Géométrie différentielle

Cours de M1[1]

Notes de Vincent Humilière[2]
(remaniées par Hélène Eynard-Bontemps)

1. Dernière révision : 21 octobre 2026
2. vincent.humiliere@imj-prg.fr, https ://webusers.imj-prg.fr/∼vincent.humiliere/

Table des matières

Introduction **3**

1 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ **4**
I Rappels de calcul différentiel 4
II Immersions, submersions 9
III Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ 12
IV Espace tangent à une sous-variété 16

2 Variétés différentiables **19**
Parenthèse : espaces topologiques 19
I Notion de variété différentiable 21
II Applications lisses entre variétés 24
III Sous-variétés d'une variété 27
IV Exemples et constructions 30
IV.1 Somme disjointe 30
IV.2 Produits de variétés 30
Parenthèse : topologie quotient 31
IV.3 Somme connexe de deux variétés 36
IV.4 Quotient de variétés par des actions libres et propres de groupes discrets 37
IV.5 L'espace projectif 41
V Partitions de l'unité et plongement de Whitney 45

3 Le fibré tangent **48**
I L'espace tangent à une variété en un point 48
II Fibrés vectoriels 51
III Les fibrés tangent et cotangent 55
IV Champs de vecteurs, formes différentielles de degré 1. 56
IV.1 Definitions 56
IV.2 Champs de vecteurs et dérivations 58
IV.3 Ecriture locale des champs de vecteurs et des formes différentielles de degré 1 61

4 Champs de vecteurs et flots **63**
I Champs de vecteurs et équations différentielles ordinaires 63
II Flot d'un champ de vecteurs 65
III Quelques exemples 69
IV Dérivée de Lie d'un champ de vecteurs 72

5 Formes différentielles **75**
I Formes alternées et produits extérieurs . . . 75
II Formes différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . . . 80
III Fibré des formes alternées d'une variété . . . 83
IV Orientation des variétés . . . 87
V Intégration des formes différentielles . . . 91
VI La formule de Stokes . . . 95
VI.1 Domaines à bord lisse . . . 95
VI.2 La formule de Stokes . . . 96
VI.3 Une application topologique : le théorème de Brouwer . . . 99

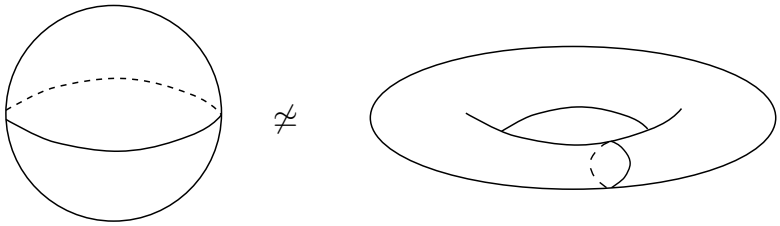
6 Cohomologie de De Rham **100**
I Formes fermées et formes exactes . . . 100
II Cohomologie de De Rham . . . 101
III Invariance par homotopie . . . 102
IV La suite exacte de Mayer-Vietoris . . . 105
IV.1 Vocabulaire d'algèbre homologique . . . 105
IV.2 Suite exacte longue en cohomologie associée à une suite exacte courte de complexes . . . 107
IV.3 La suite exacte de Mayer-Vietoris . . . 108
V Quelques calculs . . . 109
VI Cohomologie en degré maximal et applications . . . 112
VI.1 Quelques énoncés sans démonstration . . . 112
VI.2 Degré d'une application de la sphère . . . 113

Introduction

Le but de ce cours est d'introduire le langage de la géométrie différentielle, qui est omniprésent en mathématiques, et de se familiariser avec les objets centraux de ce domaine, les variétés différentielles.

Intuitivement, une variété est un objet géométrique muni d'une structure "lisse". Nous mettrons l'accent sur les exemples fondamentaux : sphères, tores, espace projectifs. Mais des constructions abstraites apparaîtront aussi : quotients de variétés, fibrés vectoriels... Nous verrons que toutes les propriétés locales du calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$ peuvent être transposées aux variétés et nous ne nous priverons pas de le faire. Il s'agit d'un cours où de très nombreuses nouvelles notions sont introduites.

La dernière partie du poly (qui n'est plus traitée depuis l'allègement du cours en termes d'heures/crédits) est une introduction à la topologie différentielle et à la topologie algébrique, dont le but est la classification des variétés différentielles par des méthodes algébriques. A chaque variété différentiable M, nous associerons (de manière assez élaborée) un espace vectoriel noté $H^*(M)$, appelé « cohomologie de De Rham » de M. Nous utiliserons cette construction pour montrer que certains espaces ne sont pas homéomorphes. Par exemple, nous démontrerons qu'un tore n'est pas homéomorphe à une sphère :



Ces notes de cours sont très largement inspirées d'autres (que vous pouvez aussi consulter), en particulier :

— les notes de cours d'Alexandru Oancea,
— les notes de cours de Frédéric Paulin,
— les notes de cours de Claude Viterbo,
— les notes de cours de Laurent Charles (non disponibles en ligne)

Il y a des dizaines (centaines ?) d'autres références possibles, par exemple les livres "Introduction aux variétés différentielles" de Jacques Lafontaine, le livre "Géométrie différentielle" de Berger-Gostiaux.

Chapitre 1

Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

I Rappels de calcul différentiel

Norme. Soit E un espace vectoriel. Une *norme* est une application $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty[$ (aussi notée $\|\cdot\|_E$) vérifiant :
- $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, pour tous $x, y \in E$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$.

Distance. Une norme définit une *distance* par la formule $d_E(x, y) = \|x - y\|_E$.

Boules ouvertes. On notera $B(x, r)$ (ou $B_E(x, r)$) la boule ouverte de centre x et de rayon r (c'est-à-dire $B(x, r) = \{y \in E \,|\, d(y, x) < r\}$).

Ouverts. Un *ouvert* est une partie de E qui est réunion de boules ouvertes. Une partie U est un ouvert si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } x \in U, \text{ il existe } r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset U.$$

Propriétés. *(i) $\emptyset$ est un ouvert,*

(ii) E est un ouvert,

(iii) Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts, alors leur réunion $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert,

*(iv) Si $(U_i)_{i=1,\dots,k}$ est une famille **finie** d'ouverts, alors leur intersection $\bigcap_{i=1}^{k} U_i$ est ouverte.*

Applications continues. Soient U un ouvert d'un espace normé $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ un autre espace normé. Une application $f : U \to F$ est dite *continue* si et seulement si pour tout $x \in U$,

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall y \in B_E(x, \eta), \ f(y) \in B_F(f(x), \varepsilon).$$

Exercice 1. *Démontrer que $f : U \to F$ est continue si et seulement si pour tout ouvert V de F, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est ouverte.*

Applications linéaires continues. Lorsque la fonction est linéaire, l'écriture de la continuité se simplifie :

Proposition 1.1. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors, il y a équivalence entre :*

1. *f est continue,*
2. *$\exists C > 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E$*
3. *f est bornée sur la boule unité $B_E(0,1)$.*

Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire $f : E \to F$ est continue.

On notera $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. C'est un espace vectoriel normé, muni de la norme (induite par celles de E et F) :

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \in B_E(0,1)} \|f(x)\|_F.$$

Applications multilinéaires continues. De manière similaire au paragraphe précédent, une application k-linéaire $f : E_1 \times \cdots \times E_k \to F$ est continue si et seulement si [1]

$$\exists C > 0,\ \forall x_1 \in E_1, \ldots, x_k \in E_k, \|f(x_1, \ldots, x_k)\| \leqslant C\|x_1\| \cdot \cdots \cdot \|x_k\|. \tag{1.1}$$

Comme précédemment, la continuité est automatique si tous les E_i sont de dimension finie.

On peut aussi munir l'espace $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_k, F)$ des applications k-linéaires continues d'une norme :

$$\|f\| = \sup \|f(x_1, \ldots, x_k)\|_F,$$

où le supremum est pris sur tous les $x_1 \in B_{E_1}(0,1), \ldots, x_k \in B_{E_k}(0,1)$.

Différentiabilité. Soit $f : U \to F$, avec $U \subset E$ ouvert. On dit que f est *différentiable* en x si et seulement s'il existe une application linéaire continue $L_x : E \to F$ telle que

$$\forall v \in E, \quad f(x+v) = f(x) + L_x(v) + o(v)$$

Pour mémoire, la notation $o(v)$ signifie "une certaine fonction telle que $\lim_{v \to 0, v \neq 0} \frac{o(v)}{\|v\|} = 0$".

De manière équivalente, f est différentiable en x si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en x.

On notera Df_x (ou aussi $Df(x)$ ou $D_x f$, ...) la forme linéaire L_x (qui est unique). On l'appelle *différentielle de f en x* ou *application linéaire tangente à f en x.*

Applications lisses. Si $Df : U \to \mathcal{L}(E,F)$, $x \mapsto Df_x$ est définie et continue, alors f est dite *de classe C^1*. Par induction, on dit que f est de classe C^{k+1} si Df est de classe C^k. Enfin, on dit que f est *lisse* ou *de classe C^∞* si elle est de classe C^k pour tout entier $k > 0$.

Dans ce cours, toutes les applications (ou presque) seront lisses. Souvent, par "application", on sous-entendra "application lisse".

1. Dans (1.1), on a omis de préciser quelles étaient les normes impliquées. Mais le contexte permet de deviner : par exemple, puisque $x_1 \in E_1$, nécessairement $\|x_1\|$ est $\|x_1\|_{E_1}$. Nous ferons souvent ce type d'omission pour alléger l'écriture de nos formules.

Cas particuliers importants.

- Si $F = \mathbb{R}$, alors $Df_x : E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire.
- Si $F = \mathbb{R}^p$, alors f peut être décrite par des applications coordonnées $f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^p \end{pmatrix}$ et on a alors
$$Df_x(v) = \begin{pmatrix} Df_x^1(v) \\ \vdots \\ Df_x^p(v) \end{pmatrix}.$$
- Si $E = \mathbb{R}$, alors $Df_x : \mathbb{R} \to F$ est déterminée par $Df_x(1)$ (en effet, par linéarité, $Df_x(v) = v\, Df_x(1)$ pour tout $v \in \mathbb{R}$), et on note $f'(x) := Df_x(1)$. On voit que $f'(x)$ est un vecteur de F et qu'il vérifie :
$$\forall v \in \mathbb{R}, Df_x(v) = v\, f'(x).$$
Autrement dit, Df_x est la multiplication par $f'(x)$.
- Si $E = \mathbb{R}^n$, on peut définir les dérivées partielles de f. Pour $i = 1, \dots, n$, la i-ème dérivée partielle de f est donnée par
$$\partial_{x_i} f(x) = Df_x \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$
où, bien sûr, le 1 apparaît en i-ème position.
- Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, alors Df_x peut être représentée dans la base canonique par la matrice jacobienne $\left(\partial_{x_j} f^i(x)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$.

Exemples fondamentaux.

(a) Si $f : E \to F$ est linéaire continue, alors on peut écrire $f(x+v) = f(x) + f(v)$. On en déduit que pour tout x,
$$\boxed{Df_x = f}$$
L'application Df est donc constante.

(b) Supposons maintenant que $f : E_1 \times E_2 \to F$ est bilinéaire continue. Alors, on peut écrire
$$f(x_1 + v_1, x_2 + v_2) - f(x_1, x_2) = f(x_1, v_2) + f(v_1, x_2) + f(v_1, v_2).$$
Dans le membre de droite ci-dessus, les deux premiers termes sont linéaires et le troisième est $o(v)$. En effet, la continuité de f et des projections $v \mapsto v_1$, $v \mapsto v_2$ implique que pour certaines constantes C, C', on a $\|f(v_1, v_2)\| \leqslant C\|v_1\|\,\|v_2\| \leqslant C'\|v\|^2$. On en déduit :
$$\boxed{Df_{(x_1,x_2)}(v_1, v_2) = f(x_1, v_2) + f(v_1, x_2)}$$

(c) Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications, telles que f est différentiable en x et g est différentiable en $f(x)$, alors $g \circ f$ est différentiable en x et
$$\boxed{D(g \circ f)_x = Dg_{f(x)} \circ Df_x}. \tag{1.2}$$
Autrement dit, *la différentielle d'une composée est la composée des différentielles.*

Démonstration (pas tout-à-fait rigoureuse). En effet, on peut écrire

$$g \circ f(x+v) = g\left(f(x) + df_x(v) + o(v)\right).$$

Notons $w = df_x(v) + o(v)$. En particulier, $\|w\| \leqslant C\|v\|$ pour une certaine constante C. On a alors :

$$\begin{aligned} g \circ f(x+v) &= g(f(x)+w) \\ &= g \circ f(x) + Dg_x(w) + o(w) \\ &= g \circ f(x) + Dg_{f(x)} \circ Df_x(v) + Dg_x(o(v)) + o(w). \end{aligned}$$

La continuité de l'application linéaire Dg_x implique que le terme $Dg_x(o(v))$ est $o(v)$. Le terme $o(w)$ est aussi $o(v)$. D'où $Dg_x(o(v))+o(w) = o(v)$ et on en déduit la formule (1.2). □

REMARQUE 1.2. (dérivées partielles d'une composition). On suppose que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Nous avons vu que la matrice jacobienne représente la différentielle dans la base canonique. Par ailleurs, nous savons que la composition des applications linéaires se traduit par la multiplication de leurs matrices. On déduit donc directement de la formule (1.2) :

$$\left(\partial_{x_j}(g \circ f)^i(x)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} = \left(\partial_{x_k} g^i(x)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant k \leqslant p}} \left(\partial_{x_j} f^k(x)\right)_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant p}}.$$

On peut ensuite retrouver (exercice !) la formule pour $\partial_{x_j}(g \circ f)^i(x)$ en effectuant le produit matriciel. ◀

Nous utiliserons à plusieurs reprises dans le cours le résultat de l'exercice suivant :

Exercice 2. *On suppose que E est de dimension finie et muni d'un produit scalaire euclidien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer que la différentielle de la norme euclidienne*

$$N : x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

en tout $x \neq 0$ est donnée par :

$$\boxed{DN_x(v) = \frac{\langle x, v \rangle}{\|x\|}}.$$

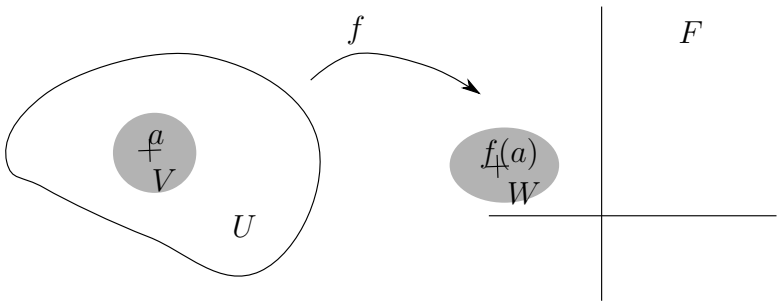
Difféomorphismes. Un *difféomorphisme* est une application bijective, différentiable, dont la réciproque est différentiable. Un C^k-difféomorphisme est une application bijective, de classe C^k, dont la réciproque est de classe C^k.

Comme on l'a déjà dit, la plupart des applications de ce cours seront lisses. Il en sera de même des difféomorphismes. Aussi, lorsque nous dirons "difféomorphisme", nous sous-entendrons souvent "difféomorphisme lisse".

Deux théorèmes fondamentaux. Les deux énoncés qui suivent nous seront très utiles dans la suite du cours (appliqué à des espaces vectoriels de dimension finie).

Théorème 1.3 (Théorème d'inversion locale)**.** *Soient E, F des espaces de Banach, U un ouvert de E, $f : U \subset E \to F$ de classe C^k (avec $k \geqslant 1$ éventuellement ∞) et $a \in U$. On suppose que Df_a* ***est inversible****.*

Alors, il existe un ouvert V de U contenant a et un ouvert W de F contenant $f(a)$ tels que la restriction $f|_V$ induise un C^k-difféomorphisme de V vers W.



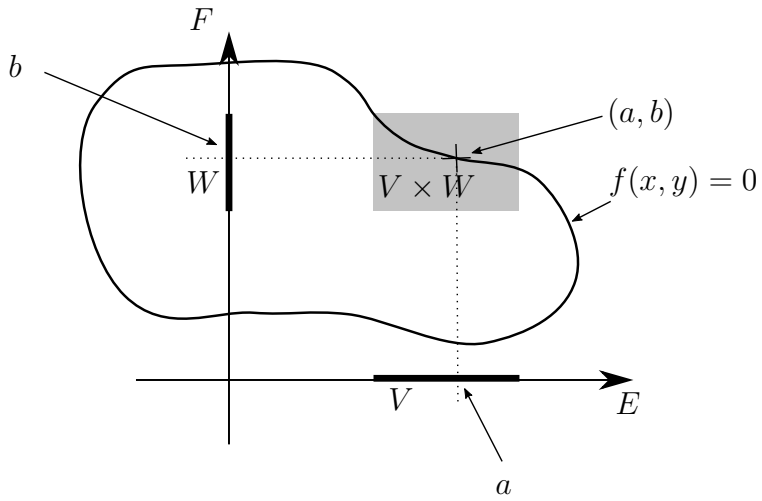
Dans la suite du cours, nous abrégerons la phrase « il existe un ouvert V de U contenant a et un ouvert W de F contenant $f(a)$ tels que la restriction $f|_V$ induise un C^k-difféomorphisme de V vers W » en disant simplement « f est un *difféomorphisme local* en a ».

Théorème 1.4 (Théorème des fonctions implicites)**.** *Soient E, F, G trois espaces de Banach et $f : U \subset E \times F \to G$ de classe C^k (avec $k \geqslant 1$ éventuellement ∞) et $(a, b) \in U$ vérifiant $f(a, b) = 0$. On suppose que l'application linéaire restreinte $Df_{(a,b)}|_{\{0\}\times F} \in \mathcal{L}(F, G)$ (c'est-à-dire la dérivée partielle dans la direction de F, que l'on pourrait aussi noter $\partial_F f(a, b)$) est inversible.*

Alors, il existe un voisinage ouvert V de a, un voisinage ouvert W de b, tels que $V \times W \subset U$ et une application $g : V \to W$ de classe C^k tels que

$$\forall (x, y) \in V \times W, \quad f(x, y) = 0 \text{ si et seulement si } y = g(x).$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x, y) = 0$ est localement le graphe de l'application g.



Exemple 1.5. Considérons l'application $f :]0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Elle est lisse et sa jacobienne en (r, θ) est donnée par

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de déterminant $r \neq 0$. Donc la différentielle de f est inversible en tout point. D'après le théorème d'inversion locale, f est un difféomorphisme lisse au voisinage de tout point.

Par ailleurs, on sait que f est une bijection $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty, 0] \times \{0\})$. On déduit de ce qui précède que son inverse f^{-1} est de classe C^∞ et donc que f est un C^∞-difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ vers $\mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty, 0] \times \{0\})$. ◀

Exercice 3. *Montrer que $f : (x, y, z) \mapsto (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$ définit un difféomorphisme entre deux ouverts (maximaux) à préciser.*

Exemple 1.6. Soit $(\phi_t)_{t\in F}$ une famille d'applications contractantes $E \to E$ telle que $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$ est C^k. D'après le théorème du point fixe de Picard, chacune d'entre elles admet un unique point fixe x_t. Alors l'application $t \mapsto x_t$ est de classe C^k.

En effet, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites à l'application $g : (t, x) \mapsto \phi_t(x) - x$ (comme $\partial_x f(x, t) = D(\phi_t)_x - \mathrm{Id}$ et $\|D\phi_t\| < 1$ puisque ϕ_t est contractante, $\partial_x f(x, t)$ est inversible). L'ensemble des solutions de $\phi_t(x) - x$ est donc localement le graphe d'une application lisse $t \mapsto g(t)$. Par ailleurs, on sait que c'est le graphe de $t \mapsto x_t$. On en déduit que $x_t = g(t)$ et donc que $t \mapsto x_t$ est lisse. ◀

Remarque 1.7. Dans le théorème d'inversion locale, on peut retrouver facilement la formule pour la différentielle de l'inverse de f. En effet, prenant la différentielle de la formule $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$, on trouve $Df^{-1}_{f(x)} \circ df_x = \mathrm{Id}$ et donc

$$\boxed{Df^{-1}_{f(x)} = (Df_x)^{-1}}$$

De même, dans l'énoncé du théorème des fonctions implicites, on peut retrouver facilement la formule donnant la différentielle de g. En effet, en prenant la différentielle de la formule $f(x, g(x)) = 0$, on obtient $Df_{(x,g(x))} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{Id} \\ Dg_x \end{pmatrix} = 0$, ce qui se réécrit $\partial_F f(x, g(x)) \cdot Dg_x + \partial_E f(x, g(x)) = 0$. Pour $x = a$, on a $g(a) = b$, donc

$$\boxed{Dg_a = -\partial_F f(a, b)^{-1} \cdot \partial_E f(a, b)}$$

◀

II Immersions, submersions

Pour toute cette partie, on fixe E, F des espaces vectoriels normés de dimensions finies respectives n et p, et $f : U \to F$ une application lisse définie sur un ouvert U de E.

Définition 1.8 (Immersions, submersions)**.** *(a) On dit que f est une* immersion *en $x \in U$ si Df_x est injective. On dit que f est une immersion sur U si f est une immersion en tout point de U.*

(b) On dit que f est une submersion *en $x \in U$ si Df_x est surjective. On dit que f est une submersion sur U si f est une submersion en tout point de U.*

L'exemple le plus simple d'immersion est $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$, $x \mapsto (x, 0)$. De manière similaire, l'exemple le plus simple de submersion est $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$, $(x, y) \mapsto x$.

Les deux théorèmes de la fin de ce paragraphe montrent que, localement, toutes les immersions/submersions se ramènent à ces deux exemples en composant par des difféomorphismes.

Notons que, si E est de dimension 1, $Df_x : h \mapsto f'(x) \cdot h$ est injective si et seulement si $f'(x) \neq 0$. Ainsi, par exemple, $\gamma : x \mapsto (\cos x, \sin x)$ est une immersion (non injective) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, puisque $\gamma'(x) = (-\sin x, \cos x) \neq (0, 0)$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

De façon similaire, si F est de dimension 1, Df_x est une forme linéaire, et elle est surjective si et seulement si elle est non nulle. Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}$, cela revient à dire que le gradient de f en x est non nul. Par exemple, $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|^2$ est une submersion en dehors de l'origine, puisque $\nabla f_x = 2x$.

Définition 1.9 (Rang en un point)**.** *On appelle* rang *de f en x et on note $\operatorname{rang}_x f$ le rang de la différentielle de f en x.*

Rappelons que par définition, le rang d'une application linéaire est la dimension de son image. Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, $\operatorname{rang}_x f$ est donc le rang de la famille de vecteurs de F

$$(\partial_{x_1} f(x), \ldots, \partial_{x_n} f(x)) .$$

Dans le cas où $F = \mathbb{R}^p$, c'est aussi le rang de la famille de formes linéaires sur E

$$\left(df_x^1, \ldots, df_x^p\right),$$

où $f^1, \ldots, f^p$ désignent les applications coordonnées de f. Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, le rang de f en x est égal au rang de la matrice jacobienne de f en x.

