**Contrôle continu numéro 2**
**(1 heure)**

---

*Les réponses aux exercices doivent être clairement rédigées. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Le barême donné pour chaque exercice est indicatif, le correcteur se garde la possibilité de le modifier.*

**Exercice 1. Question de cours (2 points).** *Le correcteur attend de l'étudiant une rigueur irréprochable. Par exemple, toutes les notations doivent être introduites.*

Énoncer le théorème du rang.

**Exercice 2. Existence (4 points).**

1. Existe-t-il :
   (a) une application $\mathbb{R}$-linéaire surjective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ ?
   (b) une application $\mathbb{R}$-linéaire injective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ ?
   *Dans chacun des cas, donner un exemple concret, ou démontrer qu'une telle application n'existe pas.*
2. Existe-t-il :
   (a) une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui soit libre mais non génératrice de $\mathbb{R}^3$ ?
   (b) une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui soit génératrice de $\mathbb{R}^4$ mais qui ne soit pas libre ?
   *Dans chacun des cas, donner un exemple concret, ou démontrer qu'une telle famille n'existe pas.*

**Exercice 3. Applications linéaires, noyaux, images (7 points).**

1. L'application $g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & xyz \end{cases}$ est-elle $\mathbb{R}$-linéaire ?
2. On considère maintenant l'application
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, y-z, z-x) \end{cases}.$$
   (a) Montrer que $f$ est $\mathbb{R}$-linéaire.
   (b) Donner une base *et* la dimension du noyau et de l'image de $f$.
   (c) L'application $f$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
   (d) Montrer que $\mathrm{Im} f = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / a+b+c = 0\}$.
   (e) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$.

**Exercice 4. Familles libres, familles génératrices, bases (3 points).**

1. Soient $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (-1,1,3)$ et $v_3 = (1,1,1)$.
   (a) La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle libre ?
   (b) Donner une base de $\mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$ et la compléter en une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $p_0$, $p_1$ et $p_2$ les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :
$$p_0 : x \mapsto 1, \quad p_1 : x \mapsto x+1 \quad \text{et} \quad p_2 : x \mapsto (x+1)^2.$$
   Montrer que $\{p_0, p_1, p_2\}$ forme une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

**Exercice 5. L'hyperplan des matrices complexes de trace nulle (4 points).**
Pour une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{C})$ ($n$ entier $\ge 1$), on appelle "trace de $M$" et on note $tr(M)$ le nombre *complexe* $\sum_{k=1}^{n} m_{k,k}$.
On considère $H = \{M \in M_n(\mathbb{C})\ ,\ tr(M) = 0\}$.

1. Ecrire $H$ comme le noyau d'une application de $M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ dont on vérifiera qu'elle est $\mathbb{C}$-linéaire.
2. Montrer que cette application est surjective.
3. Démontrer que $H$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Calculer sa dimension.

*Rappel de cours :* Pour tout couple $(k,l)$ d'entiers compris entre 1 et $n$, on note $E_{k,l}$ la matrice carrée d'ordre $n$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui appartenant à la $k$-ième ligne et à la $l$-ième colonne qui vaut 1. La famille $\{E_{k,l}\}_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le l \le n}}$ forme une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$.