeur dans $\psi(f(W \cap W')) \subset \psi(V \cap V')$ (car $f(W) \subset V$ et $f(W') \subset V'$ par définition de W et W') et $\psi' \circ \psi^{-1}$ est lisse sur $\psi(V \cap V')$ comme changement de carte d'un même atlas. L'application $\psi' \circ f \circ (\phi')^{-1}$ est donc lisse du voisinage $\phi'(W \cap W')$ de b vers $\psi(V \cap V')$ comme composée d'applications lisses entre ouverts d'e.v.n. Cette application est donc lisse au voisinage de tout point de $\phi'(W')$, donc lisse sur cet ouvert, ce qui conclut la preuve du point (i).

Le point (ii) découle de ce qui précède : si $f : M \to N$ est lisse, elle satisfait la propriété du point (i), et on a vu que celle-ci impliquait la continuité.

Reste le point (iii). Précisons un peu la preuve du poly. Soit $a \in M$, (U, ϕ) une carte en a, (V, ψ) une carte en $f(a)$ et (W, χ) une carte en $(g \circ f)(a)$ (coquille dans le poly). Par hypothèse, $\chi \circ g \circ \psi^{-1}$ est définie et lisse sur un voisinage ouvert $V' \subset \psi(V \cap g^{-1}(W))$ de $\psi(f(a))$, et $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est définie et lisse sur un voisinage ouvert $U' \subset \phi(U \cap f^{-1}(V))$ de $\phi(a)$ *que l'on peut éventuellement réduire pour que son image par $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ soit incluse dans l'ouvert V'* (ceci utilise la continuité de $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ en $\phi(a)$). Sur le voisinage ouvert U' de $\phi(a)$ (autre coquille),

$$\chi \circ (g \circ f) \circ \phi^{-1} = (\chi \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1})$$

(chaque terme a bien un sens suite aux précautions prises) est donc lisse comme composée de deux applications lisses entre ouverts d'e.v.n., ce qui montre que $g \circ f$ lue dans les cartes $(U', \phi_{|U'})$, (W, χ) (en a et $(g \circ f)(a)$ respectivement) est lisse et on conclut grâce à l'équivalence du point (i). □

Morale : quand on veut tout écrire précisément, c'est assez lourd... Mais il faut le faire une fois pour pouvoir ensuite s'en passer la conscience tranquille.

* * *

Amélioration de l'exercice 6 (p. 27). *Soit $(M, \mathcal{A})$ une variété différentiable (ici, M désigne un espace topologique et $\mathcal{A}$ un atlas maximal sur M le munissant de sa structure différentiable). Une carte (U, ϕ)* quelconque *de M appartient à $\mathcal{A}$ si et seulement si ϕ est un difféomorphisme de $U \subset M$ (muni de la structure différentiable définie par $\mathcal{A}$) vers $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$.*

Preuve. ($\Rightarrow$) Soit (U,ϕ) une carte de $\mathcal{A}$. Par définition d'une carte, ϕ est bijective de U dans $\phi(U)$. Par la propriété 2.20.(i), pour montrer que ϕ est lisse, il suffit de trouver, pour tout $a \in U$, une carte (U',ϕ') de $\mathcal{A}$ en a et une carte (V,ψ) de $\mathbb{R}^n$ (muni de sa structure standard) en $\phi(a)$ telles que $\psi \circ \phi \circ (\phi')^{-1}$ soit lisse de $\phi'(U' \cap \phi^{-1}(V))$ (qui doit être ouvert) dans $\psi(V)$. Les choix $(U',\phi') = (U,\phi)$ et $(V,\psi) = (\phi(U), \mathrm{Id})$ conviennent puisqu'ils donnent $\psi \circ \phi \circ (\phi')^{-1} = \mathrm{Id}$ sur $\phi'(U' \cap \phi^{-1}(V)) = \phi(U)$! On est en train de dire ici que $\phi : U \to \phi(U)$ lu dans la carte (U,ϕ) est... l'identité de $\phi(U)$. L'application $\phi : U \to \phi(U)$ est donc lisse. De la même façon, ϕ^{-1} lue dans les cartes $(\phi(U), \mathrm{Id})$, (U,ϕ) est l'identité de $\phi(U)$, qui est lisse, donc ϕ^{-1} est lisse. Par définition, ϕ est donc bien un difféomorphisme de U dans $\phi(U)$ au sens des difféomorphismes entre variétés.

