Contrôle continu numéro 2
Corrigé

Exercice 1. cf. poly Théorème 31 page 97.

Exercice 2.

1. (a) **Non**. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ une application $\mathbb{R}$-linéaire (quelconque). D'après le cours, $\dim(\mathrm{Im} f) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Donc $\mathrm{Im} f$ ne peut être égal à $\mathbb{R}^4$, qui est de dimension 4.

   (*Idée intuitive* : $\mathbb{R}^3$ est plus petit que $\mathbb{R}^4$, donc l'image de $\mathbb{R}^3$ par une application *linéaire* ne peut pas être aussi grosse que $\mathbb{R}^4$.)

   (b) **Non**. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application $\mathbb{R}$-linéaire (quelconque). D'après le théorème du rang, $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker f) + \mathrm{rg} f$, donc $\dim(\ker f) = 3 - \mathrm{rg} f$. Or $\mathrm{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, donc $\mathrm{rg} f = \dim(\mathrm{Im} f) \leq \dim(\mathbb{R}^2) = 2$. Ainsi, $\dim(\ker f) \geq 1$, donc $\ker f \neq \{0\}$, donc f n'est pas injective.

   (*Idée intuitive* : $\mathbb{R}^3$ est plus gros que $\mathbb{R}^2$, donc il y a forcément plusieurs vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui ont la même image par f dans $\mathbb{R}^2$.)

2. (a) **Oui**. Exemple : n'importe quel singleton $\{v\}$, avec $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq 0$.

   (b) **Oui**. Exemple : la famille $\{e_1, e_2, e_3, e_4, v\}$, où $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et v n'importe quel autre vecteur de $\mathbb{R}^4$ (qui est nécessairement une combinaison linéaire des quatre autres).

   Attention ! L'énoncé ne parlait pas de familles *de cardinal* 4, sinon la réponse aux deux questions aurait été **Non**.

Exercice 3.

1. *Observation fondamentale* : L'image par g d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ *ne s'exprime pas* comme combinaison linéaire des coordonnées de ce vecteur, on peut donc tout-de-suite se douter que g *n'est pas* linéaire.

   Soient $v_1 = (1, 1, 0)$ et $v_2 = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. $g(v_1) = 1 \times 1 \times 0 = 0$, $g(v_2) = 0 \times 0 \times 1 = 0$, mais

   $$g(v_1 + v_2) = g((1, 1, 1)) = 1 \times 1 \times 1 = 1 \neq 0 = g(v_1) + g(v_2),$$

   donc g n'est pas linéaire.

2. (a) Soient $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   $$\begin{aligned} f(u) + \lambda f(v) &= f((x, y, z)) + \lambda f((x', y', z')) \\ &= (x - y, y - z, z - x) + \lambda(x' - y', y' - z', z' - x') \\ &= \Big((x - y) + \lambda(x' - y'), (y - z) + \lambda(y' - z'), (z - x + \lambda(z' - x')\Big) \\ &= \Big((x + \lambda x') - (y + \lambda y'), (y + \lambda y') - (z + \lambda z'), (z + \lambda z') - (x + \lambda x')\Big) \\ &= f\Big((x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')\Big) \\ &= f\Big((x, y, z) + \lambda(x', y', z')\Big) \\ &= f(u + \lambda v) \end{aligned}$$

   L'application f est donc $\mathbb{R}$ linéaire.

   (b)
   $$\begin{aligned} \ker f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f((x, y, z)) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x - y, y - z, z - x) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y,\ y = z \text{ et } z = x\} \\ &= \{(x, x, x), x \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x.(1, 1, 1), x \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{Vect}\{(1, 1, 1)\}. \end{aligned}$$

   Comme $(1, 1, 1) \neq 0$, la famille $\{(1, 1, 1)\}$ est **libre**. Elle est en outre **génératrice** de $\ker f$ d'après ce qui précède, c'est donc une **base** de $\ker f$. La **dimension** de $\ker f$ est donc **1**.