Remarque 1.10. Le rang de f en x vérifie l'inégalité :

$$\operatorname{rang}_x f \leqslant \min(\dim E, \dim F).$$

Lorsqu'il y a égalité, on dit que f est de *rang maximal* en x. Remarquons aussi que f est de rang maximal en x si et seulement si elle une immersion ou une submersion. ◀

Proposition 1.11 (semi-continuité du rang)**.** *L'application* rang $: \mathcal{L}(E, F) \to \mathbb{R}$ *est semi-continue inférieurement. Autrement dit, pour tout entier k, l'ensemble*

$$U_k = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \,|\, \operatorname{rang} u \geqslant k\}$$

est un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration. En identifiant applications linéaires et matrices (au moyen d'un choix de bases), nous pouvons supposer que $U_k = \{A \in M_{pn}(\mathbb{R}) \,|\, \text{rang } A \geqslant k\}$. Rappelons qu'une matrice est de rang au moins k si et seulement si elle admet une sous-matrice de taille $k \times k$ dont le déterminant est non nul.

Pour toutes parties à k éléments $I \subset \{1, \ldots, p\}$ et $J \subset \{1, \ldots, n\}$, on peut définir l'application $\delta_{I,J}$ qui à une matrice A associe le déterminant de la sous-matrice de A extraite en ne gardant que les lignes et colonnes numérotées i, j avec $i \in I$ et $j \in J$. Chaque $\delta_{I,J}$ est une application continue. De plus, ce qui précède implique :

$$U_k = \bigcup_{I,J} {\delta_{I,J}}^{-1} (\mathbb{R} \setminus \{0\}) .$$

On en déduit que U_k est un ouvert, puisque c'est une union d'ouverts. □

Cette proposition admet le corollaire suivant.

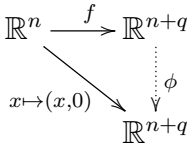
Corollaire 1.12. *Si f est de rang maximal en x, alors f est de rang maximal au voisinage de x.*

Théorème 1.13 (Forme normale des immersions)**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $f : U \to \mathbb{R}^{n+q}$ une application lisse, qui est une immersion en 0 et vérifiant $f(0) = 0$.*

Alors il existe un difféomorphisme local[2] *ϕ de $\mathbb{R}^{n+q}$ en 0 tel que l'on ait pour tout x dans un voisinage de 0 :*

$$\phi \circ f(x) = (x, 0_{\mathbb{R}^q}).$$

On peut représenter l'identité ci-dessus en disant que le diagramme suivant (défini seulement au voisinage de 0) est "commutatif" :



Dans ce type de diagramme, on note souvent en pointillés la flèche correspondant à l'application dont l'existence est donnée par le théorème.

Démonstration. (On se ramène à l'inversion locale) Soit S un supplémentaire de l'image de Df_0 dans $\mathbb{R}^{n+q}$. D'après le théorème du rang, il existe un isomorphisme linéaire $A : \mathbb{R}^q \xrightarrow{\sim} S$. On pose $\psi : U \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^{n+q}$, $(x, y) \mapsto f(x) + A(y)$. Par construction, l'image de $D\psi_0$ contient l'image de Df_0 et contient S, donc contient tout $\mathbb{R}^{n+q}$. L'application $D\psi_0$ est surjective et donc inversible.

On peut appliquer le théorème d'inversion locale à ψ, qui est donc un difféomorphisme local en 0. Par ailleurs, on remarque qu'au voisinage de 0, on peut écrire : $\psi(x, 0) = f(x)$. On en déduit que $\phi = \psi^{-1}$ convient. □

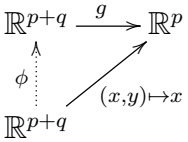
Théorème 1.14 (Forme normale des submersions)**.** *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^{p+q}$ contenant 0 et $g : U \to \mathbb{R}^p$ une application lisse qui est une submersion en 0 et vérifie $g(0) = 0$.*

Alors, il existe un difféomorphisme local ϕ de $\mathbb{R}^{p+q} \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ en 0, tel que l'on ait pour (x, y) dans un voisinage de 0 :

$$g \circ \phi(x, y) = x.$$

2. Pour la signification de "difféomorphisme local", voir le paragraphe qui suit le Théorème 1.3

Ceci peut être représenté par le diagramme commutatif suivant (défini au voisinage de l'origine) :



Démonstration. (On se ramène à l'inversion locale) Soit S un supplémentaire de $\ker Dg_0$ dans $\mathbb{R}^{p+q}$. Notons $p : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}^q$ une application linéaire surjective et dont le noyau est S. On pose $\psi : U \to \mathbb{R}^{p+q} \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $w \mapsto (p(w), g(w))$. Le noyau de $D\psi_0$ est l'intersection des noyaux de Dg_0 et de $Dp_0 = p$. Par construction, cette intersection est triviale et on en déduit que $D\psi_0$ est inversible.

Par le théorème d'inversion locale, ψ est un difféomorphisme local. En notant $q : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}^p$, $(x, y) \mapsto x$ la projection canonique, alors $g = q \circ \psi$ par construction. On en déduit que $\phi = \psi^{-1}$ convient. □

Ces deux énoncés sont des cas particuliers du théorème dit « du rang constant ».

III Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Il y a 4 manières équivalentes de définir les sous-variétés. Elles sont toutes regroupées dans l'énoncé suivant.

On fixe E un espace vectoriel[3] réel normé de dimension finie n, M une partie de E et $k \in \{0, \dots, n\}$.

Proposition-définition 1.15. *Soit a un point de M. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) (Forme normale) *Il existe un voisinage ouvert U de a dans E, un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $h : U \xrightarrow{\sim} V$ avec $h(a) = 0$, tels que*

$$h(M \cap U) = \left(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{n-k}}\}\right) \cap V$$

(un tel h est appelé difféomorphisme de redressement local ou *forme normale).*

(b) (Équation) *Il existe un voisinage ouvert U de a dans E, une application lisse $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ qui est une submersion en a avec $f(a) = 0$, tels que $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$ (autrement dit, $x \in M \cap U$ si et seulement si $f(x) = 0$).*

(c) (Graphe) *Il existe une décomposition en somme directe $E = E_1 \oplus E_2 = E_1 \times E_2$ avec $\dim E_1 = k$, et des ouverts U_1 de E_1 et U_2 de E_2, tels que $a = a_1 + a_2$, avec $a_1 \in U_1$, $a_2 \in U_2$ et une application lisse $g : U_1 \to E_2$ avec $g(a_1) = a_2$ telle que*

$$\begin{aligned} M \cap (U_1 \times U_2) &= \text{graphe}(g) \\ &= \{(x_1, g(x_1)) \,|\, x_1 \in U_1\}. \end{aligned}$$

3. Remarque pour les puristes : en réalité le bon cadre pour définir les sous-variétés serait plutôt un espace affine. Mais ceux-ci étant en général moins bien maîtrisés par les étudiants que les espaces vectoriels, E sera bien un espace vectoriel pour nous.

(d) (Paramétrage) *Il existe un ouvert W de $\mathbb{R}^k$ contenant 0, un ouvert U de E contenant a, et une application lisse $\phi : W \to E$ qui est une immersion en 0 avec $\phi(0) = a$ et telle que ϕ induise un homéomorphisme de W sur $U \cap M$.*

Lorsque ces conditions sont vérifiées en tout point a de M, on dit que M est une sous-variété *de E, de dimension k et de codimension $n - k$.*

Avant de démontrer ces équivalences, donnons quelques exemples, remarques et définitions supplémentaires.

Cas particuliers :

- Une sous-variété de dimension 0 est un ensemble discret de points (tous ses points sont isolés).
- Une sous-variété de dimension 1 est appelée une courbe.
- Une sous-variété de dimension 2 est appelée une surface.
- Une sous-variété de dimension n ($= \dim E$) est un ouvert de E.

Valeurs critiques et valeurs régulières. Un point a où f n'est pas une submersion est appelé *point critique* de f. L'image par f d'un de ses points critiques est appelée *valeur critique* de f. Une valeur qui n'est pas critique est dite *régulière*.

D'après la proposition-définition 1.15, condition (b), l'image réciproque par une fonction d'une valeur régulière est soit vide, soit une sous-variété.

Le théorème suivant (que l'on admettra) implique alors que presque tous les niveaux d'une fonction sont des sous-variétés.

Théorème 1.16 (Sard)**.** *L'ensemble des valeurs critiques d'une fonction lisse est de mesure nulle.*

Attention ! L'ensemble des points critiques, lui, n'est pas forcément de mesure nulle (penser à une fonction constante).

Plongements.

Définition 1.17. *Une application qui est une immersion et induit un homéomorphisme sur son image est appelée* plongement.

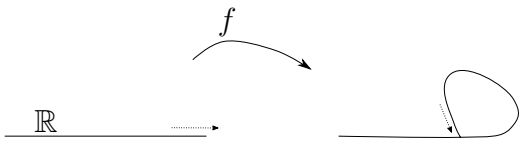
D'après la proposition-définition 1.15, condition (d), l'image d'un ouvert de $\mathbb{R}^k$ par un plongement est une sous-variété.

L'exercice suivant donne un critère bien utile pour établir qu'une application est un plongement.

Exercice 4. *Montrer qu'une immersion injective propre*[4] *est un plongement. On pourra commencer par montrer qu'une application continue propre est fermée, c'est-à-dire l'image de tout fermé est fermée.*

4. Une application propre est une application pour laquelle l'image réciproque de tout compact est compacte. Intuitivement, une telle application "envoie l'infini à l'infini".

REMARQUE 1.18. Il existe des immersions injectives qui ne sont pas des plongements. Par exemple, le dessin suivant représente une telle application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (on peut trouver une suite convergente dans l'image dont la suite d'antécédents diverge ; la réciproque n'est donc pas continue). Ceci ne suffit pas à dire que l'image n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, mais ce n'est est effectivement pas une (exercice).



◀

Exemples 1.19. Voici quelques exemples très classiques de sous-variétés obtenues à partir de la condition (b) (qui est la plus couramment utilisée dans les exemples).

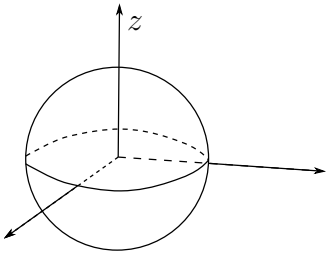
- *(Sphères)* : On note (dans toute la suite du cours) la sphère de dimension n par :

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}.$$

  Elle est donnée par l'équation $f = 0$ où $f(x) = \|x\| - 1$. Nous avons vu qu'en tout point x de $\mathbb{S}^n$, la différentielle de f est la forme linéaire :

$$Df_x : v \mapsto \frac{\langle x, v\rangle}{\|x\|} = \langle x, v\rangle.$$

  Il s'agit d'une forme linéaire non-nulle (puisque $x \neq 0$) donc surjective. Ceci montre que f est bien une submersion en tout point de $\mathbb{S}^n$.



- *(Tore de révolution)* : On pose $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant R^2\}$, $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant r^2\}$, avec $0 < r < R$, et

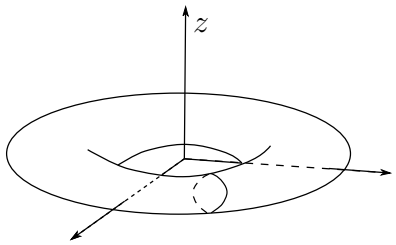
$$f(x, y, z) = (R^2 - (x^2 + y^2))(x^2 + y^2 - r^2) - z^2.$$

  Alors, f est une submersion en tout point de $f^{-1}(\{0\})$. En effet,

$$\begin{aligned}\partial_x f &= 2x(2(x^2 + y^2) - r^2 - R^2),\\ \partial_y f &= 2y(2(x^2 + y^2) - r^2 - R^2),\\ \partial_z f &= -2z,\end{aligned}$$

  d'où l'on peut voir que Df ne s'annule pas sur $f^{-1}(\{0\})$, qui est par conséquent une sous-variété de dimension 2 (c'est-à-dire une surface) de $\mathbb{R}^3$.

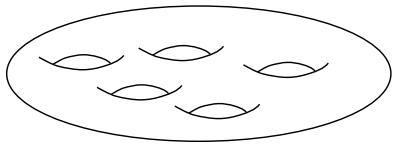
On peut essayer de représenter l'allure de $f^{-1}(\{0\})$. Pour $(x,y) \notin D$ ou $(x,y) \in \mathring{D}_1$, il n'y a aucune valeur de z pour laquelle $f(x,y,z) = 0$. Pour $(x,y) \in D \setminus \mathring{D}_1$, il y a deux telles valeurs, de signes opposés. Ces valeurs viennent se confondre pour $(x,y) \in \partial D \cup \partial \mathring{D}_1$. d'où le dessin suivant :



- *(Surface de genre g)* On fixe $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$, et pour tout $i = 1, \ldots, g$, $D_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 \leqslant r_i^2\}$, où les (x_i, y_i) sont des points distincts dans $\mathring{D}$ et les $r_i > 0$ sont suffisamment petits pour que les D_i soient inclus dans $\mathring{D}$ et 2 à 2 disjoints. Alors, comme précédemment, on peut vérifier que 0 est une valeur régulière de l'application f donnée par

$$f(x,y,z) = (R^2 - (x^2+y^2)) \prod_{i=1}^{g} \left((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 - r_i^2\right) \, - \, z^2.$$

Par conséquent, $f^{-1}(\{0\})$ est sous-variété. On peut la représenter comme ci-dessous.



◀

Démonstration.

$(a) \implies (b)$. Supposons (a) vérifiée et qu'il existe donc une forme normale $h : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ telle que $h(M \cap U) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap V$. Écrivons h avec ses composantes : $h = (h_1, \ldots, h_n)$ et posons $f = (h_{k+1}, \ldots, h_n) : U \to \mathbb{R}^{n-k}$.

Alors, comme h est un difféomorphisme, Dh_a est inversible donc Df_a est surjective. L'application f est donc bien une submersion en a. De plus, pour tout $x \in U$, $f(x) = 0$ si et seulement si $h(x) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in M \cap U$.

$(b) \implies (c)$. On suppose (b), c'est-à-dire que M est localement donnée par une équation $f(x) = 0$. On pose $E_1 = \ker Df_a$ et on fixe un supplémentaire E_2 de E_1 dans E. Alors $Df_a|_{E_2}$ est un isomorphisme $E_2 \to \mathbb{R}^{n-k}$. On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites et en déduire que $f^{-1}(\{0\})$, et donc M, est localement un graphe.

$(c) \implies (d)$. On suppose que M est localement le graphe d'une application $g : U_1 \subset E_1 \to E_2$ verifiant $g(a_1) = a_2$. On pose $\phi : U_1 \subset E_1 \to E_1 \times E_2$, $x \mapsto (x, g(x))$. La différentielle en a_1 de ϕ est donnée par $D\phi_{a_1}(v) = (v, Dg_{a_1}(v))$. C'est donc bien une immersion en a_1.

De plus, ϕ est un homéomorphisme sur son image, puisque il admet comme réciproque la restriction à cette image de $(x, y) \mapsto x$ qui est continue. Quitte à composer par une translation, on peut supposer que $a_1 = 0$, de sorte que l'application ϕ vérifie bien les conditions de (d).

$(d) \implies (a)$. Soit $\phi : W \to E$ une immersion en $0 \in W$ telle que ϕ soit un homéomorphisme de W sur un ouvert de $\Omega \cap M$ de M (avec Ω ouvert de E).

D'après le théorème 1.13 (forme normale des immersions), il existe $h : U' \xrightarrow{\sim} V'$ difféomorphisme avec $\phi(0) \in U' \subset \Omega$ et $V' \subset \mathbb{R}^n$, tel que $h \circ \phi(x) = (x, 0)$ pour tout x dans un voisinage ouvert W' de 0 dans W.

Alors $h \circ \phi(W') = W' \times \{0\} = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ avec $V = W' \times \mathbb{R}^{n-k}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, et comme ϕ induit un homéomorphisme sur son image, $\phi(W')$ est un ouvert (d'un ouvert) de M, donc de la forme $U \cap M$ avec U ouvert de E. On a donc bien $h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. $\square$

IV Espace tangent à une sous-variété

Soit M une sous-variété d'un espace normé E et $a \in M$.

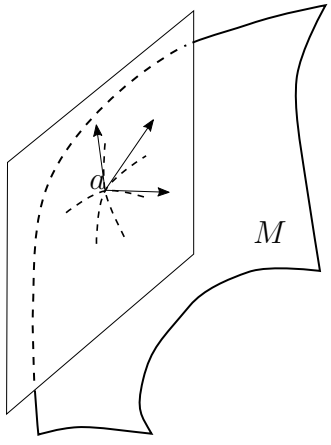
Définition 1.20 (Espace tangent)**.** *Un vecteur $v \in E$ est dit* tangent *à M en un point $a \in M$ s'il existe un chemin lisse, défini au voisinage de* 0

$$c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to E,$$

tel que $\mathrm{Im}(c) \subset M$, $c(0) \in a$ *et* $c'(0) = v$.

On note T_aM et on appelle espace tangent *à M en a, l'ensemble des vecteurs tangents à M en a.*

Autrement dit, l'espace tangent à M en a est l'ensemble des vecteurs vitesses en a de tous les chemins sur M passant par a.



Proposition 1.21. *L'espace tangent T_aM est un sous-espace vectoriel de E, de même dimension que M.*

(c'est la direction (vectorielle, contenant 0) du sous-espace *affine* (contenant a) représenté sur la figure).

Démonstration. Soit $h : U \xrightarrow{\sim} V$ une forme normale en a, qui vérifie donc

$$h(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}),\ h(a) = 0.$$

La proposition 1.21 est une conséquence directe de l'identité :

$$\boxed{T_aM = (Dh_a)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})} \tag{1.3}$$

Montrons d'abord l'inclusion $T_aM \subset (Dh_a)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Soient donc $v \in T_aM$ et $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to E$ un chemin sur M vérifiant $c(0) = a$ et $c'(0) = v$. Alors $h \circ c$ est un chemin sur $\mathbb{R}^k \times \{0\}$, donc $(h \circ c)'(0)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^k \times \{0\}$. Or

$$(h \circ c)'(0) = Dh_{c(0)}(c'(0)) = Dh_a(v).$$

On en déduit $Dh_a(v) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$ et donc $v \in (Dh_a)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$.

Passons à l'inclusion réciproque. Soit $v \in (Dh_a)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Il nous faut exhiber un chemin sur M dont le vecteur vitesse au point a soit v. Pour cela, on pose $w = Dh_a(v) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$ et $c(t) = h^{-1}(tw) \in h^{-1}(V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ pour t assez petit. Ceci définit bien un chemin lisse sur M, il vérifie $c(0) = h^{-1}(0) = a$ et $c'(0) = Dh_0^{-1}(w) = v$. On a donc $v \in T_aM$ et l'inclusion réciproque est prouvée. □

Chacune des quatre définitions de sous-variété donne une nouvelle description de l'espace tangent. Nous avons déjà vu dans la démonstration précédente que l'espace tangent peut être obtenu d'une forme normale avec la formule (1.3).

Proposition 1.22. *En reprenant les notations de la proposition 1.15 :*

(b) Si M est donnée au voisinage de a par une équation $f = 0$ (avec f submersion en a), alors

$$\boxed{T_aM = \ker Df_a}$$

(c) Si M est localement le graphe d'une application $g : U_1 \subset E_1 \to E_2$, alors

$$\boxed{T_aM = \text{graphe}(Dg_{a_1})} \ = \{(v, Dg_{a_1}(v)) \in E_1 \times E_2 \,|\, v \in E_1\}.$$

(d) Si M est localement l'image d'un plongement $\phi : W \to E$, alors

$$\boxed{T_aM = \operatorname{Im} D\phi_a}$$

Démonstration.

(b) Soit c un chemin sur M vérifiant $c(0) = a$ et $c'(0) = v$. Alors $f(c(t)) = 0$, pour tout t dans un voisinage de 0, donc $0 = (f \circ c)'(0) = df_a(v)$. Ceci montre que $T_aM \subset \ker Df_a$. Par ailleurs, comme Df_a est surjective, $\ker Df_a$ a la même dimension que T_aM. On en déduit l'égalité $T_aM = \ker Df_a$.

(c) Un vecteur de graphe(Dg_{a_1}) est un vecteur de la forme $(v, Dg_{a_1}(v))$ avec $v \in E_1$. Soit donc $v \in E_1$ un tel vecteur. On pose $c(t) = (a_1 + tv, g(a_1 + tv))$. Alors c est un chemin sur M vérifiant $c(0) = a$ et $c'(0) = (v, Dg_{a_1}(v))$. Ceci montre que graphe$(Dg_{a_1}) \subset T_aM$. Comme précédemment, ces deux espaces ont même dimension, d'où graphe$(Dg_{a_1}) = T_aM$.

(d) Pour tout $v \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$, on considère le chemin sur M donné par $c(t) = \phi(tv)$. Alors $c(0) = a$ et $c'(0) = D\phi_0(v)$. On en déduit l'inclusion $\operatorname{Im} D\phi_0 \subset T_aM$, et l'on conclut à nouveau avec l'égalité des dimensions.

□

Exemple 1.23. Calculons l'espace tangent à la sphère. D'après la proposition qui précède, point (b), l'espace tangent en x à $\mathbb{S}^n$ est le noyau de la forme linéaire $v \mapsto \langle x, v\rangle$. D'où :

$$\boxed{T_x\mathbb{S}^n = x^\perp}$$

◀

Exercice 5. *Soit M une sous-variété de dimension k de $\mathbb{R}^n$. Montrer que*

$$\{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \,|\, x \in M,\ v \in T_xM\}$$

forme une sous-variété de dimension $2k$ de $\mathbb{R}^n$. On l'appelle le « fibré tangent » de M (voir chapitre 3).

Chapitre 2

Variétés différentiables

Parenthèse : espaces topologiques

Dans cette parenthèse, nous introduisons (ou « rappelons » selon les cas) la notion de topologie sur un ensemble et donnons quelques exemples importants.

Définition 2.1 (Topologie)**.** *Une topologie $\mathcal{T}$ sur un ensemble X est un ensemble de parties de X vérifiant :*

(i) *$\emptyset$ appartient à $\mathcal{T}$,*

(ii) *X appartient à $\mathcal{T}$,*

(iii) *Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{T}$, alors leur réunion $\bigcup_{i\in I} U_i$ appartient à $\mathcal{T}$,*

(iv) *Si $(U_i)_{i=1,\dots,k}$ est une famille **finie** d'éléments de $\mathcal{T}$, alors l'intersection $\bigcap_{i=1}^{k} U_i$ appartient à $\mathcal{T}$.*

Les éléments d'une topologie $\mathcal{T}$ sont appelés ouverts *pour la topologie $\mathcal{T}$. Leurs complémentaires sont appelés fermés.*

Exemples 2.2. (a) Si (X, d) est un espace métrique, alors

$$\mathcal{T} = \{U \subset X \,|\, U \text{ est une réunion de boules ouvertes}\}$$

est une topologie sur X. On l'appelle *topologie induite* par la distance d.