($\Leftarrow$) Soit maintenant (U,ϕ) une carte de M n'appartenant pas nécessairement à l'atlas $\mathcal{A}$, mais telle que ϕ soit un difféomorphisme de $U \subset M$ (muni de la structure différentiable définie par $\mathcal{A}$) vers $\phi(U)$. Il s'agit de vérifier qu'alors (U,ϕ) est compatible avec toute carte de $\mathcal{A}$ (et donc appartient à $\mathcal{A}$ par maximalité). Soit donc (V,ψ) une carte de $\mathcal{A}$. Sur $\phi(U \cap V)$, $\psi \circ \phi^{-1}$ est la composée de ϕ^{-1}, difféomorphisme de $\phi(U \cap V)$ vers $U \cap V$ par hypothèse sur ϕ (et restriction), et de ψ, difféomorphisme de $U \cap V$ vers $\psi(U \cap V)$ d'après la preuve de l'implication précédente (et restriction à nouveau). Donc $\psi \circ \phi^{-1}$ est un difféomorphisme entre les ouverts $\phi(U \cap V)$ et $\psi(U \cap V)$ de $\mathbb{R}^n$, ce qui signifie précisément que (U,ϕ) et (V,ψ) sont compatibles. □

Remarque. Ici, la situation était subtile mais, dorénavant, en présence d'une variété différentiable M, par « carte de M », on voudra toujours dire « carte de l'atlas définissant la structure différentiable de M considérée ».

* * *

Proposition 2.23 (p. 27). Pas encore traitée en CM mais incorrecte, à corriger.

III Sous-variétés d'une variété

Proposition. *Une immersion injective propre (entre variétés) est un plongement.*

Démonstration. Soit $f : M \to N$ une telle immersion. Il s'agit de montrer que f induit un homéomorphisme sur son image, c'est-à-dire (vu qu'on sait déjà que f est continue et injective), que $f^{-1} : f(M) \to M$ est continue (en tout point de $f(M)$). Soit donc $y \in f(M)$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $f(M)$ convergeant vers y. L'ensemble $Y = \{y_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ est compact (séparé comme sous-espace d'un espace séparé, et tout recouvrement de cet ensemble admet un sous-recouvrement fini du fait de la convergence de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Sa préimage par f, $X = \{x_n = f^{-1}(y_n), n \in \mathbb{N}\} \cup \{x = f^{-1}(y)\}$, est elle aussi compacte puisque f est propre. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc au moins une valeur d'adhérence $\ell \in X$, et en fait une seule car, par continuité de f, $f(\ell)$ doit être une valeur d'adhérence de $(f(x_n))_n = (y_n)_n$, donc $f(\ell) = y$, donc $\ell = f^{-1}(y) = x$. La suite $(x_n)_n = (f^{-1}(y_n))_n$ tend donc vers $f^{-1}(y)$. Par caractérisation séquentielle de la continuité (valable car on travaille dans un espace topologique métrisable), ceci montre que f^{-1} est continue en y, pour tout $y \in f(M)$. □

Remarque. L'argument ci-dessus permet en fait de montrer, beaucoup plus généralement, qu'une application continue injective et propres entre espaces métrisables induit un homéomorphisme sur son image.

IV Exemples et constructions

Preuve de la Proposition 2.32 (p. 30). À faire.

* * *

Application 1 : recollement d'espaces topologiques (p. 31). On s'était demandé pourquoi on prenait $\phi : A \to B$ homéomorphisme et pas juste bijection (ou même quelconque). Voici la version rigoureuse de la réponse orale faite en CM (probablement formellement incorrecte) :

Proposition 2.35,1. *Sous les hypothèses du poly, la restriction de $p : X \sqcup Y \to X \cup_\phi Y$ à X (resp. Y), vu abusivement comme sous-ensemble de $X \sqcup Y$, est un homéomorphisme sur son image.*

Preuve. La restriction de p à X (comprendre : sa copie dans $X \sqcup Y$) est injective car un élément de X n'est identifié qu'à lui-même et, s'il appartient à A, à son image par ϕ, qui appartient à Y (comprendre : sa copie dans $X \sqcup Y$), qui est disjoint de X. Elle induit donc une bijection sur son image $p(X)$. Elle est continue comme restriction à X de p qui est continue par définition de la topologie quotient. Toute la subtilité est dans la preuve de la continuité de la réciproque, et c'est là que l'on va utiliser l'hypothèse sur ϕ.

