UPMC - L1 **2010-2011**
LM125

Contrôle continu numéro 1
(1 heure)

Les réponses aux exercices doivent être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Le barême donné pour chaque exercice est indicatif, le correcteur se garde la possibilité de le modifier.

Exercice 1. Questions de cours. (4 points)
Ces questions portent sur des définitions, le correcteur attend de l'étudiant une rigueur irréprochable. Par exemple, toutes les notations doivent être introduites.

- Donner la définition du produit matriciel (pour des matrices non nécessairement carrées).
- Prouver l'unicité de la matrice inverse d'une matrice carrée inversible.

Exercice 2. (6 points)
Soient a un paramètre réel et S_a le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + z + (a-4)t & = 5 \\ -x + y + 2t & = 4 \\ x - y + (1-a)z - 2t & = -1 \\ 3x - y + (1-a)z - 6t & = 1. \end{cases}$$

Ecrire la matrice A et la matrice augmentée B associées au système S_a. Appliquer l'algorithme de Gauss, puis résoudre S_a en discutant selon les valeurs de a. Dans quels cas A est-elle inversible ? Calculer A^{-1} le cas échéant.

Exercice 3. (3 points)
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. On définit la trace de A, notée $tr(A)$, par la formule $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
On définit également la matrice transposée que l'on notera ${}^tA \in M_n(\mathbb{R})$, par la formule $\left({}^tA\right)_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

Montrer que si $tr\left(A({}^tA)\right) = 0$ alors $A = 0$.

Exercice 4. (4 points)
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $(A + I_3)^3 = 0$.
2. Déterminer A^n pour tout entier n positif.
3. Montrer, à l'aide de ce qui précède, que A est inversible, et donner sa matrice inverse.

Exercice 5. (3 points)
Dans chacun des cas suivants, déterminer si F est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

- $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = 0\}$.
- $E = M_n(\mathbb{R})$, $F =$ l'ensemble des matrices d'ordre n triangulaires supérieures.
- $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 0 \text{ et } x + y = 0\}$.