(b) Soit X un ensemble quelconque. Alors

$$\mathcal{T} = \{U \subset X \,|\, X \setminus U \text{ est fini}\} \cup \{\emptyset\}$$

forme une topologie sur X. Dans le cas où $X = \mathbb{R}$, cette topologie s'appelle la *topologie de Zariski*[1]. Dans ce cas, on peut montrer qu'elle n'est pas induite par une distance.

(c) Si A est une partie d'un espace X muni d'une topologie $\mathcal{T}$, alors

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A \,|\, U \in \mathcal{T}\}$$

forme une topologie sur A. On l'appelle la *topologie induite* par $\mathcal{T}$ sur A.

◀

1. En général, la topologie de Zariski sur $\mathbb{K}^d$, où $\mathbb{K}$ est un corps, est la topologie dont les ouverts sont les complémentaires des parties de la forme $P^{-1}(0)$, avec P un polynôme sur $\mathbb{K}$ à d indéterminées.

Sauf mention du contraire, on munira toujours les parties d'un espace topologique de leur topologie induite.

REMARQUE 2.3. Si X est un espace muni de deux distances équivalentes, alors celles-ci induisent la même topologie. En particulier, sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Donc, un espace vectoriel de dimension finie admet une topologie canonique [2], donnée par la topologie induite par n'importe laquelle de ses normes. ◀

Définition 2.4 (Base d'un espace topologique)**.** *Une base d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ telle que pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de M, et tout $x \in \mathcal{O}$, il existe un indice $i \in I$ tel que $U_i \subset \mathcal{O}$.*

Nous avons déjà rencontré l'exemple suivant.

Exemple 2.5. Dans un espace métrique, les boules ouvertes forment une base de la topologie sous-jacente. On peut remarquer que les boules ouvertes de rayon rationnel forment aussi une base. Dans $\mathbb{R}^n$, les boules ouvertes de rayon rationnel et de centre à coordonnées rationnelles forment une base *dénombrable*.

Notons que dans un espace admettant une base dénombrable, toute partie munie de la topologie induite admet aussi une base dénombrable. ◀

La continuité peut être définie sur les espaces topologiques (nul besoin de distance).

Définition 2.6 (Fonction continue)**.** *Soient $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. Une application $f : X \to X'$ est dite* continue *si et seulement si*

$$\forall U \in \mathcal{T}',\ f^{-1}(U) \in \mathcal{T},$$

autrement dit, l'image réciproque par f de tout ouvert est ouverte.

Un *homéomorphisme* est par définition une application continue, bijective à réciproque continue. En particulier, dans la définition des "plongements", que nous avons vue après la définition des sous-variétés, lorsque l'on dit que $\phi : W \to E$ induit un homéomorphisme sur son image, cela signifie que ϕ induit un homéomorphisme entre W et $\phi(W)$, où $\phi(W)$ est muni de la topologie induite par celle de E.

Terminons cette parenthèse par une définition supplémentaire.

Définition 2.7 (Espace séparé)**.** *Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit* séparé *si et seulement si pour tous $x, y \in X$ distincts, il existe des ouverts $U, V \in \mathcal{T}$, tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.*

REMARQUE 2.8. Sur un espace métrique (X, d), la topologie induite par d est toujours séparée. En effet, si $x \neq y \in X$, on peut poser $\varepsilon = \frac{1}{2}d(x, y)$. Les ouverts $U = B(x, \varepsilon)$ et $V = B(y, \varepsilon)$ conviennent. En effet, ils vérifient $x \in U$, $y \in V$ et l'inégalité triangulaire implique $U \cap V = \emptyset$.

On peut aussi remarquer que la topologie de Zariski sur $\mathbb{R}$ n'est pas séparée (car deux ouverts non vides se rencontrent toujours), ce qui implique, comme nous l'avions affirmé, qu'elle n'est pas induite par une distance. ◀

2. Le mot « canonique » signifie en général « qui ne dépend d'aucun choix ».

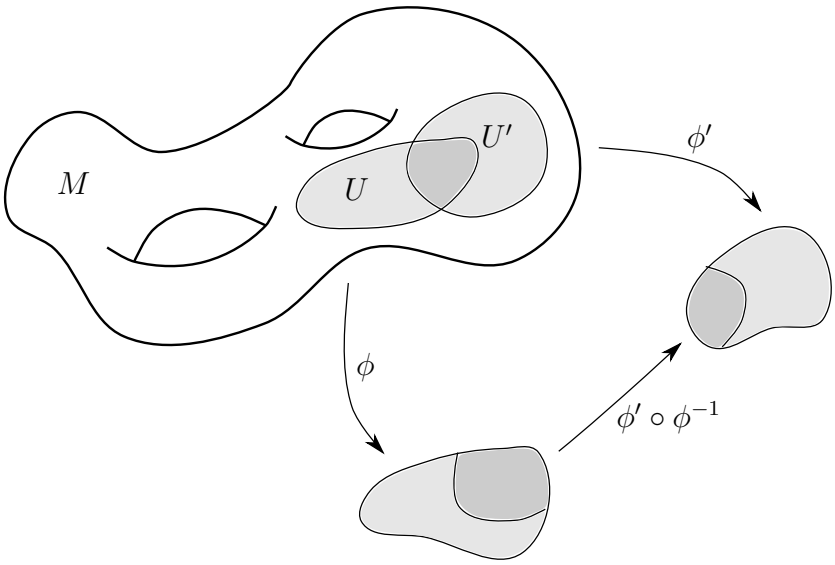
I Notion de variété différentiable

Fixons un espace topologique M et un entier $n \geqslant 0$.

Définition 2.9 (Cartes)**.** *Une* carte *de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est un couple (U, ϕ) où U est un ouvert de M et ϕ est un homéomorphisme entre U et un ouvert V de $\mathbb{R}^n$.*

L'ouvert U s'appelle le domaine *de la carte. Si $x \in U$, on parle de* carte en x *; si en outre $\phi(x) = 0$, on parle de* carte centrée en x*.*

Deux cartes (U, ϕ) et (U', ϕ') sont dites compatibles si l'application $\phi' \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap U') \to \phi'(U \cap U')$ (que l'on appelle changement de carte*) est un difféomorphisme.*



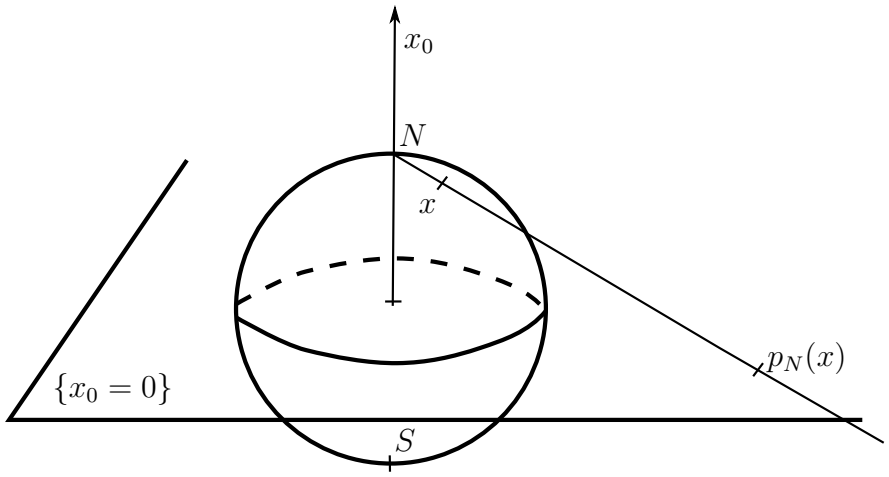
Notons qu'un changement de carte est toujours un homéomorphisme (mais pas toujours un difféomorphisme). Notons aussi que l'inverse d'un changement de carte est aussi un changement de carte. Remarquons enfin qu'un changement de carte est une application entre un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et un autre ouvert de $\mathbb{R}^n$ et cela a donc bien un sens de déclarer qu'une telle application est lisse.

L'exemple suivant est standard donc important.

Exemple 2.10. (Projections stéréographiques de la sphère) On note $\mathbb{S}^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ la sphère euclidienne standard de $\mathbb{R}^{n+1}$. On note $N = (1, 0, \ldots, 0)$ son pôle nord et $S = (-1, 0 \ldots, 0)$ son pôle sud.

La *projection stéréographique* par rapport à N est l'application p_N qui à un point $x \in \mathbb{S}^n \backslash \{N\}$ associe le point d'intersection de la droite passant par N et x avec l'hyperplan équatorial $x_0 = 0$.

On définit de même la projection stéréographique par rapport à S comme l'application p_S qui à un point $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ associe le point d'intersection de la droite passant par S et x avec l'hyperplan équatorial $x_0 = 0$.



Les projections stéréographiques prennent leurs valeurs dans l'hyperplan $\{(0, x_1, \ldots, x_n)\}$ que l'on identifiera tout simplement à $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n)\}$. On obtient ainsi des bijections $p_N : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ et $p_S : \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n$.

Nous allons donner des formules explicites. Les points N, x et $p_N(x)$ étant alignés, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{Np_N(x)} = t\overrightarrow{Nx}$. En prenant la première coordonnée de cette identité vectorielle, on obtient $-1 = t(x_0 - 1)$ donc $t = \frac{1}{1-x_0}$. En prenant les autres coordonnées, on obtient :

$$\boxed{p_N(x) = \left(\frac{x_1}{1-x_0}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_0}\right)} \tag{2.1}$$

On en déduit que p_N est continue. Calculons maintenant sa réciproque.

Soit $y \in \mathbb{R}^n$ et cherchons les coordonnées du point x tel que $p_N(x) = y$. En partant comme au dessus de $\overrightarrow{Ny} = t\overrightarrow{Nx}$, on a $x = N + \frac{1}{t}\overrightarrow{Ny}$ et donc

$$x = \left(1 - \tfrac{1}{t}, \tfrac{y_1}{t}, \ldots, \tfrac{y_n}{t}\right).$$

On peut ensuite déduire la valeur de t du fait que $\|x\|^2 = 1$ d'où l'on tire $\frac{1}{t^2}((t-1)^2 + y_1^2 + \cdots + y_n^2) = 1$, ce qui implique $t = \frac{1}{2}(1 + \|y\|^2)$ et $1 - \frac{1}{t} = \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1}$. On obtient donc :

$$\boxed{p_N^{-1}(y) = \tfrac{1}{\|y\|^2+1}\left(\|y\|^2-1, 2y_1, \ldots, 2y_n\right)}$$

Par conséquent, la réciproque de p_N est également continue et p_N est un homéomorphisme. Autrement dit, $(\mathbb{S}^n \setminus \{N\}, p_N)$ est une carte de la sphère.

Des calculs analogues donnent les formules

$$\begin{aligned} p_S(x) &= \left(\frac{x_1}{1+x_0}, \ldots, \frac{x_n}{1+x_0}\right), \\ p_S^{-1}(y) &= \tfrac{1}{\|y\|^2+1}\left(1-\|y\|^2, 2y_1, \ldots, 2y_n\right). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Le couple $(\mathbb{S}^n \setminus \{S\}, p_S)$ est donc aussi une carte de $\mathbb{S}^n$. Calculons les changements de cartes :

$$\begin{aligned} p_S \circ p_N^{-1}(y) &= p_S\left(\tfrac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1}, \tfrac{2y_1}{\|y\|^2+1}, \ldots, \tfrac{2y_n}{\|y\|^2+1}\right) \\ &= \left(\tfrac{y_1}{\|y\|^2}, \ldots, \tfrac{y_1}{\|y\|^2}\right) \end{aligned}$$

Pour obtenir la deuxième égalité ci-dessus, on a utilisé l'identité $\frac{1}{1+\frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1}} = \frac{\|y\|^2+1}{2\|y\|^2}$.

En conclusion, nous avons :

$$\boxed{p_S \circ p_N^{-1}(y) = \frac{1}{\|y\|^2} y} \tag{2.3}$$

On voit dans cette formule que $p_N \circ p_S^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est une involution [3], c'est-à-dire qu'elle est égale à sa propre réciproque. On voit aussi que les deux changements de cartes $p_N \circ p_S^{-1}$ et $p_S \circ p_N^{-1}$ sont lisses (et d'inverses lisses).

Nous avons donc montré que ces deux cartes sont compatibles. ◀

Définition 2.11 (Atlas)**.** *Un* atlas *(différentiable) est un ensemble de cartes deux à deux compatibles et dont les domaines recouvrent M.*

Nous avons montré dans l'exemple précédent que les projections stéréographiques forment un atlas de $\mathbb{S}^n$.

Lemme 2.12. *Tout atlas est contenu dans un unique atlas maximal (pour l'inclusion).*

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ un atlas. On considère l'ensemble $\mathcal{A}'$ des cartes qui sont compatibles avec toutes les cartes de $\mathcal{A}$. En particulier $\mathcal{A}'$ contient $\mathcal{A}$, ce qui implique que les domaines des éléments de $\mathcal{A}'$ recouvrent M.

Pour vérifier que $\mathcal{A}'$ est un atlas, il nous reste à montrer que deux éléments de $\mathcal{A}'$ sont toujours compatibles.

Soient (U, ϕ) et (U', ϕ') deux cartes de $\mathcal{A}'$ et soit $y \in \phi(U \cap U')$. Nous allons montrer que $\phi' \circ \phi^{-1}$ est lisse en y. Comme nous l'aurons montré pour tout y, ceci achèvera de montrer que $\mathcal{A}'$ est un atlas.

Soient $x = \phi^{-1}(y)$ et (U'', ϕ'') une carte en x appartenant à l'atlas $\mathcal{A}$. Comme les cartes de $\mathcal{A}'$ sont compatibles avec celles de $\mathcal{A}$, $\phi'' \circ \phi^{-1}$ est lisse en y et $\phi' \circ \phi''^{-1}$ est lisse en $\phi''(x) = \phi'' \circ \phi^{-1}(y)$. Par conséquent, leur composée

$$\phi' \circ \phi^{-1} = \phi' \circ \phi''^{-1} \circ \phi'' \circ \phi^{-1}$$

est lisse en y, comme nous le souhaitions.

Remarquons que tout atlas de M contenant $\mathcal{A}$ est inclus dans $\mathcal{A}'$ (par définition toutes ses cartes sont compatibles avec $\mathcal{A}$). Ceci montre que $\mathcal{A}'$ est maximal parmi les atlas contenant $\mathcal{A}$ et est même l'unique atlas maximal contenant $\mathcal{A}$. □

Nous sommes enfin prêts pour introduire les variétés différentiables.

Définition 2.13 (Variété différentiable)**.** *Une variété* différentiable *(ou* différentielle*) de dimension n est un espace topologique séparé, à base dénombrable, muni d'un atlas maximal de cartes à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.*

Notons que si un espace séparé et à base dénombrable admet un atlas, alors il admet une structure de variété différentiable donnée par l'atlas maximal correspondant.

C'est le cas de tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$, qui possède un atlas formé d'une seule carte (U, id_U), évidemment compatible avec elle-même. Sauf mention contraire, on supposera toujours un tel

3. Cette involution porte même un nom : c'est l'*inversion* par rapport à la sphère $\mathbb{S}^n$.

ouvert muni de la structure différentiable (canonique) correspondante (ce n'est pas la seule ! Par exemple, sur $\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, x \mapsto x^3)$ définit un autre atlas, dont l'unique carte n'est pas compatible avec $(\mathbb{R}, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})$, et qui appartient donc à un atlas maximal différent de celui définissant la structure différentiable canonique sur $\mathbb{R}$).

Notons que si M est une variété différentiable, pour tout ouvert U de M, la restriction des cartes de M à U forme un atlas de U, que l'on supposera implicitement muni de la structure correspondante.

Le travail précédent montre que $\mathbb{S}^n$ admet également un atlas, donc une structure de variété différentiable. Plus généralement,

Proposition 2.14. *Une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ (munie de la topologie induite) admet une structure naturelle de variété différentiable, dont un atlas est donné par toutes les applications de la forme $h|_{U\cap M}$ où $h : U \to V$ est une forme normale pour M, c'est-à-dire vérifie $h(U\cap M) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$.*

Démonstration. Commençons par remarquer qu'une sous-variété est séparée et à base dénombrable puisque c'est une partie de $\mathbb{R}^n$, lui-même séparé et à base dénombrable.

Par définition des sous-variétés, les domaines des applications de la forme $h|_{U\cap M}$ avec $h : U \to V$ forme normale, recouvrent M. Ce sont aussi des homéomorphismes $U \cap M \xrightarrow{\sim} V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. Il nous reste à montrer que ces cartes sont compatibles pour montrer qu'elles constituent un atlas.

Soient donc $\phi = h|_{U\cap M}$ et $\phi' = h'|_{U'\cap M}$ deux telles cartes. Alors on a

$$\phi' \circ \phi^{-1} = h' \circ h^{-1}|_{\mathbb{R}^k\times\{0\}},$$

qui est bien une application lisse. □

II Applications lisses entre variétés

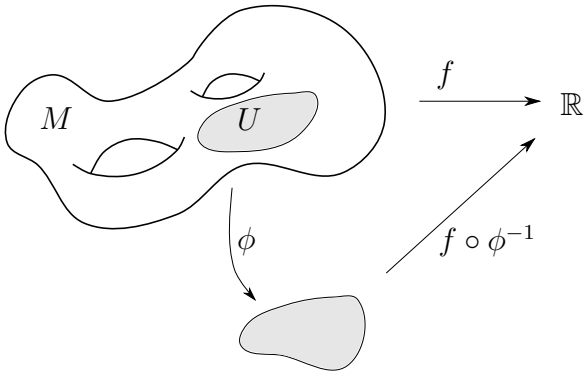
Dans cette partie, nous allons commencer à voir apparaître le principe général suivant :

Principe 2.15. *Toutes les propriétés **locales** du calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$ peuvent être transférées aux variétés différentiables au moyen des cartes.*

Illustrons ce principe sur la notion de lissité, qui est bien sûr locale.

On fixe une variété différentiable M, et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 2.16 (Fonction lisse sur une variété)**.** *L'application f est dite* lisse *si et seulement si pour toute carte (U, ϕ), $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ est lisse (au sens classique) ; on dit que « f est lisse dans toute carte ».*



REMARQUE 2.17. Si (U, ϕ) et (U', ϕ') sont deux cartes (compatibles), alors $f \circ \phi^{-1}$ est lisse sur $\phi(U \cap U')$ si et seulement si $f \circ \phi'^{-1}$ est lisse sur $\phi'(U \cap U')$.

On en déduit que f est lisse si et seulement si pour tout $x \in M$, *il existe* une carte (U, ϕ) en x telle que $f \circ \phi^{-1}$ soit lisse. ◀

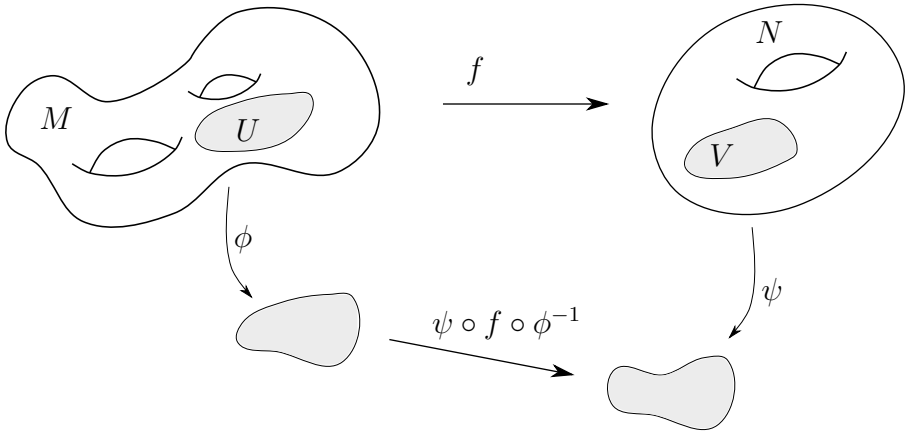
Proposition 2.18. *L'ensemble $C^\infty(M)$ des fonctions lisses sur M forme une sous-algèbre de l'ensemble des fonctions continues sur M.*

On peut généraliser la définition précédente.

Définition 2.19 (Application lisse entre variétés)**.** *Soient M, N deux variétés et $f : M \to N$ une application. On dira que f est lisse si pour toutes cartes (U, ϕ) de M et (V, ψ) de N, $\phi(U \cap f^{-1}(V))$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{\dim(M)}$ et l'application*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \to \psi(V)$$

est lisse (ce qui précède se résume en « f lue dans les cartes (U, ϕ), (V, ψ) est lisse »).



Propriétés 2.20. *(i) Si $f : M \to N$ est lisse, alors elle est continue.*

(ii) Pour que $f : M \to N$ soit lisse, il faut et il suffit que pour tout $a \in M$, il existe une carte (U, ϕ) en a et une carte (V, ψ) en $f(a)$ telle que f lue dans les cartes (U, ϕ), (V, ψ) soit lisse.

(iii) Si $f : M \to N$ est lisse et si $g : N \to P$ est lisse alors $g \circ f$ est lisse.

Démonstration. (i) Soit a un point de M. On cherche à montrer que f est continue en a. On se donne donc une carte (U, ϕ) en a et une carte (V, ψ) en $f(a)$. Par hypothèse, $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est lisse au voisinage de a. Elle est donc continue au voisinage de a. Comme ϕ et ψ sont des homéomorphismes, on en déduit que f est continue au voisinage de a.

(ii) Le caractère nécessaire est immédiat (car les domaines de cartes d'un atlas recouvrent la variété). Pour le caractère suffisant, notons que, d'après ce qui précède, la propriété « pour tout a, il existe... » de l'énoncé (ii) implique la continuité de f. Soient (U', ϕ') et (V', ψ') des cartes de M et N respectivement. Alors $W' = U' \cap f^{-1}(V')$ est un ouvert de M (comme intersection finie de tels ouverts, en utilisant la continuité de f). Reste à montrer que $\psi' \circ f \circ (\phi')^{-1}$ est lisse sur $\phi'(W')$. Si $b \in \phi'(W')$, notons $a = (\phi')^{-1}(b)$, qui appartient à W'. Par hypothèse, il existe une carte (U, ϕ) en a et une carte (V, ψ) en $f(a)$ telles que $W = U \cap f^{-1}(V)$ soit un ouvert de M et que $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(W) \to \psi(V)$ soit lisse. Alors, sur $\phi'(W \cap W')$ (qui est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, si n est la dimension de M, comme image par un homéomorphisme d'un ouvert de M),

$$\psi' \circ f \circ (\phi')^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ (\phi')^{-1}),$$

où $\phi \circ (\phi')^{-1}$ est lisse de $\phi'(W \cap W')$ vers $\phi(W \cap W')$ en tant que changement de carte d'un même atlas, $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est lisse sur $\phi(W \cap W')$ (comme restriction à cet ouvert d'une application lisse sur $\phi(W)$) à valeur dans $\psi(f(W \cap W')) \subset \psi(V \cap V')$ (car $f(W) \subset V$ et $f(W') \subset V'$ par définition de W et W') et $\psi' \circ \psi^{-1}$ est lisse sur $\psi(V \cap V')$ comme changement de carte d'un même atlas. L'application $\psi' \circ f \circ (\phi')^{-1}$ est donc lisse du voisinage $\phi'(W \cap W')$ de b vers $\psi(V \cap V')$ comme composée d'applications lisses entre ouverts d'e.v.n. Cette application est donc lisse au voisinage de tout point de $\phi'(W')$, donc lisse sur cet ouvert, ce qui conclut la preuve du point (ii).