(Faire des dessins ! !) Soit U est un ouvert de X. Il s'agit de montrer que $p(U)$ est un ouvert de $p(X)$, c'est à dire de la forme $p(X) \cap V$ avec V ouvert de $X \cup_\phi Y$. Par définition de la topologie induite, $U \cap A$ est un ouvert de A, donc, puisque ϕ est un homéomorphisme, $\phi(U \cap A)$ est un ouvert de B, donc de la forme $U' \cap B$ où U' est un ouvert de Y. Posons $V = p(U) \cup p(U')$. Notons que

$$V \cap p(X) = (p(U) \cap p(X)) \cup (p(U') \cap p(X)) = p(U) \cup p(U' \cap B) = p(U) \cup p(U \cap A) = p(U).$$

Reste à vérifier que V est un ouvert de $X \cup_\phi Y$, ce qui équivaut à : $p^{-1}(V)$ est un ouvert de $X \sqcup Y$. Or

$$p^{-1}(V) = p^{-1}(p(U \cup U')) = U \cup \phi(U \cap A) \cup U' \cup \phi^{-1}(U' \cap B) = U \cup (U' \cap B) \cup U' \cup (U \cap A) = U \cup U'$$

qui est bien un ouvert de $X \sqcup Y$ par définition de la topologie de la somme disjointe.

□

Remarque 2.35,2. *Si A et B sont des ouverts de X et Y respectivement, $p(X)$ et $p(Y)$ sont des ouverts de $X \cup_\phi Y$.*

Preuve. Soit $x \in p(X)$, $\tilde{x}$ son unique antécédent dans X et U un voisinage ouvert de $\tilde{x}$. Montrons que $p(U)$ est un voisinage ouvert de x inclus dans $p(X)$. L'inclusion est immédiate. Reste à vérifier que $p^{-1}(p(U))$ est un ouvert de $X \sqcup Y$. Or $p^{-1}(p(U)) = U \cup \phi(U \cap A)$, et $U \cap A$ est un ouvert de A donc $\phi(U \cap A)$ est un ouvert de B, mais B est un ouvert de Y donc $\phi(U \cap A)$ est un ouvert de Y, ce qui conclut. □

* * *

Actions propres. La définition donnée dans le poly n'est correcte que dans le contexte de groupes munis de la topologie *discrète*. En général, si l'on considère une action d'un groupe G muni d'une topologie quelconque sur un espace X, on dit que l'action est propre si l'application $(g, x) \in G \times X \mapsto (x, g\cdot) \in X \times X$ est propre, c'est-à-dire si la préimage de tout compact de $X \times X$ par cette application est un compact de $G \times X$ (les produits sont munis de la topologie produit). Pour une action *par homéomorphismes* d'un groupe *séparé* sur un espace *localement compact*, ceci est équivalent à : pour tous compacts K et K' de X, $\{g \in G; g \cdot K \cap K' \neq \varnothing\}$ est un compact de G. Or un compact d'un espace discret est fini, donc on retombe sur nos pieds dans le cas d'un groupe discret.

* * *

Somme connexe de deux variétés. Preuve des affirmations du CM, reformulées. Pour simplifier la rédaction, considérons M_1, M_2, K_1, K_2 plutôt que M, M', K, K'. Pour $i = 1, 2$, notons

$M_i' = M_i \setminus K_i$, de sorte que $M_1 \# M_2 = M_1' \cup_\rho M_2'$. Rappelons que ρ est défini à partir des données suivantes : pour $i = 1, 2$, on a ψ_i difféomorphisme de $B(0,2)$ vers un ouvert de M_i, $K_i = \psi(\bar{B}(0, \frac{1}{2}))$, $C = B(0,2) \setminus \bar{B}(0, \frac{1}{2})$, ι l'involution $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ de C, on note $C_i = \psi_i(C) \subset M_i'$, et finalement $\rho = \psi_2 \circ \iota \circ \psi_1^{-1}$ définit un difféomorphisme de C_1 dans C_2.

Proposition 2.43,5. *$M_1 \# M_2$, définie comme ci-dessus, possède une unique structure de variété différentiable telle que p induise un difféomorphisme de M_1' vers $p(M_1')$ et de M_2' vers $p(M_2')$.*

(Notons que $p(M_1')$ et $p(M_2')$ sont des ouverts de $M_1 \# M_2$ d'après 2.35,2.).

Preuve. On sait déjà d'après 2.35,1. que p induit un homéomorphisme de M_1' vers l'ouvert $p(M_1')$ et de M_2' vers l'ouvert $p(M_2')$.

Base dénombrable. $M_1 \# M_2$ est réunion des ouverts $p(M_1')$ et $p(M_2')$ qui sont homéomorphes à des ouverts de variété donc à base dénombrable, donc $M_1 \# M_2$ est à base dénombrable.

