8 Parties et espaces compacts

8.A Définition et propriétés générales

Définition. Une partie A d'un espace métrique (E, d) est dite compacte si de toute suite de A on peut extraire une sous-suite convergente (dans (E, d)) vers un élément de A.

Si $A = E$ tout entier, on dit que l'espace métrique (E, d) est compact.

Remarque. Toute partie fermée d'un espace métrique compact (ou d'une partie compacte d'un espace métrique) est compacte (immédiat, l'écrire).

Proposition. *Toute partie compacte d'un espace métrique est fermée et bornée.*

Attention ! La réciproque est fausse en général (cf. B). Elle est par contre vraie dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass : si A est fermé et borné dans $\mathbb{R}$, toute suite de A est une suite réelle bornée donc admet une sous-suite convergente, et la limite de cette dernière est dans A puisque A est supposé fermé.

En particulier, tout segment de $\mathbb{R}$ est compact. Mais il y a des compacts de $\mathbb{R}$ plus compliqués, comme par exemple l'ensemble triadique de Cantor (cf. Wikipedia).

Démonstration. (cf. notes manuscrites) □

En particulier un *espace métrique compact* est borné (il est toujours fermé dans lui-même). Mais on a en fait mieux :

Définition. Un espace métrique (E, d) est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$, E est recouvert par une réunion finie de boules de rayon ε.

Proposition. *Un espace métrique compact est complet et précompact.*

(On rappelle qu'un espace métrique est dit complet si dans cet espace, toute suite de Cauchy est convergente). On verra dans le prochain chapitre qu'il s'agit en fait d'une équivalence.

Démonstration. Exercice : prouver la précompacité en s'inspirant de la preuve de la proposition précédente. Pour la complétude : soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de (E, d). Par compacité, elle admet une sous-suite convergente, donc une valeur d'adhérence. Or dans tout espace métrique, une suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence est convergente (Exercice). Donc (E, d) est complet. □

On énonce maintenant deux généralisations de résultats vus dans $\mathbb{R}$ impliquant continuité et compacité, ainsi qu'un corollaire :

Théorème. *Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une application continue. Si A est une partie compacte de (E, d_E), $f(A)$ est une partie compacte de (F, d_F).*

On abrège souvent cet énoncé par “l'image continue d'un compact est un compact”. On verra en topologie générale qu'il faut être un peu plus précis lorsqu'on ne se restreint plus aux espaces métriques.

Notons qu'un compact non vide K de $\mathbb{R}$ est borné, donc admet un inf et un sup, qui sont limites d'éléments de K, donc appartiennent à K puisque K est aussi fermé. Ce sont donc en fait un min et un max. Ainsi, si dans l'énoncé ci-dessus on considère le cas où $(F, \|\cdot\|_F) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, on obtient que f est bornée sur A et *atteint ses bornes* (expression qui n'a de sens que dans $\mathbb{R}$).

Démonstration. (cf. notes manuscrites) □

Corollaire. *Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une bijection continue. Si (E, d_E) est compact, f est un homéomorphisme.*

Démonstration. (cf. notes manuscrites) □

Théorème (Heine)**.** *Soit $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ une application continue. Si A est une partie compacte de (E, d_E), alors $f_{|A}$ est uniformément continue.*

Démonstration. Exercice : adapter la preuve sur $\mathbb{R}$ du chap. 1. □

8.B Compacité dans les EVN

Étant donné un espace vectoriel E de dimension finie $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_k)$ une base de E, on définit $\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}}$ sur E par

$$\forall (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k, \quad \left\| \sum_{i=1}^{k} x_i e_i \right\|_{\infty,\mathcal{B}} = \max_{1 \le i \le k} |x_i|.$$

Exercice : Vérifier que ceci définit une norme sur E (comme composée de $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^k$ et d'une application linéaire bijective).