(iii) Soit $a \in M$, (U, ϕ) une carte en a, (V, ψ) une carte en $f(a)$ et (W, χ) une carte en $(g \circ f)(a)$. Par hypothèse, $\chi \circ g \circ \psi^{-1}$ est définie et lisse sur un voisinage ouvert $V' \subset \psi(V \cap g^{-1}(W))$ de $\psi(f(a))$, et $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est définie et lisse sur un voisinage ouvert $U' \subset \phi(U \cap f^{-1}(V))$ de $\phi(a)$ *que l'on peut éventuellement réduire pour que son image par* $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ *soit incluse dans l'ouvert* V' (ceci utilise la continuité de $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ en $\phi(a)$). Sur le voisinage ouvert U' de $\phi(a)$,

$$\chi \circ (g \circ f) \circ \phi^{-1} = (\chi \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1})$$

(chaque terme a bien un sens suite aux précautions prises) est donc lisse comme composée de deux applications lisses entre ouverts d'e.v.n., ce qui montre que $g \circ f$ lue dans les cartes $(U', \phi_{|U'})$, (W, χ) (en a et $(g \circ f)(a)$ respectivement) est lisse et on conclut grâce à l'équivalence du point (ii). □

Morale : quand on veut tout écrire précisément, c'est assez lourd... Mais il faut le faire une fois pour pouvoir ensuite s'en passer la conscience tranquille.

Définition 2.21 (Difféomorphismes)**.** *Un difféomorphisme entre deux variétés est une application entre ces variétés, lisse, bijective et dont la réciproque est lisse.*

L'exercice suivant est une remarque bien utile :

Exercice 6. *Soit $(M, \mathcal{A})$ une variété différentiable (ici, M désigne un espace topologique et $\mathcal{A}$ un atlas maximal sur M le munissant de sa structure différentiable). Une carte (U, ϕ)* quelconque *de M appartient à $\mathcal{A}$ si et seulement si ϕ est un difféomorphisme de $U \subset M$ (muni de la structure différentiable définie par $\mathcal{A}$) vers $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ (muni de sa structure différentiable canonique).*

(dans cet exercice, la situation est subtile mais, dorénavant, en présence d'une variété différentiable M, par « carte de M », on voudra toujours dire « carte de l'atlas définissant la structure différentiable de M considérée »).

Solution. ($\Rightarrow$) Soit (U,ϕ) une carte de $\mathcal{A}$. Par définition d'une carte, ϕ est bijective de U dans $\phi(U)$. Par la propriété 2.20.(i), pour montrer que ϕ est lisse, il suffit de trouver, pour tout $a \in U$, une carte (U',ϕ') de $\mathcal{A}$ en a et une carte (V,ψ) de $\mathbb{R}^n$ (muni de sa structure standard) en $\phi(a)$ telles que $\psi \circ \phi \circ (\phi')^{-1}$ soit lisse de $\phi'(U' \cap \phi^{-1}(V))$ (qui doit être ouvert) dans $\psi(V)$. Les choix $(U',\phi') = (U,\phi)$ et $(V,\psi) = (\phi(U), \mathrm{Id})$ conviennent puisqu'ils donnent $\psi \circ \phi \circ (\phi')^{-1} = \mathrm{Id}$ sur $\phi'(U' \cap \phi^{-1}(V)) = \phi(U)$! On est en train de dire ici que $\phi : U \to \phi(U)$ lu dans la carte (U,ϕ) est... l'identité de $\phi(U)$. L'application $\phi : U \to \phi(U)$ est donc lisse. De la même façon, ϕ^{-1} lue dans les cartes $(\phi(U), \mathrm{Id})$, (U,ϕ) est l'identité de $\phi(U)$, qui est lisse, donc ϕ^{-1} est lisse. Par définition, ϕ est donc bien un difféomorphisme de U dans $\phi(U)$ au sens des difféomorphismes entre variétés.

($\Leftarrow$) Soit maintenant (U,ϕ) une carte de M n'appartenant pas nécessairement à l'atlas $\mathcal{A}$, mais telle que ϕ soit un difféomorphisme de $U \subset M$ (muni de la structure différentiable définie par $\mathcal{A}$) vers $\phi(U)$. Il s'agit de vérifier qu'alors (U,ϕ) est compatible avec toute carte de $\mathcal{A}$ (et donc appartient à $\mathcal{A}$ par maximalité). Soit donc (V,ψ) une carte de $\mathcal{A}$. Sur $\phi(U \cap V)$, $\psi \circ \phi^{-1}$ est la composée de ϕ^{-1}, difféomorphisme de $\phi(U \cap V)$ vers $U \cap V$ par hypothèse sur ϕ (et restriction), et de ψ, difféomorphisme de $U \cap V$ vers $\psi(U \cap V)$ d'après la preuve de l'implication précédente (et restriction à nouveau). Donc $\psi \circ \phi^{-1}$ est un difféomorphisme entre les ouverts $\phi(U \cap V)$ et $\psi(U \cap V)$ de $\mathbb{R}^n$, ce qui signifie précisément que (U,ϕ) et (V,ψ) sont compatibles. □

Notamment, si $\mathcal{A}$ est l'atlas maximal définissant la structure canonique sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{A}'$ l'atlas maximal contenant la carte $(\mathbb{R}, x \mapsto x^3)$, alors l'application $x \mapsto x^3$ est un difféomorphisme de $(\mathbb{R},\mathcal{A}')$ vers $(\mathbb{R},\mathcal{A})$. Mais attention, certains espaces topologiques possèdent des structures différentiables non difféomorphes (cf. les « sphères exotiques »).

Exemple 2.22. On verra dans le paragraphe suivant que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ possède une structure différentiable naturelle, et que la variété obtenue est difféomorphe à $\mathbb{S}^1$ (cf. TD). ◀

III Sous-variétés d'une variété

Définition 2.23 (Sous-variété)**.** *Soient N une variété de dimension n et $k \in \{0,\dots,n\}$. Une partie M de N est une sous-variété de dimension k de N si pour toute carte (U,ϕ) de N (ou de manière équivalente, si pour tout $a \in M$, il existe une carte (U,ϕ) de N en a telle que), $\phi(U \cap M)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension k.*

En composant les cartes avec des formes normales, on obtient facilement la proposition suivante.

Proposition 2.24. *Soit M une partie d'une variété N. Alors, M est une sous-variété de N de dimension k si et seulement si pour tout $a \in M$, il existe une carte (U,ϕ) telle que*

$$\phi(U \cap M) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

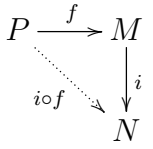
Soit M une sous-variété de dimension k de N. Alors, M munie de la topologie induite est séparée à base dénombrable. De plus, les couples $(U \cap M, \phi|_{U\cap M})$ avec (U,ϕ) carte de N telle que $\phi(U \cap M) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ forment un atlas. Ceci montre que M *hérite d'une structure de variété induite par celle de N.*

La proposition abstraite suivante est bien utile.

Proposition 2.25. *Soit $M \subset N$ une sous-variété et $i : M \to N$, $x \mapsto x$ l'injection canonique.*

(i) Si l'on munit M de sa structure de variété induite par celle de N, alors l'application i est lisse et est une immersion.

(ii) Pour toute variété P, une application $f : P \to M$ est lisse si et seulement si $i \circ f : P \to N$ est lisse.



(iii) La structure induite est l'unique structure différentiable sur M vérifiant la propriété (ii).

Démonstration. (*i*) Soit $a \in M$ et soit (U, ϕ) une forme normale de M en a au sens de la proposition 2.24. Par définition, $(U \cap M, \phi|_{U\cap M})$ est une carte de M en a. Lue dans ces cartes, l'application i n'est autre que l'injection canonique de $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^n$. Plus précisément, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\phi \circ i \circ (\phi|_{U\cap M})^{-1} : \phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}) &\to \phi(U),\\ (x, 0) &\mapsto (x, 0).\end{aligned}$$

En particulier, on voit que l'application i lue dans ces cartes est lisse et est une immersion.

(*ii*) Soit $a \in P$. On choisit une carte (V, ψ) de P en a et une forme normale (U, ϕ) de M en $f(a)$, qui est en particulier une carte de N en a et qui induit une carte $(U \cap M, \phi|_{U\cap M})$ de M en $f(a)$. L'application f lue dans les cartes correspondantes s'écrit $\phi|_{U\cap M} \circ f \circ \psi^{-1}$, tandis que l'application $i \circ f$ lue dans les cartes s'écrit $\phi \circ i \circ f \circ \psi^{-1}$. Notons que $\phi|_{U\cap M}$ et $\phi \circ i$ sont les mêmes applications à ceci près que leur espaces d'arrivée diffèrent ($\mathbb{R}^k \times \{0\}$ pour la première, $\mathbb{R}^n$ pour la seconde). Ceci implique que les deux applications lues dans les cartes sont identiques sauf leur espace d'arrivée. Or on sait qu'une application à valeur dans $\mathbb{R}^n$ est lisse si et seulement si ses applications coordonnées sont lisses. En particulier une application de la forme $(g, 0) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, est lisse si et seulement si g est lisse. Ceci montre que la lissité de $\phi|_{U\cap M} \circ f \circ \psi^{-1}$ est équivalente à celle de $\phi \circ i \circ f \circ \psi^{-1}$.

(*iii*) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux strutures différentiables sur M vérifiant (*ii*). Nous allons montrer que l'identité $f : (M, \mathcal{A}) \to (M, \mathcal{A}')$, $x \mapsto x$ est un difféomorphisme. Cela impliquera que les atlas $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont compatibles.

Tout d'abord, $f : (M, \mathcal{A}) \to (M, \mathcal{A})$ est évidemment lisse, donc $i \circ f : (M, \mathcal{A}) \to N$ est lisse, et d'après (*ii*), $f : (M, \mathcal{A}) \to (M, \mathcal{A}')$ est lisse. Le même argument montre que $f : (M, \mathcal{A}') \to (M, \mathcal{A})$ est lisse. □

Comme dans le chapitre 1, les sous-variétés apparaissent souvent comme images de *plongements* ou niveaux réguliers de fonctions (entre variétés cette fois-ci), ce qui nécessite de généraliser les notions correspondantes au cadre des variétés abstraites.

Définition 2.26 (Rang, immersion, submersion)**.** *Soit $f : M \to N$ une application entre variétés, et a un point de M.*

(i) Le rang de f en a est par définition le rang de $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ en $\phi(a)$, pour toutes cartes ϕ en a et ψ en $f(a)$.

(ii) On dit que f est une immersion en a si et seulement si $\operatorname{rang}_a f = \dim M$.

(iii) On dit que f est une submersion en a si et seulement si $\operatorname{rang}_a f = \dim N$.

Exercice 7. *Vérifier que le rang est ainsi bien défini, c'est à dire que le rang (au sens classique/calcul diff) de $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ en $\phi(a)$ ne dépend pas des cartes ϕ et ψ dans le point (i) ci-dessus.*

Exercice 8. *Vérifier que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto (t, t) \in \mathbb{R}^2$ induit une immersion (lisse) de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (il y a trois choses à vérifier, et chacune nécessite un argument :* induit*,* lisse *et* immersion*).*

Exercice 9. *Vérifier que l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x - y \in \mathbb{R}$ induit une submersion (lisse) de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. A quoi ressemblent les niveaux de cette submersion ?*

Proposition 2.27 (Forme normale des immersions/submersions)**.** *On suppose que M est une variété de dimension p et N une variété de dimension q et on considère $f : M \to N$ une application lisse. Soit $a \in M$.*

(a) Si f est une immersion en a, alors pour toute carte ϕ centrée en a, il existe une carte ψ centrée en $f(a)$, telle que pour tout $(x_1, \ldots, x_p)$ dans un voisinage de 0, on ait

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0).$$

(b) Si f est une submersion en a, alors pour toute carte ψ centrée en $f(a)$ il existe une carte ϕ centrée en a, telle que pour tout $(x_1, \ldots, x_p)$ dans un voisinage de 0 on ait

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_q).$$

Exercice 10. *Vérifier que cette proposition implique le théorème d'inversion locale suivant pour les variétés : Si $f : M \to N$ est une application lisse entre variétés de même dimension et, pour un $a \in M$, $\operatorname{rang}_a f = \dim M = \dim N$ alors f est un difféomorphisme local (entre un voisinage de a et un voisinage de $f(a)$).*

Démontrer cet énoncé directement, à partir du théorème d'inversion locale "classique".

Exercice 11. *Démontrer la proposition.*

Définition 2.28 (Plongement)**.** *Une application $f : M \to N$ lisse est un plongement si et seulement si c'est une immersion qui induit un homéomorphisme sur son image.*

Remarque 2.29. Comme on l'a déjà vu, une immersion injective propre est un plongement. En particulier, si M est compacte, une immersion injective $M \to N$ est automatiquement un plongement. ◀

Exercice 12. *Montrer que pour tout $k \leqslant n$, l'application*

$$\mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n, \quad (x_0, \ldots, x_k) \mapsto (x_0, \ldots, x_k, 0 \ldots, 0)$$

est un plongement.

Proposition 2.30. *Soit $f : M \to N$ une application lisse entre variétés. Alors, f est un plongement si et seulement si $f(M)$ est une sous-variété de N et $f : M \to f(M)$ est un difféomorphisme (pour la structure différentiable induite).*

Par abus de langage, l'application $f : M \to f(M)$ sera souvent notée seulement f.

Démonstration. L'implication réciproque est facile. En effet, si f induit un difféomorphisme $M \to f(M)$, alors elle induit a fortiori un homéomorphisme. De plus, un difféomorphisme est en particulier une immersion (car c'est vrai dans les cartes), et sa composée avec l'injection canonique $f(M) \to N$, elle aussi une immersion, est encore une immersion.

Supposons maintenant que f est un plongement. Soit (U, ϕ) une carte de N. Alors, $\phi \circ f : f^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n$ est un plongement donc son image $\phi(U \cap f(M))$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ (en utilisant la définition (d) des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$). Cela montre que $f(M)$ est une sous-variété

de N. La lissité de $f : M \to f(M)$ est une conséquence du (ii) de la proposition qui précède. Il nous reste donc à prouver que $f^{-1} : f(M) \to M$ est lisse. Or, lue dans les cartes, f est une immersion d'un ouvert de $\mathbb{R}^k$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Vue comme une application à valeur dans $\mathbb{R}^k$, la différentielle de cette application est bijective. Le théorème d'inversion locale s'applique donc, et montre que l'inverse de f est lisse. □

Proposition 2.31. *Soient M et N deux variétés, $f : M \to N$ une application lisse et $a \in f(M)$. On suppose que f est une submersion sur $f^{-1}(a)$ (c'est-à-dire que a est une valeur régulière de f), alors $f^{-1}(a)$ est une sous-variété de M.*

Démonstration. Comme pour les démonstrations précédentes, on se ramène à l'énoncé analogue pour les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ en lisant dans les cartes [4]. □

Exercice 13. *Écrire cette preuve entièrement...*

IV Exemples et constructions

IV.1 Somme disjointe

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Leur *somme disjointe* est l'espace $\bigcup_{i\in I}\{i\} \times X_i$, que l'on note $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ muni de la topologie dont les ouverts sont les parties de la forme $\bigcup_{i\in I}\{i\} \times U_i$, où chaque U_i est un ouvert de X_i.

Remarquons au passage que dans le cas de $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}\times\mathbb{R}$ la topologie de somme disjointe diffère de la topologie usuelle.

On voit en particulier que chaque partie de la forme $\{j\} \times X_j$ pour $j \in I$ fixé, est un ouvert de $\bigsqcup_{i\in I} X_i$. En pratique, cette partie est identifiée à X_j.

Si chaque X_i est une variété et si I est fini ou dénombrable, alors $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ admet une structure de variété différentiable de dimension n.

En effet, on vérifie tout d'abord facilement que $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ est séparé et à base dénombrable. De plus, si l'on se donne un atlas $\mathcal{A}_i$ pour chacun des X_i, alors on peut vérifier que $\mathcal{A} = \{(\{i\} \times U, \phi) \,|\, i \in I, (U, \phi) \in \mathcal{A}_i\}$ forme un atlas de $\bigsqcup_{i\in I} X_i$.

La démonstration de la proposition suivante est laissée en exercice.

Proposition 2.32. *(i) Pour tout $j \in I$, l'application naturelle $X_j \to \bigsqcup_{i\in I} X_i$ est un plongement.*

(ii) Soient M une variété et $f : \bigsqcup_{i\in I} X_i \to M$ une application. Alors f est lisse si et seulement si pour tout $i \in I$, $f|_{X_i}$ est lisse.

IV.2 Produits de variétés

Soient M, M' deux variétés. Alors l'espace $M \times M'$ muni de la topologie produit (c'est-à-dire la topologie engendrée par les produits d'ouverts) est séparé et à base dénombrable. De plus, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont des atlas de M et M' respectivement, alors $M \times M'$ peut être muni de l'atlas

$$\{(U \times U', \phi \times \phi') \,|\, (U, \phi) \in \mathcal{A},\ (U', \phi') \in \mathcal{A}'\}$$

4. La géométrie différentielle prend parfois des accents de science occulte.

où $\phi \times \phi'$ désigne l'application $(x, y) \mapsto (\phi(x), \phi(y))$.

La démonstration de la proposition suivante est laissée en exercice.

Proposition 2.33. *(i) Les projections canoniques $p_1 : M \times M' \to M$ et $p_2 : M \times M' \to M'$ sont lisses.*

(ii) Une application $f : P \to M \times M'$ est lisse si et seulement si ses composantes $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ le sont.

Exercice 14. *Démontrer cette proposition.*

Exercice 15. *On identifie $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ à $\mathbb{R}^{p+q}$. Vérifier que la structure différentiable produit sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ (induite par les structures standards sur les deux composantes) coïncide avec la structure standard sur $\mathbb{R}^{p+q}$.*

On peut bien sûr faire des produits de plus de deux variétés. L'exemple suivant est important.

Exemple 2.34. On appelle *Tore* de dimension n le produit de n copies du cercle $\mathbb{S}^1$.

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1.$$

C'est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{2n} \simeq (\mathbb{R}^2)^n$. Nous verrons plus tard qu'il est aussi possible de le définir comme quotient de $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{Z}^n$. Dans le cas où $n = 2$, on peut démontrer que $\mathbb{T}^2$ est difféomorphe au « tore de révolution » de l'exemple 1.19. ◀

Parenthèse : topologie quotient

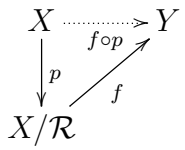
Une méthode très importante pour construire des espaces topologiques consiste à les obtenir par quotient.

Définition 2.35 (Espace topologique quotient)**.** *Soit X un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. L'espace* topologique quotient *est l'ensemble quotient $X/\mathcal{R}$ (des classes d'équivalences), muni de la topologie dont les ouverts sont les parties $U \subset X/\mathcal{R}$ telles que $p^{-1}(U)$ est ouvert, où $p : X \to X/\mathcal{R}$ désigne la projection canonique (qui envoie un élément sur sa classe d'équivalence).*

La topologie quotient a les propriétés suivantes :

Propriétés 2.36. *(i) La projection canonique $p : X \to X/\mathcal{R}$ est continue.*

(ii) Une application $f : X/\mathcal{R} \to Y$ est continue si et seulement si $f \circ p$ est continue.



En particulier, lorsqu'une application continue passe au quotient, l'application induite est continue.

Exercice 16. *Démontrer ces propriétés.*

Application 1 : recollement d'espaces topologiques

Soient X, Y deux espaces topologiques, $A \subset X$ et $B \subset Y$ et $\phi : A \to B$ un homéomorphisme. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur la somme disjointe $X \sqcup Y$ par la relation

$$x \mathcal{R} y \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} x = y, \\ \text{ou } x \in A, y \in B, y = \phi(x), \\ \text{ou } y \in A, x \in B, x = \phi(y). \end{cases}$$

Pour cette relation, les classes d'équivalence sont soit les singletons $\{x\}$ avec $x \notin A$ et $x \notin B$, soit les paires de points $\{x, \phi(x)\}$ avec $x \in A$.

L'espace quotient $(X \sqcup Y)/\mathcal{R}$, noté $X \cup_\phi Y$, s'appelle le recollement de X et Y selon A et B au moyen de ϕ. On peut définir des recollements sans l'hypothèse « ϕ homéomorphisme », mais avec cette hypothèse, on a la propriété agréable dont l'exercice 17 fait l'objet.

Exemple 2.37. Vue comme un espace topologique, la sphère $\mathbb{S}^n$ s'identifie au recollement de deux copies de la boule euclidienne fermée de rayon 1 selon leurs bords (identiques), au moyen de l'identité :

$$\mathbb{S}^n \simeq \overline{B(0,1)} \cup_{\mathrm{Id}_{S^{n-1}}} \overline{B(0,1)}.$$

◀

Exercice 17. *Si p désigne la projection canonique $X \sqcup Y \to (X \sqcup Y)/\mathcal{R} = X \cup_\phi Y$, vérifier que p induit un homéomorphisme de X et Y (vus comme sous-ensembles de $X \sqcup Y$) vers $p(X)$ et $p(Y)$ respectivement. Autrement dit, $X \cup_\phi Y$ contient des copies homéomorphes de X et Y.*

Solution. La restriction de p à X (comprendre : sa copie dans $X \sqcup Y$) est injective car un élément de X n'est identifié qu'à lui-même et, s'il appartient à A, à son image par ϕ, qui appartient à Y (comprendre : sa copie dans $X \sqcup Y$), qui est disjoint de X. Elle induit donc une bijection sur son image $p(X)$. Elle est continue comme restriction à X de p qui est continue par définition de la topologie quotient. Toute la subtilité est dans la preuve de la continuité de la réciproque, et c'est là que l'on va utiliser l'hypothèse sur ϕ.

