UPMC - L1 **2010-2011**
LM125

Contrôle continu numéro 1
Corrigé

Exercice 1. (4 points)

- Définition 9 du cours polycopié.
- Proposition 10 du cours polycopié.

Exercice 2. (9 points) La matrice associée au système S_a est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & a-4 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1-a & -2 \\ 3 & -1 & 1-a & -6 \end{pmatrix}.$$

La matrice augmentée associée au système S_a est

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & (a-4) & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & (1-a) & -2 & -1 \\ 3 & -1 & (1-a) & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

On applique à B l'algorithme du pivot de Gauss.

$$B \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-a & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & a-4 & 5 \\ 3 & -1 & 1-a & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

(Mettre le coefficient 1 en position de pivot simplifie considérablement les calculs !)

$$\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4-3L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-a & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2a-1 & a & 7 \\ 0 & 2 & 2a-2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-a & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2a-2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2a-1 & a & 7 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3-L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-a & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2a-2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & a & 3 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{L_4 \leftarrow L_4-(1-a)L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-a & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 2a-2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & a & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a(a-1) & 3a \end{pmatrix}$$

Nous avons mis B sous forme échelonnée. La suite de l'algorithme consiste à mettre la nouvelle matrice sous forme *réduite*. Pour cela, on peut commencer par remplacer L_2 par $L_2/2$ pour obtenir un 1 en (deuxième) position de pivot :

$$\overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-a & -2 & -1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a(a-1) & 3a \end{pmatrix} = B'$$

A ce stade, on ne peut aller plus loin dans la réduction sans distinguer les cas $a(a-1) = 0$ (auquel cas il y a seulement 3 pivots pour 4 inconnues, donc soit aucune soit une infinité de solutions) et $a(a-1) \neq 0$ (auquel cas il y a 4 pivots pour 4 inconnues et donc une unique solution). Il y a donc en fait 3 cas à étudier :

Cas 1 : $a = 0$. B' est alors égale à :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On laisse la dernière ligne telle quelle, et on met la matrice sous forme réduite en annulant les termes au dessus des pivots :

$$C \overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système initial S_0 (ici $a = 0$) est donc équivalent à :

$$\begin{cases} x - 2t = 1 \\ y \quad\;\; = 5 \\ z \quad\;\; = 3 \\ (0t \quad = 0) \end{cases}$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions du système S_0 est donc

$$\mathcal{S} = \{(2t + 1, 5, 3, t),\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Cas 2 : $a = 1$. B' est alors égale à :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice contient une ligne de la forme $(0 \ldots 0\ \alpha)$, avec $\alpha \neq 0$. Le système associé (celui dont D est la matrice *augmentée*), et donc le système initial (qui lui est équivalent) sont des systèmes d'équations incompatibles. Autrement dit, S_1 (ici $a = 1$) n'a pas de solution :

$$\mathcal{S} = \varnothing.$$

Cas 3 : $a \neq 0$ et $a \neq 1$. On peut alors diviser la dernière ligne de B' par $a(a - 1)$, puisque cette quantité est non nulle :

$$B' \overset{L_4 \leftarrow \frac{1}{a(a-1)} L_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-a & -2 & -1 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{a-1} \end{pmatrix} \overset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - aL_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-a & 0 & \frac{7-a}{a-1} \\ 0 & 1 & a-1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{a-1} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - (a-1)L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + (a-1)L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{10-4a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{a-1} \end{pmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{8-2a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{a-1} \end{pmatrix}.$$

Le système initial est donc équivalent à

$$\begin{cases} x = \frac{8-2a}{a-1} \\ y = 2 \\ z = 5 \\ t = \frac{3}{a-1} \end{cases}.$$

Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions du système S_a est le singleton

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{8-2a}{a-1}, 2, 5, \frac{3}{a-1} \right) \right\}.$$

