Compléments de topologie générale

1 Topologie initiale

Proposition - Définition (Topologie initiale)**.** Soit E un ensemble, $\mathcal{A}$ une famille d'applications de E vers des espaces topologiques et $\tau \subset \mathcal{P}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. τ est la topologie engendrée par
$$\{f^{-1}(U) \mid f \in \mathcal{A}, U \text{ ouvert de l'espace d'arrivée de } f\};$$
2. τ est la topologie la moins fine qui rende toutes les applications de $\mathcal{A}$ soient continues ;
3. pour tout espace topologique (X, τ_X) et toute application $\psi : X \to E$, ψ est continue de (X, τ_X) dans (E, τ) si et seulement si, pour tout $f : E \to (F, \tau_F)$ appartenant à $\mathcal{A}$, $f \circ \psi$ est continue de (X, τ_X) dans (F, τ_F).

La topologie ainsi (triplement) définie est appelée *topologie initiale associée à* $\mathcal{A}$.

Exemples.

1. Si (F, τ_F) est un espace topologique et E est un sous-ensemble de F, la topologie induite par τ sur E est la topologie initiale associée à une unique application : l'inclusion de E dans (F, τ_F) (vérification immédiate).
2. Si $E = E_1 \times \cdots \times E_n$, la topologie produit associée aux topologies $\tau_1,\ldots,\tau_n$ sur $E_1,\ldots,E_n$ engendrée par les rectangles ouverts $U_1 \times \cdots \times U_n$ est aussi engendrée par les rectangles tels que $U_i = E_i$ sauf pour au plus un facteur. Ceci montre qu'elle coïncide avec la topologie initiale associée à la famille des projections $\pi_i : E \to (E_i, \tau_i)$ (au sens du 1. ci-dessus). À partir de là, les caractérisations de la topologie produit vues en cours sont des corollaires de la proposition ci-dessus.

   De la même façon, dans le cas d'un produit infini, la topologie sur $E = \Pi_{i \in I} E_i$ engendrée par les *cylindres* ouverts coïncide avec la topologie initiale associée aux projections $\pi_i E \to (E_i, \tau_i)$, et c'est comme cela que l'on définit la topologie produit.

Exercice. (Preuve de la proposition)

1. Montrer que l'ensemble des topologies qui rendent les applications de $\mathcal{A}$ continues est non vide et stable par intersection. En déduire qu'il admet un unique élément minimal (ainsi, indépendamment de la proposition, 2. définit bien une unique topologie).
2. Montrer que la topologie $\tau(\mathcal{A})$ définie par le 1. rend les éléments de $\mathcal{A}$ continus, et que toute autre topologie ayant cette propriété contient $\tau(\mathcal{A})$. En déduire que 1. et 2. définissent la même topologie.
3. (a) Montrer que si τ satisfait l'assertion 3, elle rend les applications de $\mathcal{A}$ continues.
   (b) Montrer, en utilisant la question précédente, que si τ_1 et τ_2 sont deux topologies sur E telles que l'assertion 3. soit satisfaite pour $\tau = \tau_1$ et $\tau = \tau_2$, alors l'identité est continue de (E, τ_1) dans (E, τ_2) et inversement. Qu'est-ce que cela signifie sur τ_2 et τ_1 ?
   (c) Montrer que pour $\tau = \tau(\mathcal{A})$, l'assertion 3. est vérifiée. Conclure.

2 Topologie image

Ci-dessus, on avait des applications de E vers divers F avec des topologies sur F et on construisait une topologie sur E (*initiale* car E est l'ensemble de départ). Maintenant c'est le contraire : on a toujours une application de E dans F mais c'est sur E qu'on a une topologie et sur F qu'on veut en construire une (d'où le nom *topologie image*).

Proposition - Définition (Topologie image)**.** Soit (E, τ_E) un espace topologique, F un ensemble, $f : E \to F$ et $\tau \subset \mathcal{P}(F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\tau = \{U \subset F \mid f^{-1}(U) \in \tau_E\}$;
2. τ est la topologie la plus fine qui rende f continue ;
3. pour tout espace topologique (X, τ_X) et toute application $\psi : F \to X$, ψ est continue de (F, τ) dans (X, τ_X) si et seulement si $\psi \circ f$ est continue de (E, τ_E) dans (X, τ_X).

La topologie ainsi (triplement) définie est appelée *topologie image de τ_E par f.*

Exemple. Si $F = E/\mathcal{R}$ avec $\mathcal{R}$ relation d'équivalence sur E, la topologie quotient sur F est définie comme la topologie image de τ_E par la projection canonique $\pi_{\mathcal{R}} : E \to E/\mathcal{R}$.

Exercice. (Preuve de la proposition)

1. Montrer que le 1. définit bien une topologie. Notons la τ_f.
2. Montrer "la topologie la plus fine qui rende f continue" définit bien une topologie sur F (on pourra s'inspirer du 1. de l'exercice précédent).
3. Montrer que τ_f satisfait l'assertion 3. S'inspirer du 3. de l'exercice précédent pour conclure.