(Faire des dessins !!) Soit U est un ouvert de X. Il s'agit de montrer que $p(U)$ est un ouvert de $p(X)$, c'est à dire de la forme $p(X) \cap V$ avec V ouvert de $X \cup_\phi Y$. Par définition de la topologie induite, $U \cap A$ est un ouvert de A, donc, puisque ϕ **est un homéomorphisme**, $\phi(U \cap A)$ est un ouvert de B, donc de la forme $U' \cap B$ où U' est un ouvert de Y. Posons $V = p(U) \cup p(U')$. Notons que

$$V \cap p(X) = (p(U) \cap p(X)) \cup (p(U') \cap p(X)) = p(U) \cup p(U' \cap B) = p(U) \cup p(U \cap A) = p(U).$$

Reste à vérifier que V est un ouvert de $X \cup_\phi Y$, ce qui équivaut à : $p^{-1}(V)$ est un ouvert de $X \sqcup Y$. Or

$$p^{-1}(V) = p^{-1}(p(U \cup U')) = U \cup \phi(U \cap A) \cup U' \cup \phi^{-1}(U' \cap B) = U \cup (U' \cap B) \cup U' \cup (U \cap A) = U \cup U'$$

qui est bien un ouvert de $X \sqcup Y$ par définition de la topologie de la somme disjointe. □

Remarque 2.38. Si A et B sont des ouverts de X et Y respectivement, $p(X)$ et $p(Y)$ sont des ouverts de $X \cup_\phi Y$. ◀

Preuve. Soit $x \in p(X)$, $\tilde{x}$ son unique antécédent dans X et U un voisinage ouvert de $\tilde{x}$. Montrons que $p(U)$ est un voisinage ouvert de x inclus dans $p(X)$. L'inclusion est immédiate. Reste à vérifier que $p^{-1}(p(U))$ est un ouvert de $X \sqcup Y$. Or $p^{-1}(p(U)) = U \cup \phi(U \cap A)$, et $U \cap A$ est un ouvert de A donc $\phi(U \cap A)$ est un ouvert de B, mais B est un ouvert de Y donc $\phi(U \cap A)$ est un ouvert de Y, ce qui conclut. □

Remarque 2.39. Attention ! Le quotient d'un espace séparé n'est pas toujours un espace séparé. C'est la première propriété à vérifier lorsque l'on considère un espace topologique défini comme quotient.

Considérons par exemple la « droite à deux origines » définie comme le recollement de $\{0\} \times \mathbb{R}$ avec $\{1\} \times \mathbb{R}$ selon $\{0\} \times \mathbb{R}^*$ et $\{1\} \times \mathbb{R}^*$ au moyen de l'homéomorphisme $\rho : \{0\} \times \mathbb{R}^* \to \{1\} \times \mathbb{R}^*$, $(0, x) \mapsto (1, x)$.

Alors, il n'existe pas de couple d'ouverts disjoints du quotient qui contienne respectivement les classes d'équivalence des points $(0, 0)$ et $(1, 0)$. ◀

Application 2 : quotient par une action de groupe

Actions de groupes sur un espace topologique. Soit G un groupe et X un ensemble. Une *action (à gauche) de G sur X* est la donnée d'une application $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ telle que

$$1_G \cdot x = x \quad \text{et} \quad g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x, \quad \text{pour tous } g, h \in G,\ x \in X.$$

Bien sûr, ici, 1_G désigne l'élément neutre de G. Il découle directement de ces propriétés que, pour tout $g \in G$, $x \mapsto g \cdot x$ et $x \mapsto g^{-1} \cdot x$ sont des bijections réciproques de X.

Ainsi, de manière équivalente, une action de groupe est la donnée d'un morphisme de groupe $\phi : G \to \mathrm{Bij(X)}$ de G dans le groupe des bijections de X, les deux points de vue se correspondant par la relation : $\phi(g)(x) = g \cdot x$.

On appelle *orbite de $x \in X$*, l'ensemble

$$\mathcal{O}_x = G \cdot x = \{g \cdot x \,|\, g \in G\}.$$

La relation « être dans la même orbite » est une relation d'équivalence sur X. L'espace quotient par cette relation d'équivalence est noté X/G (noter l'ambiguïté de cette notation, un même groupe G pouvant agir de diverses façons sur un ensemble X donné).

Exemple 2.40. Les entiers agissent sur $\mathbb{R}$ par translation : $n \cdot x = x + n$. Le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ s'identifie au cercle $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, via l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $x \mapsto e^{2i\pi x}$ qui passe au quotient en une bijection $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$, dont on verra qu'elle est même un homéomorphisme ($\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ étant muni de la topologie quotient), puis un difféomorphisme quand on aura muni $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ d'une structure différentiable naturelle. ◀

Si X est un espace topologique, le quotient X/G hérite de la topologie quotient. On dit que l'action est *continue*[5] ou, plus explicitement, *par homéomorphismes*, si elle est donnée par un morphisme de groupes entre G et Homeo(X).

Proposition 2.41. *Si un groupe G agit par homéomorphismes sur un espace topologique X, alors la projection canonique $p : X \to X/G$ est une application* ouverte *; autrement dit, pour tout ouvert U de X, $p(U)$ est un ouvert de X/G.*

Démonstration. Soit U un ouvert de X. Par définition de la topologie quotient, $p(U)$ est un ouvert de X/G si et seulement si $p^{-1}(p(U))$ est un ouvert de X. Or, pour tout $x \in X$, on peut écrire $p^{-1}(p(x)) = \mathcal{O}_x = \{g \cdot x \,|\, g \in G\}$. Par conséquent,

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$$

est ouvert puisque réunion des ouverts $g \cdot U$. □

5. En général, G est considéré comme un groupe topologique c'est à dire un groupe muni d'une topologie pour laquelle la loi interne et le passage à l'inverse sont des opérations continues. Une action d'un groupe topologique est dite continue si l'application $G \times X \to X$, $g \cdot x \mapsto x$ est continue. Dans ce cours, nous nous plaçons implicitement dans le cas où G est muni de la topologie discrète. La continuité de l'action revient alors à dire que pour tout $g \in G$, $\phi(g) : x \mapsto g \cdot x$ est continue, mais c'est alors aussi le cas de $\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1})$, et ϕ est donc un morphisme $G \to \mathrm{Homeo}(X)$.

Actions propres. On suppose que X est un espace topologique localement compact (i.e. tout point admet un voisinage compact). On dit que l'action de G sur X est *propre* ou *proprement discontinue*[6] si pour tous compacts K, K' de X, l'ensemble $\{g \in G \,|\, (g \cdot K) \cap K' \neq \emptyset\}$ est fini.

Exemples 2.42. (a) L'action de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ par translation donnée par $k \cdot x = x + k$ est propre.

(b) L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ donnée par $n \cdot x = 2^n x$ n'est pas propre. En effet, si K' est un voisinage compact de 0 et K compact non vide quelconque, alors pour n proche de $-\infty$, l'intersection $(n \cdot K) \cap K'$ est non-vide.

(c) L'action de $\mathbb{Z}/2$ sur $\mathbb{S}^n$ donnée par $0 \cdot x = x$ et $1 \cdot x = -x$ (on l'appelle l'action « par antipodie ») est évidemment propre puisque $\mathbb{Z}/2$ est fini.

◀

Lemme 2.43. *Soit G un groupe agissant continûment sur un espace X supposé séparé et localement compact. Si l'action de G est propre(ment discontinue), alors le quotient X/G est séparé.*

Démonstration. Soient x, y des points de X tels que $p(x) \neq p(y)$. Nous allons construire des voisinages de $p(x)$ et $p(y)$ qui ne se rencontrent pas. Comme p est une application ouverte, on peut chercher ces voisinages sous la forme $p(U)$, $p(V)$ avec U, V ouverts de X. Pour obtenir la condition $p(U) \cap p(V) = \emptyset$, il suffit que les ouverts U et V vérifient

$$\forall g, g' \in G,\ (g \cdot U) \cap (g' \cdot V) = \emptyset,$$

ce qui est équivalent à

$$\forall g \in G,\ (g \cdot U) \cap V = \emptyset. \tag{2.4}$$

Le fait que X est localement compact implique que x et y admettent des voisinages compacts K et K' respectivement. L'action de G étant propre, l'ensemble $H = \{g \in G \,|\, (g \cdot K) \cap K' \neq \emptyset\}$ est fini.

L'hypothèse $p(x) \neq p(y)$ signifie que les orbites de x et y sont disjointes. En particulier, pour tout $g \in H$, $g \cdot x \neq y$, et comme X est séparé, il existe des ouverts U_g, V_g tels que

$$g \cdot x \in U_g, \quad y \in V_g \quad \text{et} \quad U_g \cap V_g = \emptyset.$$

On pose

$$U = K \cap \bigcap_{g \in H} g^{-1} \cdot U_g \quad \text{et} \quad V = K' \cap \bigcap_{g \in H} V_g.$$

Par construction, U et V sont des ouverts (H est fini) vérifiant $x \in U \subset K$ et $y \in V \subset K'$. De plus, U et V vérifient la condition (2.4). En effet, si $g \in H$ alors, $g \cdot U \subset U_g$ donc $g \cdot U$ ne rencontre pas V. Si $g \in G \setminus H$, alors $g \cdot U \subset g \cdot K$ ne rencontre pas $V \subset K'$ par définition de H.

6. la définition qui suit de « propre » n'est valide que dans le contexte de groupes munis de la topologie *discrète*. En général, si l'on considère une action d'un groupe G *muni d'une topologie quelconque* sur un espace X, on dit que l'action est propre si l'application $(g, x) \in G \times X \mapsto (x, g \cdot x) \in X \times X$ est propre, c'est-à-dire si la préimage de tout compact de $X \times X$ par cette application est un compact de $G \times X$ (les produits sont munis de la topologie produit). Pour une action *par homéomorphismes* d'un groupe *séparé* sur un espace *localement compact*, ceci est équivalent à : pour tous compacts K et K' de X, $\{g \in G\,;\, g \cdot K \cap K' \neq \varnothing\}$ est un compact de G. Or un compact d'un espace discret est fini, donc on retombe sur la définition ci-dessus dans le cas d'un groupe discret. Strictement parlant, dire qu'une action d'un groupe G (pas supposé muni d'une topologie) sur un espace localement compact X est proprement discontinue, c'est dire que, si l'on munit G de la topologie discrète, l'action est propre au sens général ci-dessus.

Les ouverts $p(U)$ et $p(V)$ vérifient donc $p(x) \in p(U)$, $p(y) \in p(V)$ et $p(U) \cap p(V) = \emptyset$. Nous avons bien montré que le quotient X/G est séparé. □

Actions libres et propres Une action d'un groupe G sur un ensemble X est dite *libre* si pour tout $g \neq 1_G$, l'application $x \mapsto g \cdot x$ n'a pas de point fixe.

Si l'action est libre, alors pour tout élément $x \in X$, l'application $G \to \mathcal{O}_x$, $g \mapsto g \cdot x$ est une bijection. En effet, cette application est toujours surjective par définition de $\mathcal{O}_x$. Elle est injective dans le cas d'une action libre car si $g \cdot x = g' \cdot x$, alors $(g^{-1}g') \cdot x = x$ donc $g^{-1}g' = 1_G$.

Exemples 2.44. (a) L'action de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ par translation est libre.

(b) L'action de $\mathbb{Z}/2$ sur $\mathbb{R}^n$ par antipodie n'est pas libre, mais l'action de $\mathbb{Z}/2$ sur $\mathbb{S}^n$ est libre. ◀

Le résultat sur les actions de groupes qui nous sera utile dans ce cours est le suivant.

Théorème 2.45 (Quotient par une action libre et propre)**.** *Soit G un groupe agissant librement et proprement sur un espace topologique X séparé et localement compact. Alors,*

(i) Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V de x tel que $g \cdot V \cap V = \emptyset$ pour tout $g \neq 1_G$ (en particulier, chaque orbite est une partie discrète),

(ii) le quotient X/G est séparé,

(iii) la projection canonique $p : X \to X/G$ est un homéomorphisme local.

Démonstration. Nous avons déjà prouvé le point (ii) qui ne requiert pas que l'action soit libre. Démontrons le point (i) (preuve similaire à celle du caractère séparé).

Soit $x \in X$ et K un voisinage compact de x. Comme l'action est propre, l'ensemble $H = \{g \in G \,|\, g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.

Soit $g \in H \setminus \{1_G\}$. Comme l'action est libre, $g \cdot x \neq x$ et, X étant séparé, il existe des ouverts U_g et V_g de X tels que

$$g \cdot x \subset U_g, \quad x \in V_g \quad \text{et} \quad U_g \cap V_g = \emptyset.$$

Posons

$$V = K \cap \bigcap_{g \in H \setminus \{1_G\}} \left(g^{-1}(U_g) \cap V_g\right).$$

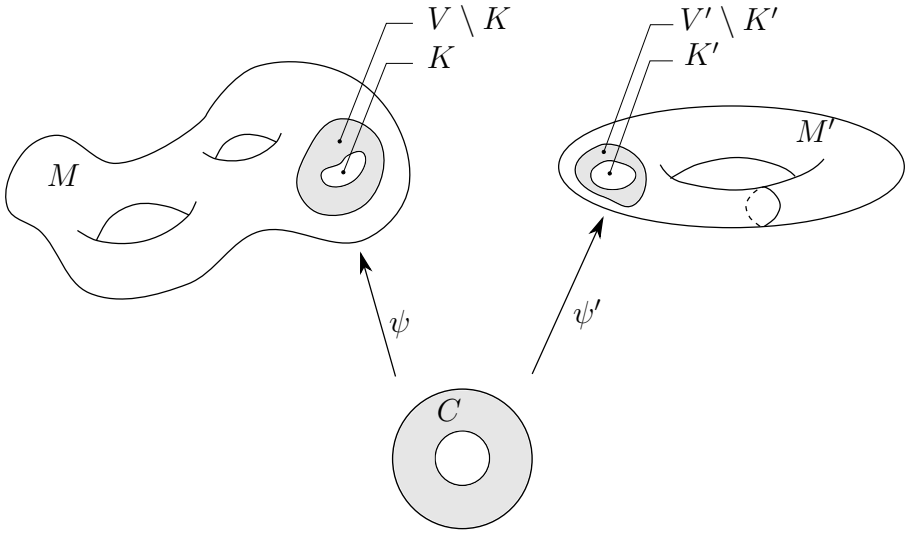
Alors, par construction $x \in V$. De plus, pour tout $g \in G \setminus \{1_G\}$, $(g \cdot V) \cap V = \emptyset$. En effet, si $g \in H \setminus \{1_G\}$, alors $g \cdot V \subset U_g$ et $V \subset V_g$ donc $(g \cdot V) \cap V = \emptyset$. De plus, si $g \notin H$, alors $(g \cdot K) \cap K = \emptyset$ et comme $V \subset K$, on en déduit là encore que $g \cdot V \cap V = \emptyset$.

Il nous reste à démontrer le point (iii). C'est en fait une conséquence du point (i). En effet, soit $x \in X$ et V un ouvert comme fourni par (i). Alors, l'application $p|_V$ est injective (car V contient au plus un point par orbite). Comme p est continue et ouverte, la restriction $p|_V$ est un homéomorphisme $V \to p(V)$. Nous avons bien montré que p est un homéomorphisme local au voisinage de tout point. □

Fin de la parenthèse.

IV.3 Somme connexe de deux variétés

Nous allons utiliser la notion de recollement d'espaces topologiques pour une construction sur les variétés appelée somme connexe. On se donne deux variétés M et M' de même dimension n et deux difféomorphismes $\psi : B(0,2) \to V \subset M$ et $\psi' : B(0,2) \to V' \subset M'$, où V et V' sont des ouverts de M et M' respectivement. Notons que de tels difféomorphismes existent toujours. On note $K = \psi\left(\overline{B(0,\frac{1}{2})}\right)$ et $K' = \psi'\left(\overline{B(0,\frac{1}{2})}\right)$.



On note $C = B(0,2) \setminus \overline{B(0,\frac{1}{2})}$ et

$$\chi : C \to C, \quad x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}.$$

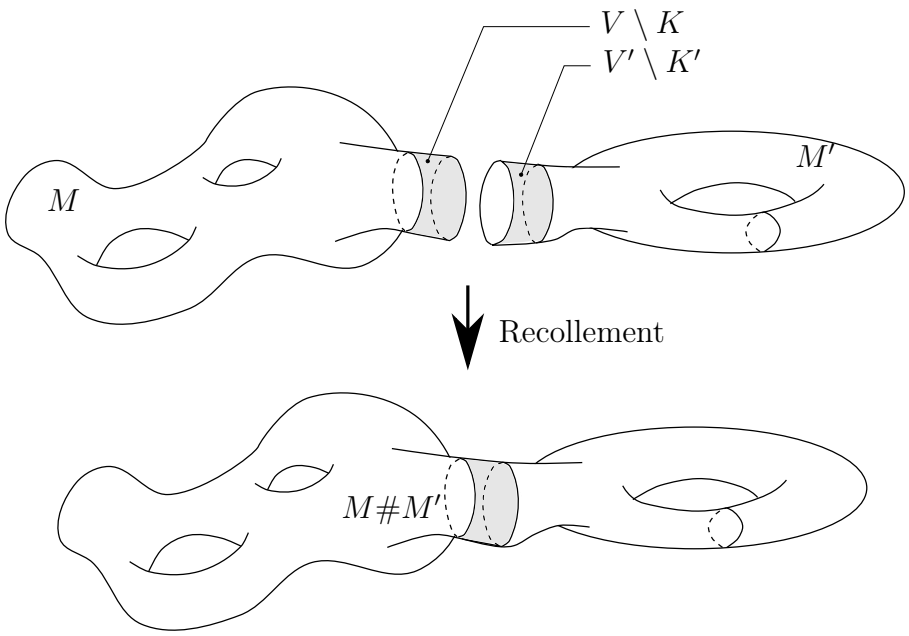
L'application χ est un difféomorphisme de C qui a la propriété d'envoyer le bord extérieur de C sur son bord intérieur et inversement. On note enfin

$$\rho = \psi' \circ \chi \circ \psi : (V \setminus K) \to (V' \setminus K').$$

La *somme connexe* de M et M' est une variété différentiable dont l'espace topologique sous-jacent est donné par le recollement de $M \setminus K$ et $M' \setminus K'$, selon $V \setminus K$ et $V' \setminus K'$, au moyen de ρ :

$$M \# M' = (M \setminus K) \cup_\rho (M' \setminus K').$$

Pour se représenter cette opération, il est utile de remarquer que C est difféomorphe à un cylindre. D'où le dessin suivant.



On peut montrer (cf. fichier « compléments ») que cet espace est séparé et à base dénombrable d'ouverts, et qu'il possède une unique structure différentiable telle que la projection canonique de $(M \setminus K) \sqcup (M' \setminus K')$ vers $M \# M'$ induise des difféomorphismes de $M \setminus K$ et $M' \setminus K'$ sur leurs images (qui sont des ouverts de $M \# M'$ d'après la remarque 2.38).

On peut aussi montrer que des choix différents d'applications ψ, ψ' mènent à des variétés difféomorphes. Autrement dit, à difféomorphisme près, la somme connexe de deux variétés est définie indépendamment de tout choix (d'où la notation $M \# M'$ qui ne fait pas apparaître ces choix).

IV.4 Quotient de variétés par des actions libres et propres de groupes discrets

Théorème 2.46 (Quotient d'une variété par une action libre et propre)**.** *Soit M une variété et G un groupe discret agissant librement et proprement par difféomorphismes*[7] *sur M. Alors le quotient M/G admet une unique structure de variété telle que la projection canonique $p : M \to M/G$ soit un difféomorphisme local.*

Démonstration. (Nous omettrons la partie unicité de la démonstration) Comme M est une variété, elle est localement compacte. Elle est de plus séparée. On peut donc appliquer le théorème 2.45. Il affirme en premier lieu que le quotient M/G est séparé. Par ailleurs, M/G est à base dénombrable. En effet, si $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base d'ouverts de M, alors $(p(U_i))_{i \in \mathbb{N}}$ forme une base d'ouverts de M/G.

Il implique également l'existence au voisinage de tout point d'une carte (U, ϕ) telle que $U \cap (g \cdot U) = \emptyset$ pour tout $g \neq 1_G$. Nous avons vu que $p|_U$ est un homéomorphisme entre U et $p(U)$.

7. On dit d'une action d'un groupe G sur M, qu'elle est « par difféomorphismes » si elle est donnée par un morphisme de groupes $G \to \mathrm{Diff}(M)$ ou, de façon équivalente, si $x \mapsto g \cdot x$ est lisse sur M pour tout $g \in G$.

Donc, $(p(U), \phi \circ (p|_U)^{-1})$ est une carte de M/G. De plus, les domaines de toutes ces cartes recouvrent tout le quotient. Pour obtenir un atlas, il nous reste à vérifier la compatibilité de toutes ces cartes.

Soient donc $(p(U), \phi \circ p|_U^{-1})$ et $(p(V), \psi \circ p|_V^{-1})$ deux telles cartes. Alors le changement de carte correspondant s'écrit :

$$\phi \circ p|_U^{-1} \circ (\psi \circ p|_V^{-1})^{-1} = \phi \circ p|_U^{-1} \circ p|_V \circ \psi^{-1}.$$

Nous avons déjà vu que les cartes d'une variété sont lisses. Il nous suffit donc de vérifier que l'application $p|_U^{-1} \circ p|_V$ est lisse.

Nous allons montrer que $p|_U^{-1} \circ p|_V$ est lisse au voisinage de tout point. Soit $y \in V$ un point du domaine de définition de $p|_U^{-1} \circ p|_V$. Le point $x = p|_U^{-1} \circ p|_V(y) \in U$ est dans la même orbite que y, donc il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$. Remarquons que l'on a

$$p|_V(z) = p|_U(g \cdot z),$$

pour tout $z \in V$ tel que $g \cdot z \in U$, c'est-à-dire pour tout z dans $V \cap g^{-1}(U)$, qui est un voisinage de y. Nous avons donc,

$$p|_U^{-1} \circ p|_V(z) = g \cdot z$$

au voisinage de y. Autrement dit, au voisinage de y, $p|_U^{-1} \circ p|_V$ coincide avec l'action de g, et est donc lisse.

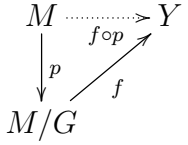
Nous avons ainsi défini un atlas. Pour montrer que p est un difféomorphisme local, écrivons p dans les cartes (U, ϕ) de M et $(p(U), \phi \circ p|_U^{-1})$ de M/G :

$$\phi \circ p|_U^{-1} \circ p \circ \phi^{-1}$$

est tout simplement l'identité de U et est donc bien un difféomorphisme local. □

La proposition suivante est très importante pour étudier les exemples.