La matrice A est inversible si et seulement si la matrice échelonnée réduite obtenue en lui appliquant l'algorithme de Gauss est la matrice identité I_4. C'est le cas si et seulement si la matrice échelonnée réduite obtenue à partir de B a quatre pivots, c'est-à-dire si et seulement si $a(a - 1) \neq 0$ d'après ce qui précède. Pour obtenir l'inverse de A, on applique simultanément à A et à I_4 les opérations sur les lignes appliquées à B dans la première partie de l'exercice (dans le même ordre bien sûr). Il suffit de les recopier :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & a-4 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1-a & -2 \\ 3 & -1 & 1-a & -6 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-a & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & a-4 \\ 3 & -1 & 1-a & -6 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-a & -2 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 2 & 2a-1 & a \\ 0 & 2 & 2a-2 & 0 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-a & -2 \\ 0 & 2 & 2a-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2a-1 & a \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \overset{L_2 \leftrightarrow L_4}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-a & -2 \\ 0 & 2 & 2a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_4 \leftarrow L_4 - (1-a)L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-a & -2 \\ 0 & 2 & 2a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & a(a-1) \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \overset{L_4 \leftarrow L_4 - (1-a)L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ a-1 & 1 & a & 1-a \end{pmatrix} .$$

$$\overset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{a-1} L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-a & -2 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \overset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{a-1} L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a(a-1)} & \frac{1}{a-1} & \frac{-1}{a} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - aL_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \overset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - aL_4 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{a} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a(a-1)} & \frac{1}{a-1} & \frac{-1}{a} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - (a-1)L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + (a-1)L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - (a-1)L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + (a-1)L_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{-2}{a} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a(a-1)} & \frac{1}{a-1} & \frac{-1}{a} \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{-2}{a} + \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a(a-1)} & \frac{1}{a-1} & \frac{-1}{a} \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{-2}{a} + \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{1-a} & \frac{1}{1-a} & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{a(a-1)} & \frac{1}{a-1} & \frac{-1}{a} \end{pmatrix} .$$

Exercice 3. (4 points) Soit $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{R})$. Le terme général $c_{i,j}$ $(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n)$ de la matrice $A\,({}^tA)$ est donné par la formule :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k} \left({}^tA\right)_{k,j} \quad \text{(par définition du produit matriciel),}$$

où $(A)_{i,k}$ (resp. $\left({}^tA\right)_{k,j}$) désigne le coefficient de la i-ème ligne et de la k-ème colonne de A (resp. de la k-ème ligne et de la j-ème colonne de ${}^tA$). Autrement dit, avec les notations de l'énoncé,

$$(A)_{i,k} = a_{i,k}, \quad \left({}^tA\right)_{k,j} = a_{j,k} \quad \text{et donc} \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{j,k}.$$

En particulier, quand $j = i$, $c_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} (a_{i,k})^2$, donc

$$tr\left(A({}^tA)\right) \overset{\text{déf.}}{=} \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_{i,k})^2\right) \quad \text{(en remplaçant simplement } c_{i,i} \text{ par sa valeur).}$$

$tr\left(A({}^tA)\right)$ est donc la somme de tous les $(a_{i,k})^2$ pour i et k compris entre 1 et n. Comme ce sont tous des nombres positifs, si l'un d'eux est non nul, leur somme est strictement positive. Donc si on suppose $tr\left(A({}^tA)\right) = 0$, nécessairement, tous les coefficients $a_{i,k}$ de A sont nuls. Autrement dit, la matrice A est nulle.

Exercice 4. (6 points)

1. $A + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$(A + I_3)^3 = (A + I_3)^2 \times (A + I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$.

2. Posons $B = A + I_3$. $A = A + I_3 - I_3 = B - I_3 = B + (-I_3)$. La matrice I_3 (et tous ses multiples réels) commute avec toute matrice de $M_3(\mathbb{R})$, donc en particulier avec B. On peut donc appliquer la formule du binôme : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (B + (-I_3))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k \times (-I_3)^{n-k} \tag{1}$$

(rappelons que pour toute matrice carrée $C \in M_n(\mathbb{K})$, C^0 est la matrice identité).