Caractère séparé. Soient x et y deux points distincts de $M_1 \# M_2$. Il y a deux cas de figure :

- x et y appartiennent à un même $p(M_i')$, qui est séparé car homéomorphe à M_i', donc x et y possèdent des voisinages disjoints dans $p(M_i')$ et donc dans $M_1 \# M_2$ car $p(M_i')$ est un ouvert de $M_1 \# M_2$.
- (quitte à permuter les rôles) x appartient à $p(M_1') \setminus p(M_2')$ et y appartient à $p(M_2') \setminus p(M_1')$. En particulier, aucun des deux n'appartient à l'image par p des ouverts de recollement. Pour $i = 1$ et 2, notons $M_i'' = M_i \setminus \psi(\bar{B}(0,1))$ (c'est M_i' privé d'un voisinage de son bord). Affirmation : $p(M_1'')$ et $p(M_2'')$ sont des ouverts *disjoints* de la somme connexe qui contiennent x et y respectivement (faire un dessin !). (Il est déterminant ici que l'involution ρ qui permet de définir le recollement échange les côtés de la sphère de rayon 1).

Unicité si existence de la structure différentiable. Supposons qu'une telle structure existe. Alors pour toute carte (U, ϕ) de M_i', $(p(U), \phi \circ (p_{|U})^{-1})$ est une carte de $M_1 \# M_2$. En effet, ϕ est un difféomorphisme de U vers un ouvert V de $\mathbb{R}^n$, p induit un difféomorphisme de $U \subset M_1'$ vers $p(U)$ par hypothèse, donc $(p_{|U})^{-1}$ définit un difféomorphisme de $p(U)$ vers U, et donc par composition, $\phi \circ (p_{|U})^{-1}$ est un difféomorphisme de $p(U)$ dans V, et on conclut par l'exercice 6 amélioré (ci-avant). Comme les $p(U)$ ainsi obtenus forment un recouvrement de $M_1 \# M_2$, l'atlas de $M_1 \# M_2$ dont on a supposé l'existence sera forcément l'atlas maximal contenant ces cartes, ce qui prouve l'unicité si existence.

Existence. Reste à prouver que les cartes décrites ci-dessus (i) forment effectivement un atlas (ii) pour lequel p induit un difféomorphisme de M_1' vers $p(M_1')$ et de M_2' vers $p(M_2')$.

Concernant le point (i), si (U, ϕ) est une carte de (l'atlas définissant la structure différentiable de) M_i', $(p(U), \phi \circ (p_{|U})^{-1})$ est une carte de $M_1 \# M_2$ (au sens topologique). En effet (en réécrivant une phrase du paragraphe précédent en remplaçant difféo par homéo), ϕ est un homéomorphisme de U vers un ouvert V de $\mathbb{R}^n$, p induit un homéomorphisme de $U \subset M_1'$ vers $p(U)$ d'après la Proposition 2.35,1, donc $(p_{|U})^{-1}$ définit un homéomorphisme de $p(U)$ vers U, et donc par composition, $\phi \circ (p_{|U})^{-1}$ est un homéomorphisme de $p(U)$ dans l'ouvert V de $\mathbb{R}^n$.

Voyons maintenant la compatibilité. Soient (U, ϕ) une carte de M_i' et (U', ϕ') une carte de M_j' et notons $(V, \psi) = (p(U), \phi \circ (p_{|U})^{-1})$ et $(V', \psi') = (p(U'), \phi' \circ (p_{|U'})^{-1})$ les cartes de $M_1 \# M_2$ qu'elles induisent. Si $i \neq j$, quitte à inverser les rôles, on peut supposer que $i = 1$ et $j = 2$, et on a que $V \cap V' = p(U) \cap p(U')$ est inclus dans $p(M_1') \cap p(M_2') = p(C_1) = p(C_2)$, donc son image par $(p_{|U})^{-1}$) (resp. $(p_{|U'})^{-1}$)) est incluse C_1 (resp. C_2). Dans le changement de carte

$$\psi' \circ \psi^{-1} = \phi' \circ (p_{|U'})^{-1} \circ p_{|U} \circ \phi^{-1},$$

ϕ^{-1} va donc d'un ouvert de $\phi(C_1)$ vers un ouvert de C_1, et $(p_{|U'})^{-1} \circ p_{|U}$ associe à un point de $U \cap C_1$ l'unique point de C_2 qui a la même image par p, donc cette application coïncide avec ρ. La composée ci-dessus est donc lisse, et de même pour son inverse.