Proposition 2.47. *On suppose que les hypothèses du theorème 2.46 sont vérifiées. Alors, pour toute variété Y et $f : M/G \to Y$, l'application f est lisse si et seulement si $f \circ p$ est lisse.*



Démonstration. Comme p est lisse, il est clair que f lisse implique $f \circ p$ lisse. Pour la réciproque, on remarque que localement, $f = (f \circ p) \circ (p|_U)^{-1}$ pour un certain ouvert U, ce qui montre que la lissité de f se déduit de celle de $f \circ p$. □

Exemple 2.48. L'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ (ou plus généralement de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}^n$) par translation vérifie les hypothèses du théorème 2.46.

L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ est lisse, donc par la proposition précédente, l'application induite $\hat{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$ est lisse.

Vue comme application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, f est une immersion, donc lue dans des cartes (de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{S}^1$), elle est de rang 1, et c'est donc un difféomorphisme local de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{S}^1$ d'après l'exercice 8. Comme la projection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un difféomorphisme local (d'après le théorème 2.46), nous déduisons du diagramme commutatif que l'application $\hat{f}$ est aussi un difféomorphisme local. Comme par ailleurs, nous savons que $\hat{f}$ est une bijection, on en déduit que $\hat{f}$ et son inverse sont lisses. Autrement dit, *$\hat{f}$ est un difféomorphisme.* ◀

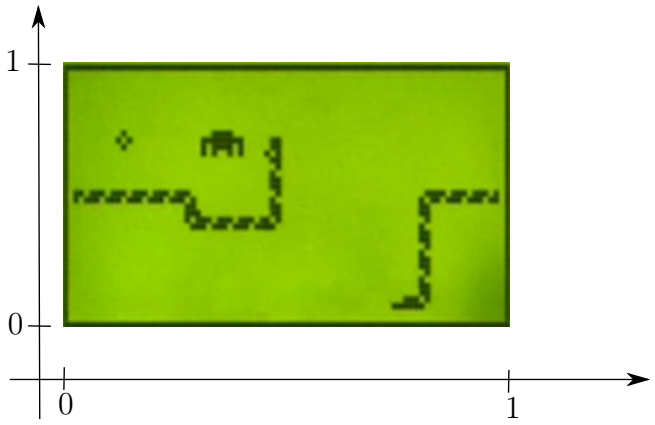
De même, l'application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$,

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (\cos(2\pi t_1), \sin(2\pi t_1), \ldots, \cos(2\pi t_n), \sin(2\pi t_n))$$

passe au quotient en une application $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$. Le même argument que dans le paragraphe précédent donne la proposition suivante.

Proposition 2.49 (Tores comme quotients)**.** *Le quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est difféomorphe au tore de dimension n, $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$.*

Comment visualiser $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$? Intuitivement, se déplacer dans le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ revient à se déplacer dans une pièce carrée $[0,1] \times [0,1]$ de telle sorte que lorsque l'on vient « cogner » un mur on se retrouve immédiatement à sortir du mur opposé, comme sur l'image ci-dessous [8] :



On peut effectivement visualiser $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ sur un carré grâce au résultat suivant :

Soit X un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X, F un compact de X tel que toute classe de X rencontre F. On définit $\mathcal{R}_F$ la relation sur F telle que

$$\forall x, x' \in F, \quad x \mathcal{R}_F x' \iff x \mathcal{R} x'.$$

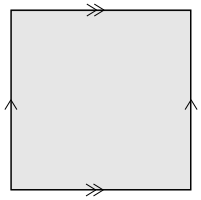
Autrement dit, $\mathcal{R}_F$ est la restriction de $\mathcal{R}$ à F. Alors, $F/\mathcal{R}_F$ est homéomorphe à $X/\mathcal{R}$.

On en déduit que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ s'identifie (est homéomorphe) au quotient du carré $[0,1] \times [0,1]$ par la relation d'équivalence :

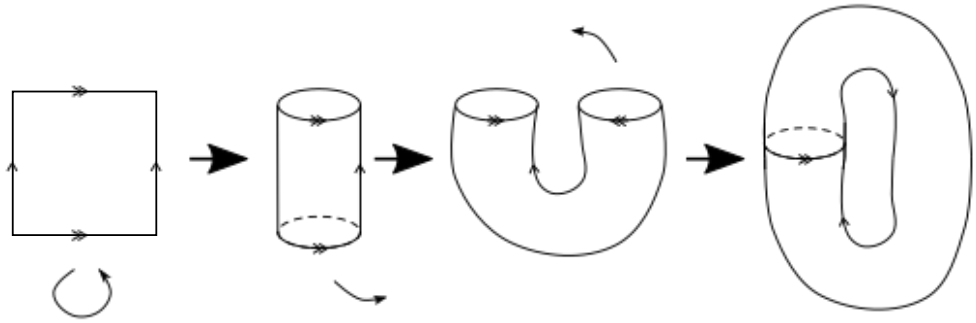
$$(x,y) \sim (x',y') \iff \begin{cases} & x = 0, x' = 1, y = y', \\ \text{ou} & x' = 0, x = 1, y = y', \\ \text{ou} & y = 0, y' = 1, x = x', \\ \text{ou} & y' = 0, y = 1, x = x'. \end{cases}$$

8. Pour les gens de ma génération, $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ rappelle l'espace dans lequel se promène le serpent du jeu « Snake » que l'on trouvait sur certains des premiers téléphones portables !

Autrement dit, on identifie les bords opposés du carré, comme représenté ci-dessous.



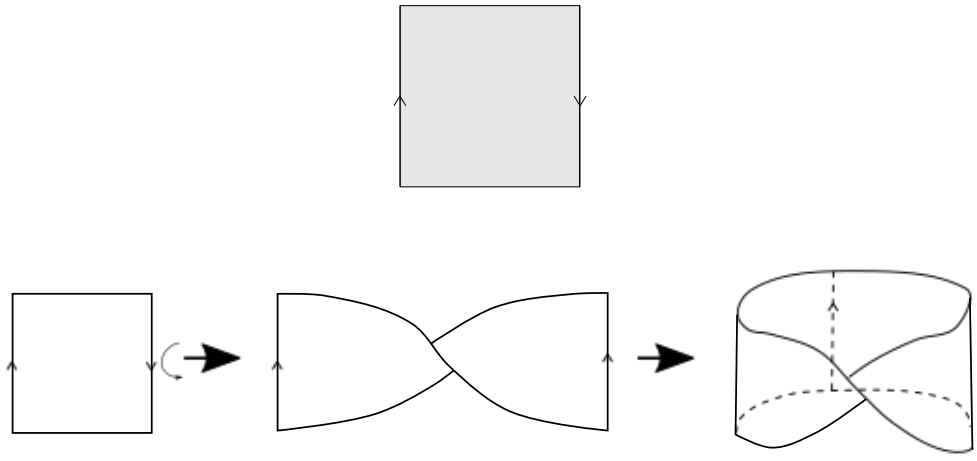
L'homéomorphisme avec un tore de révolution peut être visualisé grâce au dessin suivant.



Autres exemples de quotients.

Exemple 2.50. *Le Ruban de Moebius*

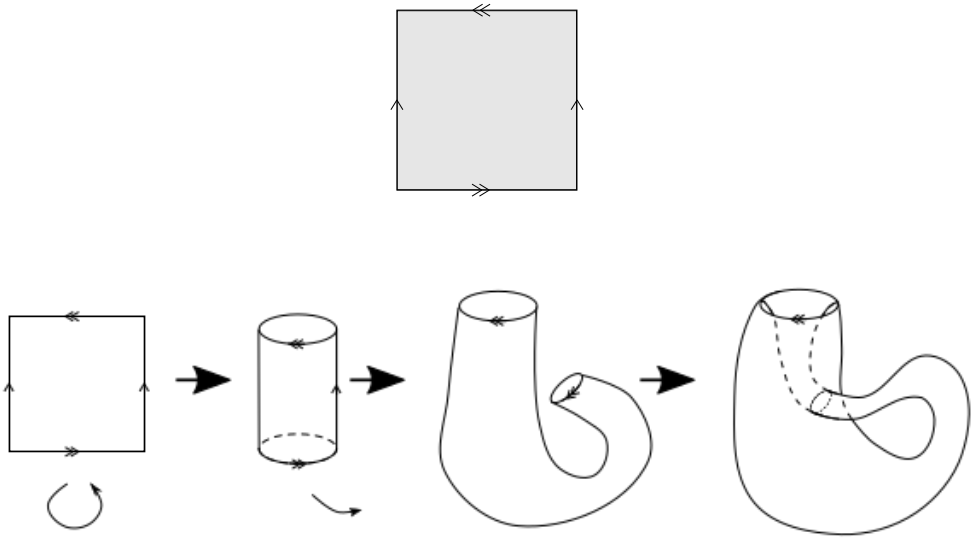
On considère l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}\times]-1,1[$ donnée par $n\cdot(x,y)=(x+n,(-1)^n y)$, pour $n\in\mathbb{Z}$, $x\in\mathbb{R}$ et $y\in]-1,1[$. À nouveau, le théorème 2.46 s'applique : il s'agit bien d'une action libre et propre, par difféomorphismes. La variété quotient ainsi obtenue s'appelle le Ruban de Moebius. On peut le visualiser comme suit :



◀

Exemple 2.51. *La bouteille de Klein*

On considère l'action de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ donnée par $(n,k)\cdot(x,y)=((-1)^k x+n,y+k)$, pour $n,k\in\mathbb{Z}$, $x,y\in\mathbb{R}$. Le théorème 2.46 s'applique encore une fois et la variété quotient ainsi obtenue s'appelle la bouteille de Klein. On peut la visualiser comme suit :



Comme on peut le voir, l'image ci-dessus ne représente pas une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$ (elle est seulement immergée). On verra qu'il n'est pas possible de plonger la bouteille de Klein dans $\mathbb{R}^3$. En revanche, il est possible de la plonger dans $\mathbb{R}^4$ (voir TD). ◀

Les deux exemples qui précèdent ont une propriété commune, celle de ne pas être des variétés orientables. Nous en verrons la définition au chapitre 5.

IV.5 L'espace projectif

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$.

Définition 2.52 (Espace projectif)**.** *L'espace projectif de V, noté $\mathbb{P}(V)$, est l'ensemble des droites vectorielles de V. Autrement dit, $\mathbb{P}(V)$ est le quotient de $V \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $\sim$ donnée par*

$$v \sim v' \iff \exists t \in \mathbb{K}, v = tv'.$$

Dans le cas où $V = \mathbb{R}^{n+1}$, on note $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{RP}^n$ ou $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ [9].

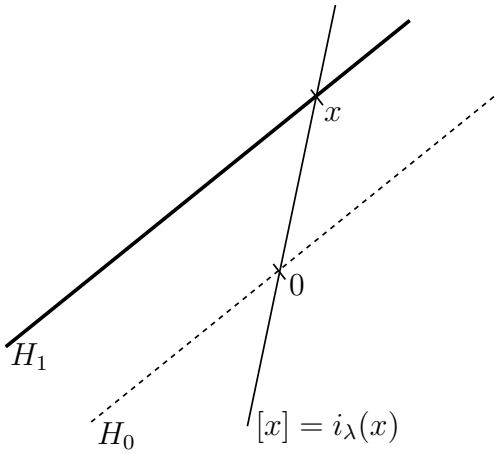
Remarquons que $\mathbb{RP}^n$ s'identifie à $\mathbb{S}^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{S}^n$ par antipodie. Il s'agit d'une action par difféomorphismes qui est libre et propre. La structure différentielle de $\mathbb{S}^n$ induit donc une structure différentielle sur $\mathbb{S}^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ par le théorème 2.46.

Nous allons maintenant donner une autre manière de construire la structure différentielle de $\mathbb{RP}^n$. Cette seconde méthode est classique et il est important de la connaître. Elle est aussi plus facile à utiliser dans la pratique que la première.

Commençons par définir la notion de *carte affine* de $\mathbb{P}(V)$ où V est un espace vectoriel réel de dimension finie. Soit $\lambda : V \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle. Notons $H_0 = \lambda^{-1}(\{0\})$ et $H_1 = \lambda^{-1}(\{1\})$. Alors H_1 est un hyperplan affine dirigé par l'hyperplan vectoriel H_0. Soit i_λ la restriction à H_1 de la projection canonique $p : V \to \mathbb{P}(V)$. Autrement dit, en notant $[x]$ la droite vectorielle passant par x, on a

$$\begin{aligned} i_\lambda : x &\mapsto [x] \\ H_1 &\to \mathbb{P}(V). \end{aligned}$$

9. On va voir que l'espace obtenu admet une structure de variété de dimension n.



Une droite $\Delta \in \mathbb{P}(V)$ intersecte H_1 si et seulement si elle n'est pas incluse dans H_0, et bien sûr l'intersection est réduite à un point. On en déduit que i_λ est une bijection entre H_1 et $\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H_0)$.

Vérifions que $i_\lambda : H_1 \to \mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(H_0)$ est un homéomorphisme. Cela montrera que i_λ^{-1} est une carte à valeur dans H_1. Tout d'abord, i_λ est continue car c'est la restriction de la projection canonique $p : V \to \mathbb{P}(V)$ qui est continue. Pour montrer que i_λ^{-1} est continue, on sait (propriété 2.36 (ii)) qu'il suffit de montrer que $i_\lambda^{-1} \circ p$ est continue. Or, $i_\lambda^{-1} \circ p$ est donnée par

$$i_\lambda^{-1} \circ p : V \setminus H_0 \to H_1, \quad x \mapsto \frac{1}{\lambda(x)} x,$$

et est donc bien continue.

Nous avons vérifié que pour chaque forme linéaire non nulle λ, l'application $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(\ker \lambda), i_\lambda^{-1})$ est une carte de l'espace projectif.

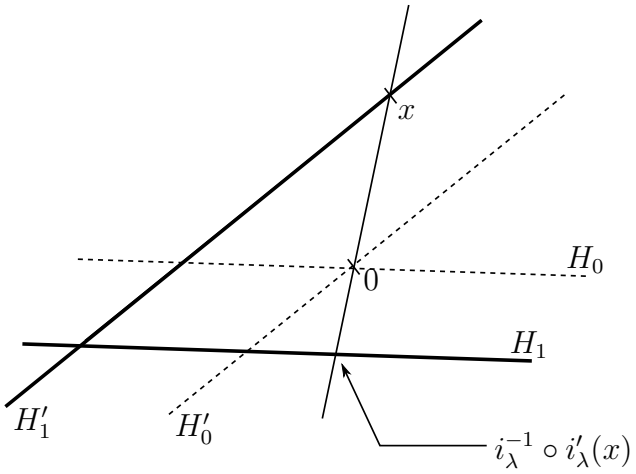
Définition 2.53 (Carte affine)**.** *Les cartes* $(\mathbb{P}(V) \setminus \mathbb{P}(\ker \lambda), i_\lambda^{-1})$ *sont appelées cartes affines de* $\mathbb{P}(V)$*.*

Étudions maintenant les changements de cartes.

Soient donc λ, λ' deux formes linéaires non nulles et H_0, H_1, H_0', H_1' les hyperplans correspondants. Le changement de carte s'écrit

$$\begin{aligned} i_\lambda^{-1} \circ i_{\lambda'} : H_1' \setminus H_0 &\to H_1 \setminus H_0' \\ x &\mapsto \frac{1}{\lambda(x)} x, \end{aligned}$$

et est donc bien un difféomorphisme.



Ceci montre que les cartes affines sont compatibles entre elles. Elles forment donc un atlas et donnent à $\mathbb{P}(V)$ une structure de variété différentiable de dimension $\dim(V) - 1$.

On laisse au lecteur le soin de vérifier la proposition (très utile) suivante.

Proposition 2.54. *(i) L'application $p : V \to \mathbb{P}(V)$ est lisse.*

(ii) Pour toute variété M, une application $f : \mathbb{P}(V) \to M$ est lisse si et seulement si $f \circ p : V \setminus \{0\} \to M$ est lisse.

Revenons à nos deux structures différentiables sur $\mathbb{RP}^n$, ou plutôt à celle sur $\mathbb{RP}^n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ définie grâce aux cartes affines comme ci-dessus, et celle sur $\mathbb{S}^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ induite par celle de $\mathbb{S}^n$. Dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{f : v \mapsto \frac{v}{\|v\|}} & \mathbb{S}^n & \xrightarrow{i : x \mapsto x} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ \downarrow p & \searrow & \downarrow p' & \searrow & \downarrow p \\ \mathbb{RP}^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{S}^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{RP}^n \end{array}$$

p et p' désignent les projections naturelles dans ce contexte, et l'affirmation est que les applications $p' \circ f$ et $p \circ i$ passent au quotient en des applications $\varphi : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{S}^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $\psi : \mathbb{S}^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{RP}^n$ (qui sont en outre bijectives et inverses l'une de l'autre). Montrons qu'elles sont lisses (et donc des difféomorphismes) :

— f est lisse (elle l'est vue comme application à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+1}$, puis on applique la proposition 2.25(ii)),

— p' est lisse (définition de la structure différentielle du quotient, Théorème 2.46) donc $p' \circ f$ l'est par composition,

— φ l'est donc aussi par la proposition ci-dessus.

De façon similaire :

— i est lisse (proposition 2.25(i)),

— p est lisse par la proposition ci-dessus donc $p \circ i$ l'est par composition,

— ψ l'est donc aussi par passage au quotient (prop. 2.47).

Ainsi, on a bien défini « la même structure différentiable » sur $\mathbb{RP}^n$ via les deux méthodes ci-dessus.

Exercice 18. *Montrer que $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ (usuellement noté $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ou $\mathbb{CP}^n$) admet une structure de variété différentiable de dimension $2n$, donnée par des cartes « affines », définies comme ci-dessus.*

On peut montrer (voir TD) que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$. On l'appelle la sphère de Riemann.

Coordonnées homogènes. Dans le cas où $V = \mathbb{R}^{n+1}$, on note comme on l'a vu $\mathbb{RP}^n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Définition 2.55 (Coordonnées homogènes)**.** *Pour tout $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $[x_0 : \dots : x_n]$ l'image de x dans $\mathbb{RP}^n$, c'est-à-dire la droite vectorielle passant par x. Les réels $x_0, \dots, x_n$ sont appelés* coordonnées homogènes *de la droite $[x_0 : \dots : x_n]$.*

Remarque 2.56. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, et tout $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$,

$$[tx_0 : \dots : tx_n] = [x_0 : \dots : x_n].$$

◀

On appelle *cartes affines standard* les cartes affines associées aux formes linéaires $x \mapsto x_i$. On les notera φ_i. Donnons quelques formules qui seront reprises dans la suite du cours.

Pour $i = 0, \dots, n$, on note $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \,|\, x_i \neq 0\}$ et

$$\varphi_i : U_i \to \{x_i = 1\} \simeq \mathbb{R}^n,\ [x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right).$$

L'inverse de φ_i est donnée par [10] :

$$\varphi_i^{-1} : (t_0, \dots, \hat{t_i}, \dots, t_n) \mapsto [t_0 : \dots : t_{i-1} : 1 : t_{i+1} : \dots t_n].$$

Les cartes affines standard forment donc un atlas à $n+1$ cartes. Les changements de cartes s'écrivent :

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \{(t_0, \dots, \hat{t_i}, \dots, t_n) \,|\, t_j \neq 0\} \to \{(u_0, \dots, \hat{u_j}, \dots, u_n) \,|\, u_i \neq 0\}$$
$$(t_0, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{j-1}, t_j, t_{j+1}, \dots, t_n) \mapsto \left(\frac{t_0}{t_j}, \dots, \frac{t_{i-1}}{t_j}, \frac{1}{t_j}, \frac{t_{i+1}}{t_j}, \dots, \frac{t_{j-1}}{t_j}, \frac{t_{j+1}}{t_j}, \dots, \frac{t_n}{t_j}\right).$$

Dans le cas particulier où $n = 1$, nous obtenons deux cartes :

$$U = \{[1 : y] \,|\, y \in \mathbb{R}\}, \quad \varphi_U : U \to \mathbb{R}, [1 : y] \mapsto y,$$

$$V = \{[x : 1] \,|\, x \in \mathbb{R}\}, \quad \varphi_V : V \to \mathbb{R}, [x : 1] \mapsto x,$$

Le changement de carte s'écrit tout simplement

$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}(y) = \frac{1}{y}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^*.$$

10. L'écriture $(t_0, \dots, \hat{t_i}, \dots, t_n)$ signifie que t_i a été retiré de la liste. Elle est équivalente à l'écriture $(t_0, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)$.

Exercice 19. *Montrer que l'application* $\mathbb{R} \to \mathbb{RP}^1$, $t \mapsto [\cos \pi t : \sin \pi t]$ *induit un difféomorphisme* $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{RP}^1$.

La variété $\mathbb{RP}^1$ est donc difféomorphe à un cercle, mais attention, la projection $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{RP}^1$ n'est pas un difféomorphisme ! C'est un difféomorphisme *local* mais tel que chaque point de $\mathbb{RP}^1$ a *deux* antécédents (on parle alors de « revêtement double »). Attention également : il ne faudrait pas croire que, de manière générale, $\mathbb{RP}^n$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^n$! $\mathbb{RP}^2$ par exemple n'est pas *orientable* (cf. chap. 5) ; on peut y penser comme un disque et un ruban de Möbius recollés le long de leurs bords circulaires. Quant à $\mathbb{RP}^3$, il est difféomorphe à la sous-variété $SO(3, \mathbb{R})$ de $M_3(\mathbb{R})$ constituée des matrices de rotations.

Exercice 20. *Écrire les changements de cartes affines standard pour* $\mathbb{RP}^2$.

V Partitions de l'unité et plongement de Whitney

Le but de cette partie est double : introduire la notion de partition de l'unité (et en démontrer l'existence), et l'utiliser pour établir le théorème suivant.

Théorème 2.57. *Pour toute variété compacte* M*, il existe un entier* p *et un plongement de* M *dans* $\mathbb{R}^p$.

Ce résultat peut en fait être amélioré :

Théorème 2.58 (Whitney, 1936 puis 1944)**.** *Soit* $n \geqslant 0$*. Toute variété de dimension* n *peut être plongée dans* $\mathbb{R}^{2n}$.

L'exposant $2n$ est optimal. Par exemple, on sait que $\mathbb{RP}^n$ ne peut pas être plongé $\mathbb{R}^{2n-1}$.
Ce théorème admet le corollaire suivant :

Corollaire 2.59. *Toute variété différentiable est un espace métrisable.*

Le théorème de Whitney peut laisser penser qu'il est inutile de s'intéresser aux variétés abstraites et que l'on peut se contenter d'étudier les sous-variétés. C'est une erreur : le point de vue des variétés abstraites est souvent beaucoup plus pratique, et c'est notamment le cas des variétés quotients comme $\mathbb{T}^n$ ou $\mathbb{RP}^n$.