Pour n compris entre 0 et 2, on n'a pas vraiment besoin de la formule (1) :

- $A^0 = I_3$,
- $A^1 = A$,
- $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit maintenant $n \ge 3$. Pour tout $k \in \{0, ..., n\}$, $(-I_3)^{n-k} = (-1)^{n-k} I_3$ donc

$$B^k \times (-I_3)^{n-k} = B^k \times (-1)^{n-k} I_3 = (-1)^{n-k} B^k \times I_3 = (-1)^{n-k} B^k.$$

De plus, $B^3 = 0$ d'après la question 1, donc pour tout $k \ge 3$, $B^k = B^3 \times B^{\overbrace{k-3}^{\ge 0}} = 0_3 \times B^{k-3} = 0_3$.

Ainsi, seuls les trois premiers termes de la formule (1) sont éventuellement non nuls :

$$
\begin{aligned}
A^n &= \sum_{k=0}^{3} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} B^k \\
&= \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} (-1)^{n-0} B^0 + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} (-1)^{n-1} B^1 + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{n-2} B^2 \\
&= (-1)^n \left(I_3 - nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \right) \\
&= (-1)^n \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & -n \\ n & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ (-1)^n \left(n + \frac{n(n-1)}{2} \right) & (-1)^n & (-1)^{n+1} n \\ (-1)^n n & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ (-1)^n \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) & (-1)^n & (-1)^{n+1} n \\ (-1)^n n & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3. Toujours d'après la formule du binôme, appliquée aux matrices A et I_3 qui commutent,

$$(A + I_3)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I_3.$$

Or $(A + I_3)^3 = 0$ d'après la question 1, donc $A^3 + 3A^2 + 3A + I_3 = 0$, ce qui équivaut à

$$-(A^3 + 3A^2 + 3A) = I_3.$$

Or

$$-(A^3 + 3A^2 + 3A) = A \times (-A^2 - 3A - 3I_3) = (-A^2 - 3A - 3I_3) \times A.$$

Il existe ainsi une matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$ $(B = -A^2 - 3A - 3I_3)$ telle que $AB = BA = I_3$, ce qui signifie précisément que A est inversible et, l'inverse d'une matrice étant unique, la matrice inverse de A n'est autre que la matrice B :

$$A^{-1} = -A^2 - 3A - 3I_3 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. (4 points)

1. $(1, 0)$ et $(0, 1)$ appartiennent à F (puisque $1 \times 0 = 0 \times 1 = 0$), mais leur somme $(1, 1)$ n'appartient pas à F (puisque $1 \times 1 = 1 \neq 0$). Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de E (car il n'est pas stable par addition).

2. F est non vide car il contient la matrice nulle.

Soient maintenant $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$ deux matrices réelles carrées d'ordre n triangulaire supérieures, et λ un réel quelconque.

$$A + \lambda B = \begin{pmatrix} a_{1,1} + \lambda b_{1,1} & a_{1,2} + \lambda b_{1,2} & \cdots & a_{1,n} + \lambda_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} + \lambda b_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} + \lambda b_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} + \lambda b_{n,n} \end{pmatrix},$$

qui est aussi carrée d'ordre n triangulaire supérieure, donc appartient à F. F est donc un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

3. F est non vide car il contient le vecteur $(0,0,0)$ de $\mathbb{R}^3$.

Soient maintenant $u=(x,y,z)$ et $v=(x',y',z')$ deux éléments de F (vérifiant donc $z=z'=0$ et $x+y=x'+y'=0$), et λ un réel. Alors $u+\lambda v=(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z')$ satisfait :

- $(x+\lambda x')+(y+\lambda y')=(x+y)+\lambda(x'+y')=0+\lambda.0=0$,
- $z+\lambda z'=0+\lambda.0=0$,

donc $u+\lambda v\in F$. F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.