   Notons qu'on peut dès à présent déterminer la dimension de $\mathrm{Im} f$: d'après le théorème du rang,

   $$\mathbf{dim(Imf)} = \mathrm{rg} f = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker f) = 3 - 1 = \mathbf{2}.$$

Notons $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. D'après le cours, $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ forme une famille **génératrice** de $\mathrm{Im}f$. On peut donc en extraire une base de $\mathrm{Im}f$. Comme $\mathrm{Im}f$ est de dimension 2, il suffit pour cela de choisir une sous-famille libre à deux éléments. Prenons par exemple $\{f(e_1), f(e_2)\}$.

$$\begin{aligned} xf(e_1) + yf(e_2) = (0,0,0) &\Leftrightarrow f(xe_1 + ye_2) = (0,0,0) \quad \text{(car } f \text{ est linéaire)} \\ &\Leftrightarrow f((x,y,0)) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow (x-y, y, -x) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0. \end{aligned}$$

La famille $\{f(e_1), f(e_2)\} = \{(1,0,-1), (-1,1,0)\}$ est donc **libre**. Comme elle est de **cardinal égal à la dimension de** $\mathrm{Im}f$, c'est une **base** de $\mathrm{Im}f$.

(c)
- $\ker f \neq \{0\}$ donc f n'est pas injective.
- $\mathrm{Im}f \neq \mathbb{R}^3$ (puisque $\dim(\mathrm{Im}f) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$) donc f n'est pas surjective.
- f n'est donc pas bijective.

Remarque : Comme la dimension de l'espace de départ ($\mathbb{R}^3$) est égale à celle de l'espace d'arrivée ($\mathbb{R}^3$ aussi), une application de l'un dans l'autre est injective si et seulement si elle est surjective si et seulement si elle est bijective. Comme on a montré que f n'était *pas* injective, on a *automatiquement* que f n'est ni surjective, ni bijective.

(d) Notons F l'ensemble $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / a + b + c = 0\}$.

- *Montrons que* $\mathrm{Im}f \subset F$. $\mathrm{Im}f = \{f((x,y,z)),\ x,y,z \in \mathbb{R}\} = \{(x-y, y-z, z-x),\ x,y,z \in \mathbb{R}^3\}$. Donc la somme des coordonnées de tout vecteur appartenant à $\mathrm{Im}f$ vaut 0 ($(x-y) + (y-z) + (z-x) = 0\ \forall x,y,z \in \mathbb{R}$), autrement dit, tout vecteur de $\mathrm{Im}f$ appartient à F.
- *F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension* 2. Une façon de le démontrer est de remarquer que $F = \mathrm{Ker}\varphi$ où φ est l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi : (x,y,z) \mapsto x + y + z$ (*vérification quasi-immédiate*). Le noyau d'une application linéaire est toujours un sous-espace vectoriel de l'espace de départ (ici : $\mathbb{R}^3$), et le théorème du rang appliqué à φ donne :

  $$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim \ker \varphi + \dim(\mathrm{Im}\varphi) \quad \text{soit} \quad 3 = \dim F + \dim(\mathrm{Im}\varphi).$$

  Or $\mathrm{Im}\varphi$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}$ (l'espace d'arrivée), donc est de dimension *inférieure ou égale* à $\dim(\mathbb{R}) = 1$. $\dim(\mathrm{Im}\varphi)$ ne peut valoir 0, car φ n'est pas l'application nulle. $\dim(\mathrm{Im}\varphi)$ vaut donc 1. On obtient donc comme annoncé : $\dim F = 3 - 1 = 2$.

On a donc finalement :

$$\mathrm{Im}f \subset F \quad \text{et} \quad \dim(\mathrm{Im}f) = \dim F.$$

Ces deux s.e.v de $\mathbb{R}^3$ sont donc égaux.

(e) Il faut montrer deux choses :
- $\ker f \cap \mathrm{Im}f = \{0\}$
- $\mathbb{R}^3 = \ker f + \mathrm{Im}f$.

Il est souvent plus facile de commencer par la première propriété.

$$\begin{aligned} \ker f \cap \mathrm{Im}f &= \{(x,x,x), x \in \mathbb{R}\} \cap \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / a + b + c = 0\} \text{ (d'après (b) et (d))} \\ &= \{(x,x,x), x \in \mathbb{R}\ / x + x + x = 0\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

La somme $\ker f + \mathrm{Im}f$ est donc *directe*, ce qui entraîne :

$$\dim(\ker f + \mathrm{Im}f) = \dim(\ker f) + \dim(\mathrm{Im}f) = 1 + 2 = 3 \quad \text{d'après (b)}.$$

$\ker f + \mathrm{Im}f$ est donc un s.e.v de dimension 3 de $\mathbb{R}^3$, c'est donc $\mathbb{R}^3$ tout entier, ce qui démontre la deuxième propriété.

Exercice 4.