Partitions de l'unité. Commençons par rappeler que le *support* d'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Définition 2.60 (Partitions de l'unité)**.** *Soit* $(U_i)_{i \in I}$ *un recouvrement ouvert d'une variété différentiable* M*. Une* partition de l'unité *subordonnée à* $(U_i)_{i \in I}$ *est une famille de fonctions lisses* $\rho_i : M \to [0, 1]$, $i \in I$*, telles que :*

- *pour tout* $i \in I$, ρ_i *est supportée dans* U_i,
- *la famille des supports* $\mathrm{Supp}\, \rho_i$ *est localement finie, c'est-à-dire :*

$$\forall K \subset M \text{ compact}, \ \{i \in I \mid \mathrm{Supp}\, \rho_i \cap K \neq \emptyset\} \text{ est fini};$$

- $\forall x \in M$, $\sum_{i \in I} \rho_i(x) = 1$ *(la somme est bien définie car,* x *étant fixé, tous les termes sauf un nombre fini sont nuls d'après le point précédent).*

Théorème 2.61 (Existence de partitions de l'unité)**.** *Tout recouvrement ouvert d'une variété différentiable admet une partition de l'unité qui lui est subordonnée.*

Afin de se faire une première image, prenons par exemple le recouvrement de $\mathbb{R}$ par les ouverts $U_- =]-\infty, 1[$ et $U_+ =]0, +\infty[$. Pour obtenir une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, il « suffit » de trouver une fonction plateau lisse $\rho : \mathbb{R} \to [0,1]$ valant 1 sur $]-\infty, 0]$, décroissante sur $[0,1]$ et valant 0 sur $[1, +\infty[$ et de poser $\rho_- = \rho$ et $\rho_+ = 1-\rho$ (qui sont bien à support dans U_- et U_+ respectivement). Le cas général est lui aussi basé sur l'existence de fonctions plateau, ou de fonctions « cloches » :

Lemme 2.62. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ lisse et à support compacte telle que $\chi(0) > 0$.*

Démonstration. En dimension 1, on peut choisir la fonction χ_1 qui sur $]-1,1[$ envoie x sur $\exp(\frac{1}{x^2-1})$ et qui s'annule ailleurs. En dimension n, on peut prendre $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n \chi_1(x_i)$. □

Démonstration du théorème 2.61. Partant du lemme ci-dessus, en composant à droite par une homothétie, on peut imposer au support d'une cloche d'être contenu dans une boule de rayon arbitrairement petit. En utilisant un atlas, on obtient donc que, pour tout point x d'une variété et tout ouvert U contenant x, il existe une fonction positive qui est strictement positive en x et dont le support est contenu dans U. Une telle fonction sera appelée cloche en x à support dans U.

Nous allons traiter le cas où M est compacte. Pour le cas non compact, nous renvoyons par exemple à l'excellent cours de notre collègue Patrick Massot. Quitte à extraire, on peut supposer qu'on a affaire à un recouvrement fini par des ouverts $U_1, \ldots, U_n$. Pour tout $x \in M$, on se donne une fonction cloche χ_x à support dans l'un des U_i, et on note $V_x = \chi_x^{-1}(]0, +\infty[)$. Ces ouverts recouvrent M, donc on peut en extraire un sous-recouvrement fini $V_{x_1}, \ldots, V_{x_k}$, et chaque V_{x_j} est inclus par construction dans un certain $U_{i(j)}$ (éventuellement plusieurs, mais on en choisit un). Reste à vérifier que les fonctions ρ_i définies, pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, par

$$\rho_i = \frac{\sum_{j,\, i(j)=i} \chi_{x_j}}{\sum_j \chi_{x_j}}$$

ont les propriétés voulues. □

Le corollaire suivant va être déterminant dans la preuve du théorème 2.57 mais pourrait servir ailleurs, c'est pourquoi nous l'isolons ici :

Corollaire 2.63. *Étant donné un recouvrement ouvert fini $\{U_i\}_{i\in I}$ d'une variété M, il existe un recouvrement $\{V_i\}_{i\in I}$ par des ouverts strictement plus petits au sens où $\bar{V_i} \subset U_i$, et des fonctions lisses positives λ_i telles que pour tout $i \in I$, $\lambda_i \equiv 1$ sur V_i et $\mathrm{Supp}\lambda_i \subset U_i$.*

Démonstration. Soit $\{\rho_i\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_1, \ldots, U_p\}$. pour tout $x \in M$, comme $\sum_{i=1}^p \rho_i(x) = 1$, il existe $i \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $\rho_i(x) \geq \frac{1}{2p}$. On fixe une fonction lisse $\chi : \mathbb{R} \to [0,1]$ telle que $\chi \equiv 0$ sur $]-\infty, \frac{1}{8p}]$ et 1 sur $[\frac{1}{4p}, +\infty[$. Alors les fonctions $\lambda_i = \chi \circ \rho_i$ et ouverts $V_i = \rho_i^{-1}(]\frac{1}{3p}, +\infty[)$ satisfont la conclusion de l'énoncé. □

Preuve du théorème 2.57. Soit $\{(U_i, \phi_i)\}$ un atlas de M (dont on note n la dimension), que l'on peut supposer fini (de cardinal p) par compacité, et soient λ_i et V_i les fonctions et ouverts fournis par le corollaire précédent. Pour tout i, l'application $x \in U_i \mapsto \lambda_i(x)\phi_i(x) \in \mathbb{R}^n$ s'étend (par 0) en une fonction lisse sur M, que l'on note f_i. Posons $g_i = (f_i, \lambda_i) : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ et $g = (g_1, \dots, g_p) : M \to \mathbb{R}^{p(n+1)}$. Nous allons voir que g fournit le plongement voulu.

Tout d'abord, g est lisse (immédiat) et injective : soient $x, y \in M$ tels que $g(x) = g(y)$. Il existe au moins un i tel que $x \in V_i$, mais alors $\lambda_i(x) = 1$ et $g_i(x) = (\phi_i(x), 1) = g_i(y)$ et donc y appartient aussi à V_i et $\phi_i(x) = \phi_i(y)$ donc $x = y$ par injectivité des cartes.

De plus, sur V_i, $g_i = (\phi_i, 1)$ et ϕ_i est de rang n donc pour tout $x \in V_i$, $\operatorname{rang}_x g \geq \operatorname{rang}_x g_i \geq n$ et donc g est une immersion.

Enfin, M est compacte donc g est propre, ce qui conclut. □

Remarque 2.64. Cela n'est pas apparu clairement car nous n'avons fait les démonstrations des théorèmes 2.58 et 2.61 que dans le cas de variétés compactes, mais ces deux théorèmes requièrent la condition « à base dénombrable » que nous avons incluse dans la définition des variétés. ◀

Le poly a été partiellement remanié jusqu'ici (manquent encore quelques exemples supplémentaires). La suite sera remaniée prochainement.

Chapitre 3

Le fibré tangent

Dans le cas des sous-variétés, il est facile de définir l'espace tangent en un point (cf. chapitre 1). On peut ensuite simplement définir un champ de vecteurs sur une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ comme une application X de M dans l'espace vectoriel ambiant $\mathbb{R}^n$ telle que $X(x) \in T_xM$ pour tout $x \in M$, et donner un sens au fait que l'application en question est lisse ne pose pas de gros problème. Dans le cadre des variétés abstraites, rien n'est aussi simple. Définir un vecteur tangent quand il n'y a pas d'espace vectoriel ambiant nécessite quelques contorsions (et une flexibilité de point de vue), puis il faut encore munir l'union de tous les T_xM (qui ne sont pas plongés dans un $\mathbb{R}^n$ commun) d'une structure sympathique qui permette de donner un sens au fait qu'un champ de vecteurs est lisse, et de définir diverses opérations naturelles sur ces objets. Ce sont là les défis auxquels répond ce chapitre.

I L'espace tangent à une variété en un point

Dans cette partie, on fixe une variété différentiable M de dimension n et un point $x \in M$.

On note $\mathcal{C}_x(M)$ l'ensemble de tous les chemins lisses c définis sur un voisinage de $0 \in \mathbb{R}$, à valeur dans M et vérifiant $c(0) = x$. On munit $\mathcal{C}_x(M)$ de la relation d'équivalence donnée par :

$$\begin{aligned} c_1 \sim c_2 \quad &\iff \quad \text{pour toute carte } \phi \text{ en } x,\ (\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0) \\ &\iff \quad \text{il existe une carte } \phi \text{ en } x,\ (\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0). \end{aligned}$$

Notons que deux chemins de $\mathcal{C}_x(\mathbb{R}^n)$ sont équivalents en ce sens si et seulement s'ils ont même dérivée en 0.

Définition 3.1 (Espace tangent et application tangente)**.** *L'*espace tangent *à M en x est l'ensemble quotient*

$$T_xM = \mathcal{C}_x(M)/\sim .$$

Si $f : M \to N$ est une application lisse entre variétés, alors l'application $\mathcal{C}_x(M) \to \mathcal{C}_{f(x)}(N)$, $c \mapsto f \circ c$ induit par passage au quotient une application $T_xM \to T_xN$ appelée application tangente *à f en x, ou* différentielle *de f en x. On la notera T_xf.*

On notera $c'(0)$ la classe d'un chemin c pour la relation $\sim$. Cependant, afin d'éviter des confusions, nous la noterons $[c]$ le temps de cette partie.

Remarque 3.2.

(a) On a une identification canonique entre $T_x\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$. De plus, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, alors $T_x f$ s'identifie à la différentielle usuelle Df_x (on confondra d'ailleurs les deux notations à partir de la prochaine section).

(b) La formule de composition est facile à démontrer : si $f : M \to N$ et $g : N \to P$, alors $(g \circ f) \circ c = g \circ (f \circ c)$, donc en passant au quotient

$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_x f. \tag{3.1}$$

◀

Proposition 3.3. *Si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, alors T_xM ainsi défini s'identifie naturellement à l'espace tangent à M introduit dans la définition 1.20.*

Démonstration. Pour différentier les deux espaces tangents en jeu, on note T_xM^{var} l'espace tangent de la définition 3.1 et $T_xM^{\text{ss-var}}$ l'espace tangent de la définition 1.20. L'identification est donnée par l'application $I : c \mapsto c'(0)$, $\mathcal{C}_xM \to T_xM^{\text{ss-var}}$ qui est surjective par définition de $T_xM^{\text{ss-var}}$.

Soient $c_1, c_2 \in \mathcal{C}_x(M)$. Alors $c_1 \sim c_2$ si et seulement si pour toute carte de M de la forme $(U \cap M, h|_{U\cap M})$ avec h forme normale de M, on a $Dh_x(c_1'(0)) = dh_x(c_2'(0))$, ce qui équivaut à $c_1'(0) = c_2'(0)$. On en déduit que I passe au quotient en une application bijective $\hat{I} : T_xM^{\text{var}} \to T_xM^{\text{ss-var}}$. □

On voit dans la démonstration précédente que dans le cas des sous-variétés, il est naturel d'identifier $[c]$ à $c'(0)$. Voici le résultat fondamental de cette partie.

Proposition 3.4. *L'espace tangent T_xM admet une unique structure d'espace vectoriel telle que pour toute carte ϕ en x, l'application $T_x\phi : T_xM \to \mathbb{R}^n$ est linéaire, autrement dit :*

$$\forall u, v \in T_xM, \quad T_x\phi(u + v) = T_x\phi(u) + T_x\phi(v), \tag{3.2}$$
$$\forall u \in T_xM, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad T_x\phi(\lambda u) = \lambda\, T_x\phi(u). \tag{3.3}$$

Pour toute application lisse $f : M \to N$, l'application tangente à f en x est une application linéaire $T_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$, lorsque les espaces tangents sont munis de cette structure.

Démonstration. Fixons une carte ϕ en x. Commençons par vérifier que l'application $T_x\phi : T_xM \to \mathbb{R}^n$ est une bijection.

Pour l'injectivité, si $T_x\phi(u_1) = T_x\phi(u_2)$ pour deux éléments $u_1, u_2 \in T_xM$, alors pour tous représentants $c_1, c_2 \in \mathcal{C}_x(M)$ de u_1 et u_2, on a $(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0)$, ce qui signifie par définition que $c_1 \sim c_2$ et donc $u_1 = u_2$. Passons à la surjectivité. Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Alors, le chemin $c : t \mapsto \phi^{-1}(tv)$ appartient à $\mathcal{C}_x(M)$ et vérifie

$$T_x\phi([c]) \overset{\text{def}}{=} [\phi \circ c] = (\phi \circ c)'(0) = (t \mapsto tv)'(0) = v.$$

Nous avons donc trouvé un antécédent pour v.

Revenons à la structure d'espace vectoriel de T_xM. Les conditions (3.2) et (3.3) forcent les lois de l'espace vectoriel à être données par :

$$\forall u, v \in T_xM, \quad u + v = T_x\phi^{-1}(T_x\phi(u) + T_x\phi(v)),$$
$$\forall u \in T_xM, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda u = T_x\phi^{-1}(\lambda\, T_x\phi(u)).$$

Réciproquement, on peut vérifier sans difficulté que ces lois sont bien celles d'un espace vectoriel. Par exemple, pour l'associativité de l'addition :

$$\begin{aligned}(u+v)+w &= T_x\phi^{-1}(T_x\phi(T_x\phi^{-1}(T_x\phi(u)+T_x\phi(v)))+T_x\phi(w)),\\ &= T_x\phi^{-1}(T_x\phi(u)+T_x\phi(v)+T_x\phi(w))\\ &= u+(v+w).\end{aligned}$$

Nous avons donc défini une structure d'espace vectoriel sur T_xM telle que $T_x\phi : T_xM \to \mathbb{R}^n$ soit un isomorphisme.

Pour toute autre carte ψ en x, la différentielle du changement de carte, $D(\psi \circ \phi^{-1})_0 = T_x\psi \circ (T_x\phi)^{-1}$ (par la formule de composition (3.1) est un isomorphisme linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, donc par composition, $T_x\psi$ est également un isomorphisme linéaire entre T_xM et $\mathbb{R}^n$.

La formule de composition (3.1) montre également que si $f : M \to N$, alors T_xf est linéaire car on sait que l'application

$$T_{f(x)}\chi \circ T_xf \circ (T_x\phi)^{-1} = D(\chi \circ f \circ \phi^{-1})_0,$$

où χ est une carte de N en $f(x)$, est linéaire $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. □

Exercice 21. *Vérifier que la différentielle d'une application constante est nulle.*

Pour terminer cette partie, on laisse au lecteur le soin de vérifier les énoncés suivants :

Proposition 3.5. *Soit $f, g \in C^\infty(M)$, alors*

$$T_x(f+g) = T_xf + T_xg \quad \text{et} \quad T_x(fg) = f(x)T_xg + g(x)T_xf.$$

Proposition 3.6. *Soit $f : M \to N$ une application lisse. Alors*

1. *f est une immersion en x si et seulement si T_xf est injective,*
2. *f est une submersion en x si et seulement si T_xf est surjective,*
3. *le rang de f en x est égal au rang de T_xf.*

Proposition 3.7. 1. *Soient $f : M \to N$ une application lisse entre variétés, $a \in N$ une valeur régulière, et $x \in M$ tel que $f(x) = a$. Alors l'espace tangent à la sous-variété $f^{-1}(a)$ est donné par*

$$T_x(f^{-1}(a)) = \ker T_xf.$$

2. *Soit $f : M \to N$ un plongement, alors*

$$T_{f(x)}f(M) = \operatorname{Im} T_xf.$$

En l'appliquant à l'injection canonique, ce dernier point implique en particulier que si M est une sous-variété de N, alors T_xM s'identifie à un sous-espace de T_xN.

II Fibrés vectoriels

Dans cette partie, nous introduisons la notion de fibré vectoriel. C'est une notion très importante en topologie. Nous ne ferons que l'effleurer. En particulier, nous n'aborderons pas du tout les problèmes de classifications des fibrés. Notre principale motivation pour cette partie est d'être en mesure de définir le fibré tangent à une variété ainsi que, plus tard, les fibrés de formes alternées.

On fixe un entier $k \geqslant 0$.

Définition 3.8 (Fibré vectoriel)**.** *Un fibré vectoriel (réel) de rang k est la donnée :*

(a) d'une application lisse $p : E \to B$ entre variétés,

(b) pour tout $b \in B$, d'une structure d'espace vectoriel sur $p^{-1}(b)$,

de sorte que tout point $b \in B$ admette un voisinage ouvert $U \subset B$ et une application

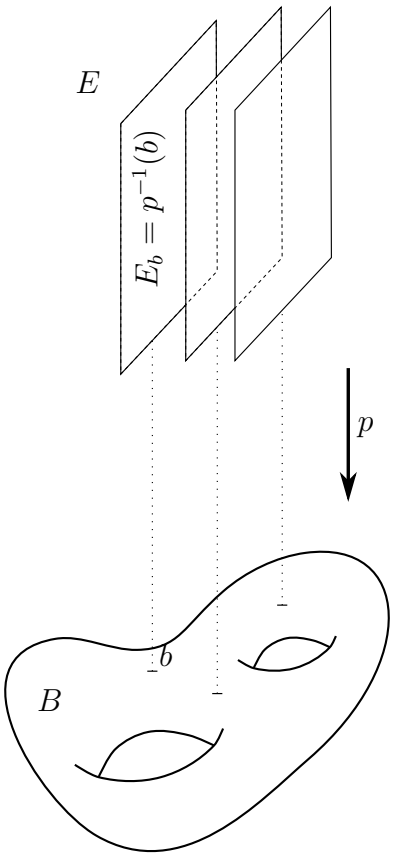
$$\Phi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$$

tels que

(i) le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times \mathbb{R}^k \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1:(u,\xi)\mapsto u} & \\ & U & \end{array}$$

(ii) pour tout $b' \in U$, la restriction de Φ à $p^{-1}(b')$ est un isomorphisme linéaire entre $p^{-1}(b')$ et $\{b'\} \times \mathbb{R}^n$.



Vocabulaire.

— B est appelée *base* du fibré vectoriel,
— E est appelé *espace total* du fibré,
— p est appelée *projection* du fibré,
— $E_b = p^{-1}(b)$ est appelée *fibre* au dessus de b
— Φ est appelée *trivialisation* au dessus de U. S'il existe une trivialisation au dessus de B tout entier, on dit que le fibré est *trivialisable*.
— Si $n = 1$, on parle de *fibré en droites*.
— Par abus de langage, on désigne parfois le fibré seulement par E ou par p. Les structures d'espaces vectoriels sur les fibres sont presque toujours sous-entendues.
— Un point $\xi \in E$ tel que $p(\xi) = b$ est parfois noté (b, ξ), pour garder en mémoire que $p(\xi) = b$.

Exemples 3.9. (i) Le fibré trivial de rang k au dessus de B est donné par

$$p : B \times \mathbb{R}^k \to B, (b, \xi) \mapsto b.$$

Ses fibres sont les $E_b = \{b\} \times \mathbb{R}^k$. L'identité est une trivialisation au dessus de B. Le fibré trivial est donc trivialisable !

(ii) Soit M une sous-variété de dimension k de $\mathbb{R}^n$. Alors,

$$TM = \{(x, \xi) \,|\, x \in M, \xi \in T_x M\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n}$ de dimension $2k$. En effet, si M est localement donnée par une équation $\{f(x) = 0\}$, alors TM est localement donné par l'équation

$$\{f(x) = 0, Df_x(\xi) = 0\}.$$

Alors l'application $p : TM \to M$, $(x, \xi) \mapsto x$ est un fibré vectoriel, appelé *fibré tangent* à la sous-variété M. Vérifions-le.

Pour commencer, pour tout $x \in M$, $p^{-1}(x) = \{x\} \times T_x M \simeq T_x M$ est naturellement munie d'une structure d'espace vectoriel, comme sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Construisons les trivialisations. Soit $h : U \to \mathbb{R}^n$ une forme normale locale de M, vérifiant donc $h(U \cap M) = h(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$. On pose

$$\Phi : (x, \xi) \mapsto (x, Dh_x(\xi)),\ p^{-1}(U \cap M) \to (U \cap M) \times \mathbb{R}^k.$$

Alors $\Phi|_{p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \to \{x\} \times \mathbb{R}^k$ est un isomorphisme linéaire car elle s'identifie à l'application $Dh_x|_{T_x M}$ qui en est un. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times \mathbb{R}^k \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1 : (x,\xi) \mapsto x} & \\ & U & \end{array}$$

est évidemment commutatif, et il est facile de vérifier que Φ est un difféomorphisme. Nous avons vérifié que Φ ainsi construite est une trivialisation au-dessus de U. Comme de telles applications peuvent être construites au voisinage de tout point, on en déduit que $p : TM \to M$ est un fibré vectoriel, dont on verra qu'il n'est pas toujours trivialisable.

(iii) Voyons à présent le très bel exemple du *fibré tautologique* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Rappelons que les points de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ sont par définition les droites de $\mathbb{R}^{n+1}$. On pose

$$E_n = \{(X, \xi) \,|\, X \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \xi \in X\} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}.$$

Alors

$$p : E_n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}),\ (X, \xi) \mapsto X$$

admet la structure d'un fibré en droite. On l'appelle le fibré tautologique.

Pour le démontrer, utilisons les cartes affines standard de (U_i, φ_i) de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Des trivialisations au-dessus de voisinages de tous points sont données par les

$$\Phi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R},\ (X, \xi) \mapsto (X, \xi_i).$$

Pour montrer qu'il s'agit d'un difféomorphisme, il suffit de voir que la réciproque est donnée par $(X, t) \mapsto (X, t\varphi_i(X))$.

On verra que ce fibré n'est pas trivialisable. On verra aussi que E_1 est difféomorphe à un ruban de Moebius (peut-être en TD).

◀

Définition 3.10 (Morphisme de fibrés)**.** *Un morphisme entre deux fibrés vectoriels $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ de même base B est une application lisse $f : E \to E'$ telle que :*

(i) le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\ f\ } & E' \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p'} & \\ & B & \end{array}$$

(ii) pour tout $b \in B$, la restriction de f à E_b est une application linéaire entre E_b et E'_b.

Remarque 3.11.

(a) Une composition de morphismes de fibrés est un morphisme de fibré.

(b) Une trivialisation est un isomorphisme de fibré entre $p : p^{-1}(U) \to U$ et le fibré trivial au-dessus de U.

(c) Un morphisme entre deux fibrés triviaux $B \times \mathbb{R}^k$ et $B \times \mathbb{R}^n$ est de la forme $(b, \xi) \mapsto (b, g(b)(\xi))$, où $g : B \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$. Un isomorphisme entre $B \times \mathbb{R}^n$ et $B \times \mathbb{R}^n$ est de la forme ci-dessus avec $g : B \to GL_n(\mathbb{R})$.

Par conséquent, les changements de trivialisations sont des applications de la forme

$$\begin{aligned} \Phi_i \circ \Phi_j^{-1} :& (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k \\ & (x, \xi) \mapsto (x, g_{i,j}(x)(\xi)), \end{aligned}$$

où les $g_{ij} : U_i \cap U_j \to Gl_k(\mathbb{R})$ sont appelées *fonctions de transition.*

On peut montrer qu'un fibré est caractérisé par ses fonctions de transition, ce qui est très utile lorsque l'on cherche à classer les fibrés à isomorphisme près.