Si maintenant $i = j$, U et U' sont tous les deux dans M_i' sur lequel p induit un homéomorphisme sur son image, donc $p(U) \cap p(U') = p(U \cap U')$, $\psi(V \cap V') = \phi(U \cap U')$, $\psi'(V \cap V') = \phi'(U \cap U')$ et $(p_{|U'})^{-1} \circ p_{|U} = \mathrm{Id}$ sur $U \cap U'$ donc le changement de carte $\psi' \circ \psi^{-1}$ coïncide avec $\phi' \circ \phi^{-1}$ et définit donc un difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$, ce qui conclut la preuve de la compatibilité.

Enfin, $M_1 \# M_2$ étant maintenant muni de l'atlas défini ci-dessus, pour le point (ii), il suffit d'observer que, pour toute carte (U, ϕ) de M_i, p lu dans les cartes (U, ϕ), $(p(U), \phi \circ (p_{|U})^{-1})$ n'est autre que l'identité, donc p est un difféomorphisme local. Comme il induit en outre un homéomorphisme de M_i' sur son image, cet homéomorphisme est en fait un difféomorphisme global. □

Chapitre 3

I Espace tangent en un point

II Fibrés vectoriels

Le cas de l'hélicoïde. On pose

$$\mathcal{H} = \{(\theta, t\cos\theta, t\sin\theta), (\theta, t) \in \mathbb{R}^2\} = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} D_\theta$$

où D_θ est la droite $q_\theta + \mathbb{R}\vec{v}_\theta$ avec $q_\theta = (\theta, 0, 0)$ et $\vec{v}_\theta = (0, \cos\theta, \sin\theta)$.

$\mathcal{H}$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$. L'application $\psi : (\theta, t) \mapsto (\theta, t\cos\theta, t\sin\theta)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ est un plongement. En effet,

— elle est lisse,

— sa jacobienne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t\sin\theta & \cos\theta \\ t\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$$

en tout point $(\theta, t) \in \mathbb{R}^2$ est de rang 2 (les vecteurs colonnes ne sont pas colinéaires) donc c'est une immersion,

— elle est injective : si $\psi(\theta, t) = \psi(\theta', t')$, $\theta = \theta'$ et $t(\cos\theta, \sin\theta) = t'(\cos\theta', \sin\theta') = t'(\cos\theta, \sin\theta)$ donc $t = t'$,

— elle est propre : si K est un compact de $\mathbb{R}^3$ (i.e. fermé borné, disons inclus dans $B(0, R)$), $\psi^{-1}(K)$ est fermé par continuité et

$$(\theta, t) \in \psi^{-1}(K) \;\Rightarrow\; \|\psi(\theta, t)\| < R \;\Leftrightarrow\; \theta^2 + t^2 < R^2$$

donc $\psi^{-1}(K)$ est borné.

Comme $\mathcal{H} = \psi(\mathbb{R}^2)$, cela fait de $\mathcal{H}$ une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$, munie donc d'une structure de variété différentiable, et ψ induit un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathcal{H}$, que nous noterons encore ψ.

Structure de fibré vectoriel. Notons p la restriction à $\mathcal{H}$ de la projection $(x, y, z) \mapsto x$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R} =: B$. Elle est lisse comme restriction à une sous-variété d'une application lisse, surjective, et satisfait $p(\psi(\theta, t)) = \theta$. Ainsi, pour tout $\theta \in \mathbb{R} = B$, la fibre $p^{-1}(\{\theta\})$ est la droite affine D_θ, qui est naturellement munie d'une structure d'espace vectoriel de dimension 1 par l'identification $q_\theta + \mathbb{R}\,\vec{v}_\theta \simeq \mathbb{R}$.

Vérifions que $\phi = \psi^{-1} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^2 = B \times \mathbb{R}$ fournit une trivialisation *globale*. Si $p_1 : B \times \mathbb{R} \to B$ désigne la projection sur le premier facteur $(\theta, t) \mapsto \theta$, l'égalité souhaitée $p_1 \circ \phi = p$ correspond

précisément à l'égalité $\theta = p(\psi(\theta, t))$ évoquée précédemment. Enfin, en restriction à la fibre au-dessus de θ, ϕ envoie $q_\theta + \mathbb{R}\,\vec{v}_\theta$ sur $\{\theta\} \times \mathbb{R}$ via l'identité sur $\mathbb{R}$, qui est linéaire.

$\mathcal{H}$ est donc l'espace total d'un fibré vectoriel de rang 1 (ou fibré en droite) au-dessus de $\mathbb{R}$. (attention, ici la fibre et la base sont identiques, c'est très rarement le cas.)

Liste de preuves laissées en exercice (à compléter)

Propositions 2.31, 2.32, 2.35, Théorème 2.43 (i)...