1. (a) La famille $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ étant de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, elle est libre si et seulement si elle est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Comme on demande dans la question suivante de trouver une base de $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$, il paraît plus judicieux ici d'étudier directement le rang de la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$. Pour cela, la méthode consiste à considérer la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ ayant pour colonnes les vecteurs v_1, v_2 et v_3 (en écriture colonne) et à la mettre sous forme échelonnée *par rapport aux colonnes*. Les colonnes non nulles de la matrice finale formeront alors une base de $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$, ce qui répondra du même coup en partie à la question suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_3 \leftarrow -C_3 \\ C_2 \leftrightarrow C_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $w_2 = (0,1,2) \in \mathbb{R}^3$. $\{v_1, w_2\}$ forme donc une base de $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$, qui est donc de dimension 2, et donc strictement inclus dans $\mathbb{R}^3$; autrement dit, $\{v_1, v_2, v_3\}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$, et n'est donc pas libre.

(b) $\{v_1, w_2\}$ forme une base de $\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ et, en notant $e_3 = (0,0,1)$ le troisième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\{v_1, w_2, e_3\}$ forme une famille libre de $\mathbb{R}^3$, la matrice formée de ces trois vecteurs étant échelonnée réduite avec 3 pivots (on peut aussi donner comme argument que cette matrice a pour déterminant $1 \neq 0$), et donc une base puisque son cardinal est $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

2. Notons $P_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-e.v. des fonctions polynômes réelles de degré inférieur ou égal à 2. On sait (cours ou TD) que $\dim(P_2(\mathbb{R})) = \mathbf{3}$ (attention, pas 2 !). La famille $\{p_0, p_1, p_2\}$ étant de cardinal 3, pour montrer qu'elle forme une base de $P_2(\mathbb{R})$, il suffit de montrer qu'elle est libre.

   Soient λ_0, λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 0_{P_2(\mathbb{R})} &\Leftrightarrow \lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \lambda_0 \times 1 + \lambda_1 (x+1) + \lambda_2 (x+1)^2 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 + 2\lambda_2)x + \lambda_2 x^2 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)e_0 + (\lambda_1 + 2\lambda_2)e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_{P_2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

   où $\{e_0, e_1, e_2\}$ désigne la base canonique de $P_2(\mathbb{R})$ (cf. TD ou cours : $e_0 : x \mapsto 1$, $e_1 : x \mapsto x$, $e_2 : x \mapsto x^2$). Cette famille étant en particulier libre,

$$(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)e_0 + (\lambda_1 + 2\lambda_2)e_1 + \lambda_2 e_2 = 0_{P_2(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

   On a donc montré que

$$\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 0_{P_2(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0,$$

   ce qui signifie précisément que la famille $\{p_0, p_1, p_2\}$ est libre.

Exercice 5.

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ M & \mapsto & tr(M) \end{array}$. Vérifions que f est $\mathbb{C}$-linéaire. Soient M, $M' \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$f(M + \lambda M') = tr(M + \lambda M') \underset{\text{cf. TD}}{=} tr(M) + tr(\lambda M') \underset{\text{cf. TD}}{=} tr(M) + \lambda tr(M') = f(M) + \lambda f(M'),$$

   donc f est $\mathbb{C}$-linéaire, et

$$H = \{M \in M_n(\mathbb{C}) / tr(M) = 0\} = \{M \in M_n(\mathbb{C}) / f(M) = 0\} = \ker f.$$

2. (cf. TD) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ et $\text{Im}(f)$ est un s.e.v. de $\mathbb{C}$ donc $\dim(\text{Im} f) = 0$ ou 1. Mais f n'est pas l'application nulle (la trace de la matrice identité par exemple vaut $n \neq 0$) donc $\text{Im} f \neq \{0\}$, donc $\dim_{\mathbb{C}}(\text{Im} f) = 1$, donc $\text{Im} f$ est $\mathbb{C}$ tout entier, ce qui signifie précisément que f est surjective.
3. H étant le noyau de f, c'est un s.e.v. de $M_n(\mathbb{C})$, qui est un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension finie. H est donc lui aussi un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension finie. Le théorème du rang appliqué à f donne :

$$\dim(M_n(\mathbb{C})) = \dim(\ker f) + \dim(\text{Im} f) \quad \text{soit} \quad n^2 = \dim(H) + 1 \quad \text{i.e} \quad \mathbf{dim(H) = n^2 - 1}.$$

   (le rappel de cours fourni par l'énoncé indique que le $\mathbb{C}$-e.v. $M_n(\mathbb{C})$ a pour base la famille $\{E_{k,l}\}_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq n}}$, qui est de cardinal n^2, donc la dimension de $M_n(\mathbb{C})$ est n^2.)