Proposition. *Dans $(E, \|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}})$, toute suite bornée admet une sous-suite convergente. Par conséquent, tout fermé borné est compact.*

Démonstration. Soit $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $(E, \|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}})$, et $M \ge 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x^{(n)}\|_{\infty,\mathcal{B}} \le M$, i.e., si $x^{(n)} = \sum_{i=1}^k x_i^{(n)} e_i$, $\max_{1\le i\le k} |x_i^{(n)}| \le M$. Alors en particulier, $(x_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée, donc admet une sous-suite $(x_1^{(\psi_1(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite l_1. $(x_2^{(\psi_1(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ est elle aussi bornée donc admet elle aussi une sous-suite convergente $(x_2^{((\psi_1\circ\psi_2)(n))})_{n\in\mathbb{N}}$, de limite l_2. Notons que $(x_1^{((\psi_1\circ\psi_2)(n))})_{n\in\mathbb{N}}$, sous-suite de $(x_1^{(\psi_1(n))})_{n\in\mathbb{N}}$, converge encore vers l_1. Par récurrence, on construit une extraction $\psi = \psi_1 \circ \cdots \circ \psi_k$ telle que, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $(x_i^{(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l_i, i.e., par définition de $\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}}$, telle que $(x^{(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{i=1}^k l_i e_i$, ce qui montre le premier point. Le second est une conséquence immédiate, comme dans $\mathbb{R}$ (l'écrire !). □

Théorème. *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soit E un ev de dimension finie k, et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_k)$ une base de E. Il suffit de démontrer que toute norme $\|\cdot\|$ sur E est équivalente à $\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}}$. Tout d'abord, pour tout $x \in E$, si $x = \sum_{i=1}^k x_i e_i$,

$$\begin{aligned} \|x\| &\le \sum_{i=1}^{k} |x_i|\, \|e_i\| \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\le C\|x\|_{\infty,\mathcal{B}} \end{aligned}$$

en posant $C = \sum_{i=1}^k \|e_i\|$.

Montrons maintenant qu'il existe $C' > 0$ tel que $C'\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}} \le \|\cdot\|$. Par homogénéité, il suffit qu'une telle inégalité soit satisfaite sur la sphère unité $\mathcal{S}$ de $(E, \|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}})$ (elle le sera alors automatiquement sur E tout entier), i.e. de montrer qu'il existe $C' > 0$ tel que $C' \le \|\cdot\|$ sur $\mathcal{S}$, ou encore de montrer que $\|\cdot\|$ est minorée sur $\mathcal{S}$ par un réel $C' > 0$. Or :

— $\mathcal{S}$ est un fermé borné donc un compact de $(E, \|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}})$ d'après la proposition précédente ;

— $\|.\|$ est C-lipschitzienne donc continue de $(E, \|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}})$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ (en effet, par inégalité triangulaire "inverse", pour tous $x, y \in E$, $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\| \le C\|x - y\|_{\infty,\mathcal{B}}$ d'après ce qui précède) ;

donc $\|\cdot\|$ est bornée sur $\mathcal{S}$ et *atteint ses bornes*. Et comme elle est strictement positive, son minimum est strictement positif, ce qu'on voulait. □

Corollaire. *Dans un EVN* de dimension finie*, quelle que soit le norme, un sous-ensemble est compact si et seulement si il est fermé et borné.*

Démonstration. On sait que c'est vrai pour la norme $\|\cdot\|_{\infty,\mathcal{B}}$ pour n'importe quelle base $\mathcal{B}$; or toute autre norme $\|\cdot\|$ lui est équivalente, donc définit les mêmes bornés, les mêmes fermés et les mêmes compacts (puisque les mêmes suites convergentes). □

En fait, cette équivalence *caractérise* les evn de dimension finie (cf. 4. et 5. ci-dessous) :

Théorème (Riesz)**.** *Pour un EVN* $(E, \|\cdot\|)$ *quelconque, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *la sphère unité est compacte ;*
2. *la boule unité fermée est compacte ;*
3. *toute boule fermée est compacte ;*
4. *tout fermé borné est compact ;*
5. *E est de dimension finie.*

Ce qu'on appelle communément théorème de Riesz est en fait l'implication $(ii) \Rightarrow (v)$ (que nous prouvons en fait ci-dessous pour prouver $(iv) \Rightarrow (v)$ en "transitant" par (ii)).

