Contrôle continu numéro 1
(1 heure)

La rédaction doit être concise et précise. Le détail des calculs doit apparaître sur la copie. La présentation doit être la plus soignée possible. Le barême donné pour chaque exercice est indicatif.

Exercice 1. Question de cours. (2 points)

- Donner la définition d'un vecteur propre d'un endomorphisme f d'un espace vectoriel E.
- Montrer que deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants.

Exercice 2. (4 points)
Dans $\mathbb{R}^5$, on considère les vecteurs $u_1 = (1, 2, 1, 2, 1)$, $u_2 = (2, 0, 0, 1, 3)$ et $u_3 = (-1, 1, 1, 1, 1)$.

1. Montrer que la famille constituée de ces 3 vecteurs est libre.
2. Compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^5$.
3. En déduire un supplémentaire dans $\mathbb{R}^5$ de $\mathrm{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}$.

Exercice 3. (6 points)
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, expliciter $f((x, y, z))$.
2. Calculer le polynôme caractéristique de f et montrer que les valeurs propres de f sont -1 et 2.
3. Donner une base du sous-espace propre associé à chacune de ces valeurs propres.
4. Donner une base $\mathcal{B}$ formée de vecteurs propres de f, et donner la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.
5. Donner la matrice de passage P de la base canonique $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$.
6. Quelle relation lie A, D, P et P^{-1} ?
7. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 4. (5 points)
Soit $a \in \mathbb{R}$ et φ_a l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ (dont on admettra qu'elle est linéaire) définie par

$$\forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \varphi_a((x, y, z, t)) = (ax + y + z, 2x + y + at, ax, -x + y + 2z + t).$$

1. Déterminer la matrice A_a de φ_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Calculer son déterminant.
3. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles φ_a est bijective.
4. Déterminer suivant les valeurs de a les dimensions de l'image et du noyau de φ_a, et donner une base de ces sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5. (3 points)

Soit E l'ensemble des matrices réelles de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, et ψ l'application de E dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\psi : \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+c & b+c \\ b & a+b \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et en donner une base.
2. Montrer que ψ est une application linéaire. Est-elle surjective ? injective ?