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ Supposons (i). Soit $(x_n)_n$ une suite à valeurs dans la boule unité fermée. Si elle a une infinité de termes nuls, alors elle a trivialement une sous-suite convergente (car constante). Sinon, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \neq 0$, de sorte que $\|x_n\| \neq 0$ et donc $y_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}$ est bien défini et de norme 1. Par compacité de la sphère unité $\mathcal{S}$, (y_n) admet une sous-suite convergente $(y_{\phi(n)})_n$ de limite $y \in \mathcal{S}$. La suite réelle $(\|x_{\phi(n)}\|)_n$, à valeurs dans le compact $[0,1]$, admet elle aussi une sous-suite convergente, $(\|x_{(\phi\circ\psi)(n)}\|)_n$, de limite $\lambda \in [0,1]$. Par continuité du produit extérieur dans un EVN, la sous-suite $(x_{(\phi\circ\psi)(n)})_n = (\|x_{(\phi\circ\psi)(n)}\| y_{(\phi\circ\psi)(n)})_n$ de $(x_n)_n$ converge vers λy, élément de la boule unité fermée, ce qui conclut.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Toute boule fermée de $(E, \|\cdot\|)$ est l'image de la boule unité fermée par la composée d'une homothétie et d'une translation, qui sont toutes deux continues (Exercice), et "l'image continue d'un compact est compact".

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Soit A une partie fermée bornée de $(E, \|\cdot\|)$ et B une boule fermée de E contenant A. A est une partie fermée de la partie compacte B de $(E, \|\cdot\|)$, donc A est compacte.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Supposons (iv). En particulier la boule unité B est compacte donc précompacte : il existe $x_1, \ldots x_k \in B$ tels que $B \subset \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \frac{1}{2})$. Montrons que $E = \mathrm{Vect}\{x_i\}$.

Soit $x \in B$. Il existe $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$ et $y_0 \in B$ tels que $x = x_{i_0} + \frac{1}{2} y_0$. Par récurrence, on construit deux suites $(i_n)_n \in \{1, \ldots, k\}^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_n \in B^{\mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x = x_{i_0} + \tfrac{1}{2} x_{i_1} + \cdots + \tfrac{1}{2^n} x_{i_n} + \frac{1}{2^{n+1}} y_n,$$

de sorte que

$$\|x - (x_{i_0} + \tfrac{1}{2} x_{i_1} + \cdots + \tfrac{1}{2^n} x_{i_n})\| \leq \frac{1}{2^{n+1}},$$

et donc la suite $(u_n)_n = (x_{i_0} + \frac{1}{2} x_{i_1} + \cdots + \frac{1}{2^n} x_{i_n})_n$ converge vers x. Mais pour tout n, u_n peut être réécrit, en regroupant les i_l égaux, comme $\sum_{j=1}^k u_n^{(j)} x_j$. On observe que pour tout j, pour tout n, $|u_n^{(j)} - u_{n-1}^{(j)}| \leq \frac{1}{2^n}$, donc (cf. convergence de séries numériques, L2, Exercice) $(u_n^{(j)})_n$ converge vers un réel $u^{(j)}$, et par inégalité triangulaire $(u_n)_n$ converge vers $\sum_{j=1}^k u^{(j)} x_j$. Par unicité de la limite, ceci montre bien que x appartient à $\mathrm{Vect}\{x_i\}$.

$(v) \Rightarrow (i)$ C'est la proposition précédente. □

Remarque. Dans $(iv) \Rightarrow (v)$, on aurait pu simplifier la preuve en utilisant qu'un sous-ev de dimension finie d'un evn est toujours fermé (Exercice, en utilisant la compacité des fermés bornés en dimension finie).