◀

Définition 3.12 (Sections)**.** *Une* section *d'un fibré vectoriel $p : E \to B$ est une application lisse $s : B \to E$ telle que pour tout $x \in B$, $s(x) \in E_x$ (autrement dit, $p \circ s = \mathrm{Id}_B$).*

L'application qui à $x \in B$ associe le vecteur nul de E_x est appelée section nulle *du fibré.*

On note souvent $\Gamma(B, E)$ l'ensemble des sections de $p : E \to B$.

La section nulle s_0 est bien une application lisse car pour toute trivialisation $\Phi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$, on a $\Phi \circ s_0(x) = (x, 0)$ pour tout $x \in U$.

Exemples 3.13. (i) Si $E = B \times \mathbb{R}^n \to B$ est un fibré trivial, alors les sections sont les applications de la forme $B \to B \times \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x, f(x))$, où $f : M \to \mathbb{R}^n$ est lisse.

(ii) Si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, alors une section du fibré tangent TM est appelée *champ de vecteurs* sur M. C'est une application de la forme $x \mapsto (x, X(x))$, où $X : M \to \mathbb{R}^n$ est lisse et vérifie $X(x) \in T_x M$ pour tout $x \in M$.

◀

Remarque 3.14. L'ensemble des sections $\Gamma(E, B)$ d'un fibré est un module sur l'anneau $C^\infty(B)$. Autrement dit, on peut additionner deux sections et l'on peut multiplier une section par une fonction. Ces opérations se font point par point, autrement dit, la somme de deux sections s, s' est définie pour chaque $b \in B$, par

$$(s + s')(b) = s(b) + s'(b),$$

en utilisant la structure d'espace vectoriel de E_b. De même, le produit d'une section s par une fonction f est défini pour chaque $b \in B$ par

$$(f \cdot s)(b) = f(b) \cdot s(b),$$

en utilisant à nouveau la structure d'espace vectoriel de E_b. ◀

Définition 3.15 (Repère d'un fibré)**.** *Un repère de $p : E \to B$ est une famille $(s_i)_{i=1,\dots,k}$ de sections telles que pour tout $b \in B$, la famille $(s_1(b), \dots, s_k(b))$ soit une base de la fibre E_b.*

Proposition 3.16. *Un fibré est trivialisable si et seulement si il admet un repère.*

Démonstration. Supposons le fibré trivialisable, au moyen d'une trivialisation Φ. Soit $(e_1, \dots e_k)$ une base de $\mathbb{R}^k$. Alors, les formules

$$s_i(b) = \Phi^{-1}(b, e_i), \quad \forall b \in B$$

définissent un repère de sections $s_1, \dots, s_d$. En effet, pour chaque b, $\Phi^{-1}(b, \cdot) : \mathbb{R}^k \to E_b$ est un isomorphisme donc envoie base sur base.

Réciproquement, si l'on dispose d'un repère $s_1, \dots, s_d$, alors on construit une trivialisation en posant

$$\Phi(b, \xi) = \left(b\,,\ \begin{array}{c}\text{coordonnées de } \xi \text{ dans} \\ \text{la base } (s_i(b))_{i=1,\dots k}\end{array} \right).$$

□

La proposition qui précède est particulièrement utile dans le cas des fibrés en droites. On se convainc ainsi que :

Exemples 3.17. (i) Le fibré tangent à $\mathbb{S}^1$ est trivialisable. Le fibré tangent de $\mathbb{T}^n$ aussi.

(ii) Le Ruban de Möbius, vu comme fibré en droite au-dessus du cercle, n'est pas trivialisable. ◀

On verra dans la suite du cours/TD que le fibré tangent à $\mathbb{S}^2$ n'est pas trivialisable mais que le fibré tangent à $\mathbb{S}^3$ l'est. On sait que les seules sphères dont le fibré tangent est trivialisable sont les sphères $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ et $\mathbb{S}^7$, mais ce résultat n'est absolument pas trivial.

III Les fibrés tangent et cotangent

Avertissement. Comme évoqué précédemment, pour une application lisse entre ouverts d'e.v., l'application tangente $T_x f$ en un point x et la différentielle (au sens du chapitre 1) Df_x s'identifient canoniquement. On utilisera donc dorénavant la notation Df_x, plus courante, y compris pour les applications entre variétés.

Le but de cette partie est de « montrer » que la réunion de tous les espaces tangents à une variété admet une structure de fibré vectoriel, appelée fibré tangent. De même, nous verrons que la réunion des duaux des espaces tangents admet aussi une structure de fibré vectoriel, appelée fibré cotangent.

Nous allons commencer par énoncer un lemme technique qui nous sera utile dans les deux situations mentionnées ci-dessus.

Soit $p : E \to B$ une application où E est un ensemble et B une variété. Soit k un entier. On suppose que :

(a) pour tout $b \in B$, $E_b = p^{-1}(b)$ porte une structure d'espace vectoriel,

(b) il existe un recouvrement de B par des ouverts $(U_i)_{i\in I}$ et une famille d'applications $(\Phi_i)_{i\in I}$ avec pour tout $i \in I$, $\Phi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^k$ telles que :
   — pour tout $i \in I$ et tout $b \in U_i$, $\Phi_i|_{E_b}$ est un isomorphisme linéaire entre E_b et $\{b\} \times \mathbb{R}^k$,
   — pour tout $i, j \in I$, $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k$ est un difféomorphisme.

On sait que si $p : E \to B$ est un fibré vectoriel, alors ces conditions sont remplies. Réciproquement :

Lemme 3.18. *Sous les hypothèses (a) et (b) ci-dessus, E admet une unique structure de variété telle que pour tout i, $p^{-1}(U_i)$ est un ouvert de E et Φ_i est un difféomorphisme. Pour cette structure, $p : E \to B$ est un fibré vectoriel.*

Démonstration. On commence par montrer que les parties $\mathcal{O}$ de E, telles que $\Phi_i(\mathcal{O} \cap p^{-1}(U_i))$ est un ouvert de $U_i \times \mathbb{R}^k$ pour tout $i \in I$, forment une topologie sur E, séparée et à base dénombrable.

Pour tout $i \in I$ et toute carte (V, ψ) de B, avec V incluse dans l'un des U_i, on considère l'application

$$\Psi : p^{-1}(V) \to \psi(V) \times \mathbb{R}^k, \quad (x, \xi) \mapsto (\psi \times \mathrm{Id}) \circ \Phi_i(x, \xi).$$

On montre que les Ψ^{-1} ainsi construits forment un atlas de E, qui devient donc une variété différentiable. Il ne reste alors qu'à vérifier que $p : E \to B$ est un fibré. □

Le fibré tangent. Considérons l'ensemble :

$$TM = \{(x, v) \,|\, x \in M,\, v \in T_xM\}.$$

On note $\pi : TM \to M$, $(x, v) \mapsto x$ la projection canonique.

Les conditions (a) et (b) du lemme précédent sont satisfaites par $\pi : TM \to M$. En effet, comme famille (Φ_i), on peut prendre les applications $\pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$, $(x, v) \mapsto (x, D\phi_x(v))$ où (U, ϕ) est une carte de M.

On admettra la proposition suivante (ou on lira la partie grisée si l'on est curieux) :

Proposition 3.19. *L'espace TM admet une unique structure de variété telle que pour toute carte (U, ϕ) de M,*
(a) $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de TM,
(b) l'application $\pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$, $(x, v) \mapsto (x, D\phi_x(v))$ est un difféomorphisme.
Avec cette structure de variété, $\pi : TM \to M$ est un fibré vectoriel appelé fibré tangent *à M.*

Quand le fibré $TM \to M$ est trivialisable, on dit que la variété M est *parallélisable.*

Il est possible de faire une construction duale de la précédente.

Le fibré cotangent. On note T^*_xM l'espace dual de T_xM, constitué des formes linéaires sur T_xM. On considère cette fois l'ensemble

$$T^*M = \{(x, p) \,|\, x \in M,\, p \in T^*_xM\},$$

et on note encore $\pi : T^*M \to M$ la projection sur M.

Le lemme énoncé plus haut peut encore être appliqué pour démontrer :

Proposition 3.20. *L'espace T^*M admet une unique structure de variété telle que pour toute carte (U, ϕ) de M,*
(a) $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de T^*M,
(b) l'application $\pi^{-1}(U) \to U \times (\mathbb{R}^n)^*$, $(x, p) \mapsto (x, p \circ (D\phi_x)^{-1})$ est un difféomorphisme.
Avec cette structure de variété, $\pi : T^*M \to M$ est un fibré vectoriel appelé fibré cotangent *à M.*

Nous allons maintenant nous intéresser aux sections de ces fibrés.

IV Champs de vecteurs, formes différentielles de degré 1.

IV.1 Definitions

Définition 3.21. *Une section de TM est appelée* champ de vecteurs *sur M. Une section de T^*M est appelée* forme différentielle *de degré 1 (ou simplement 1-forme) sur M.*

Remarque 3.22. Un champ de vecteurs (resp. une 1-forme) est toujours de la forme $x \in M \mapsto (x, X(x))$ avec $X(x) \in T_xM$ (resp. $x \mapsto (x, \eta(x))$ avec $\eta(x) \in T^*_xM$), mais l'on note souvent abusivement ces applications X et η, confondant ainsi $X(x)$ et $(x, X(x))$ (resp. $\eta(x)$ et $(x, \eta(x))$). ◀

Exemples 3.23. (i) L'expression $X(x,y) = (-y,x)$ définit un champ de vecteurs partout non nul sur $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2+y^2=1\}$, puisque $(-y,x) \in T_{(x,y)}\mathbb{S}^1 = (x,y)^\perp$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{S}^1$.

(ii) Sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, on peut parler de champs de vecteurs « constants » puisque $TU \simeq U \times \mathbb{R}^n$: ce sont les champs de la forme $x \mapsto (x,v)$ avec $v \in \mathbb{R}^n$ indépendant de x, qu'on appellera simplement « champ constant égal à v ».

(iii) On verra que les champs constants égaux aux vecteurs de la base canonique $e_1,\dots,e_n$ sur $\mathbb{R}^n$ « passent au quotient » en des champs de vecteurs sur $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ formant un repère de $T\mathbb{T}^n$.

◀

Une famille fondamentale d'exemples de 1-formes différentielle est donnée par les :

Différentielles de fonctions. Si $f : M \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse alors, $df : M \to T^*M$, $x \mapsto (x, Df_x)$ est une forme différentielle de degré 1.

En effet, Df_x est une application linéaire de T_xM dans $T_x\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$, i.e. un élément de $T_x^*M = (T_xM)^*$. Vérifions le caractère lisse. Soit (U,ϕ) une carte de M. On sait que $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times (\mathbb{R}^n)^*$, $(x,\eta) \mapsto (x, \eta \circ (D\phi_x)^{-1})$ est un difféomorphisme. Or, $\Phi \circ df : x \mapsto (x, Df_x \circ (D\phi_x)^{-1}) = (x, D(f\circ\phi^{-1})_{\phi(x)})$ est lisse $U \to U \times (\mathbb{R}^n)^*$ (la deuxième composante est la composée de $D(f\circ\phi^{-1}) : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ qui est lisse car $f\circ\phi^{-1}$ l'est, avec $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, lisse également). Ceci montre la lissité de df au voisinage de tout point.

Voyons maintenant quelques remarques et notions en rapport avec ces objets.

Crochet de dualité. En général, si l'on se donne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et son dual E^*, on appelle *crochet de dualité* l'application $E^* \times E \to \mathbb{K}$, $(\ell, v) \mapsto \langle \ell, v\rangle := \ell(v)$. En utilisant ce crochet dans chacun des espaces tangent, on obtient un crochet de dualité entre formes différentielles de degré 1 et champs de vecteurs. Soit $\eta \in \Gamma(M, T^*M)$ une forme différentielle de degré 1 sur M et $X \in \Gamma(M, TM)$ un champ de vecteur sur M, alors leur crochet de dualité est la fonction :

$$\langle \eta, X\rangle : M \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle \eta(x), X(x)\rangle$$

(où l'on a fait le même abus que dans la remarque 3.22).

C'est une fonction lisse. En effet, pour toute carte (U,ϕ) de M, on sait que $x \in U \mapsto (x, \eta(x))$ (par hypothèse) et $(x,p) \in \pi^{-1}(U) \mapsto (x, p\circ(D\phi_x)^{-1})$ (par définition de la structure lisse sur T^*M) sont lisses donc par composition $x \in U \mapsto (x, \eta(x)\circ(D\phi_x)^{-1}) \in U \times (\mathbb{R}^n)^*$ est lisse, et il en est de même pour $x \in U \mapsto (x, D\phi_x(X(x)))$. Comme le crochet $(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est lisse (application bilinéaire), on déduit de la formule

$$\langle \eta(x), X(x)\rangle = \langle \eta(x)\circ(D\phi_x)^{-1}, D\phi_x(X(x))\rangle$$

la lissité de $\langle \eta, X\rangle$.

Transport de champs de vecteurs et de formes différentielles de degré 1 Soit $\phi : M \to N$ un difféomorphisme, alors pour tout champ de vecteurs X sur M , la formule

$$\boxed{\phi_* X(y) = D\phi_{\phi^{-1}(y)} X(\phi^{-1}(y))}$$

définit un champ de vecteurs sur N. On dit que $\phi_* X$ est le *poussé en avant* de X par ϕ.

Soit $f : M \to N$ une application lisse (non nécessairement un difféomorphisme), alors pour toute forme différentielle de degré 1, η, sur N, la formule

$$\boxed{f^*\eta(x)(\xi) = \eta(f(x))(Df_x(\xi))}$$

définit une forme différentielle de degré 1 sur M. On dit que $f^*\eta$ est la forme *tirée en arrière* de η par f.

Nous verrons des exemples concrets dans le dernier paragraphe de ce chapitre.

IV.2 Champs de vecteurs et dérivations

Définition 3.24. *Pour $f \in C^\infty(M)$ une fonction et $X \in \Gamma(M, TM)$ un champ de vecteurs, on note*

$$X \cdot f = \langle df, X \rangle \qquad \in C^\infty(M).$$

La proposition suivante donne un point de vue algébrique sur les champs de vecteurs : on peut les identifier à des dérivations sur l'algèbre des fonctions lisses de notre variété.

Définition 3.25. *Une* dérivation *de $C^\infty(M)$ est une application linéaire $\delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ vérifiant l'identité de Leibniz : pour tout $f, g \in C^\infty(M)$,*

$$\delta(fg) = f\,\delta(g) + g\,\delta(f).$$

Remarque 3.26.

(a) Si δ est une dérivation, alors δ s'annule sur les fonctions constantes. En effet, pour la fonction constante égale à 1, on a $\delta(1) = \delta(1^2) = 1 \cdot \delta(1) + 1 \cdot \delta(1) = 2\delta(1)$ par la formule de Leibniz, d'où $\delta(1) = 0$, et par linéarité, δ s'annule sur toutes les fonctions constantes.

(b) On peut également transporter les dérivations. En effet, si $\phi : M \to N$ est un difféomorphisme, et δ une dérivation sur $C^\infty(M)$, alors la formule

$$\phi_*\delta(f) = (\delta(f \circ \phi)) \circ \phi^{-1}$$

définit une dérivation sur $C^\infty(N)$.

◀

On admettra le résultat suivant (preuve en fin de paragraphe pour les curieux) :

Théorème 3.27. *L'application $X \cdot : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ est une dérivation. Réciproquement, toute dérivation $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ est de la forme $X\cdot$ pour un unique champ de vecteurs X.*

Remarquons que si $\delta = X\cdot$, alors $\phi_*\delta = (\phi_* X)\cdot$ pour tout difféomorphisme $\phi : M \to N$.

Un cas particulier fondamental concerne la correspondance champs de vecteurs constants / dérivées partielles. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Si X_i désigne le champ de vecteurs constant égal au $i$ème vecteur de la base canonique, étant donné une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$(X_i \cdot f)(x) = Df_x(X_i(x)) = Df_x(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

ce qui explique la notation courante $\frac{\partial}{\partial x_i}$ pour désigner le champ X_i, selon laquelle l'égalité ci-dessus se réécrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Mais attention ! Cette notation sera utilisée dans un sens un peu différent dans le paragraphe suivant.

Ces champs de vecteurs sont particuliers au sens où les dérivations correspondantes commutent ($\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}$). En général, le défaut de commutativité est matérialisé par le « crochet de Lie », qui est aussi une dérivation / un champ de vecteurs, et dont on verra une interprétation plus géométrique au chapitre suivant.

Définition 3.28 (crochet de Lie)**.** *Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs X et Y est l'unique champ noté $[X, Y]$ tel que pour toute fonction f sur M, on ait*

$$[X, Y] \cdot f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f)).$$

Dans la définition ci-dessus, l'existence et l'unicité du champ de vecteurs $[X, Y]$ vient du fait que l'application $f \mapsto X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f))$ est une dérivation de $C^\infty(M)$.

Propriété 3.29. *L'application $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ a les propriétés suivantes : elle est bilinéaire, antisymétrique et vérifie l'identité de Jacobi :*

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

Remarque 3.30. Un espace vectoriel muni d'une application bilinéaire antisymétrique et vérifiant l'identité de Jacobi est appelé une *algèbre de Lie*. Ainsi le crochet de Lie des champs de vecteurs munit $\Gamma(M, TM)$ d'une structure d'algèbre de Lie.

Si G est un *groupe de Lie*, c'est à dire un groupe munie d'une structure différentiable pour laquelle la composition et le passage à l'inverse sont des applications lisses, alors on peut montrer que l'espace tangent à l'élément neutre, T_eG admet une structure d'algèbre de Lie. Exemples : $G = Gl_n(\mathbb{R})$, $T_eG = M_n(\mathbb{R})$, ou $G = O_n(\mathbb{R})$, $T_eG = \{\text{matrices antisymétriques}\}$, munis du crochet de Lie des matrices. ◀

Preuve du théorème 3.27. L'identité de Leibniz pour $X\cdot$ est une conséquence immédiate de l'identité $d(fg) = f\,dg + g\,df$. Montrons maintenant que l'application $X \mapsto X\cdot$, de l'espace des champs de vecteurs dans celui des dérivations est une bijection.

Pour montrer que c'est une injection, supposons que $X \cdot f = 0$ pour tout f. On veut montrer que $X = 0$. Dans le cas contraire, il existerait x tel que $X(x) \neq 0$. Alors on pourrait trouver une fonction f telle que $df_x(X(x)) \neq 0$, ce qui contredirait l'hypothèse. Pour construire une telle fonction, on utilise une carte ϕ en x. Soit ℓ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ qui ne s'annule pas sur $D\phi_x(X(x))$ et soit g une fonction sur $\mathbb{R}^n$ qui vaut 1 au voisinage de 0 et à support compact inclus dans l'ouvert image de ϕ. Alors $f = (g\ell) \circ \phi$ est une fonction définie sur le domaine de ϕ dont la différentielle en x est $X(x)$. Comme elle est à support compact, on peut l'étendre par 0 en une fonction sur M.

Montrons maintenant que c'est une surjection. Pour cela, commençons par le montrer dans le cas où $M = B$ est une boule de $\mathbb{R}^n$. Soit δ une dérivation de $C^\infty(B)$. Pour toute fonction $f \in C^\infty(B)$, tous $x, y \in B$, on a

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(t(x-y)+y)\,dt = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t(x-y)+y)\,dt,$$

donc en posant $h^i_y(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t(x-y)+y)\,dt$, on a d'une part $h^i_y(y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)$, et d'autre part :

$$f(x) = f(y) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)h^i_y(x).$$

Nous allons appliquer pour y fixé la dérivation δ à cette formule :

$$\delta(f)(x) = \sum_{i=1}^{n}\left((x_i - y_i)\delta(h^i_y)(x) + \delta(e^*_i)(x)h^i_y(x)\right),$$

où e^*_i désigne l'application $x \mapsto x_i$. En posant $g_i = \delta(e^*_i)$, on obtient :

$$\delta(f)(y) = \sum_{i=1}^{n} g_i(y)\frac{\partial f}{\partial x_i}(y).$$

Autrement dit, en posant $X = (g_1, \dots g_n)$, on a $\delta(f) = X \cdot f$. Nous avons bien montré la surjectivité dans le cas où $M = B$.

Montrer la surjectivité en général va demander un peu de travail supplémentaire. Commençons par un lemme.

Lemme 3.31. *Soient δ une dérivation, et f, g deux fonctions lisses sur M. Si f coïncide avec g au voisinage d'un point x, alors $\delta(f)(x) = \delta(g)(x)$.*

Démonstration. Soit ρ une fonction qui vaut 1 au voisinage de x et est à support dans l'ensemble des points où f égale g. Alors $\rho f = \rho g$, donc $\delta(\rho f) = \delta(\rho g)$ et par l'identité de Leibniz,

$$\rho\delta(f) + f\delta(\rho) = \rho\,\delta(g) + g\,\delta(\rho).$$

En évaluant en x, on obtient

$$\delta(f)(x) + f(x)\delta(\rho)(x) = \delta(g)(x) + g(x)\delta(\rho)(x).$$

Comme $f(x) = g(x)$, on obtient bien $\delta(f)(x) = \delta(g)(x)$. □

Soit δ une dérivation de $C^\infty(M)$ et U un ouvert. Grâce au lemme, on peut définir $\delta_U : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ par la formule $\delta_U(f)(x) = \delta(g)(x)$ pour toute fonction $g \in C^\infty(M)$ qui coïncide avec f au voisinage de x. On peut vérifier que δ_U définit une dérivation sur $C^\infty(U)$. Il est clair que si $V \subset U$, alors $(\delta_U)_V = \delta_V$.

Soit (U_i, ϕ_i) un atlas de cartes tel que $\phi_i(U_i) = B$ (une boule fixée de $\mathbb{R}^n$) pour tout i. Alors on a vu que la dérivation $(\phi_i)_*\delta_{U_i}$ vient d'un champ de vecteurs Y_i sur B. Par conséquent, δ_{U_i} vient du champ du vecteur $X_i = (\phi_i^{-1})_*Y_i$. L'injectivité montrée plus haut implique que sur $U_i \cap U_j$, X_i coïncide avec X_j, pour tous i, j. Cela permet de définir un champ de vecteurs X par $X = X_i$ sur chaque U_i.

Alors, pour toute fonction f et tout $x \in M$, on peut écrire

$$\delta(f)(x) = \delta_{U_i}(f|_{U_i})(x) = X_i \cdot f|_{U_i}(x) = X \cdot f(x),$$

où i est n'importe quel indice tel que $x \in U_i$. Nous avons montré que $\delta = X\cdot$ et donc la surjectivité. □

IV.3 Ecriture locale des champs de vecteurs et des formes différentielles de degré 1

On appelle *coordonnées locales* les applications coordonnées d'une carte, autrement dit une famille d'application $x_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ telles que l'application $p \mapsto (x_1(p), \dots, x_n(p))$, $U \to \mathbb{R}^n$ soit un difféomorphisme sur son image. (Attention ! Noter qu'ici $x_1, \dots, x_n$ ne désignent plus les coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^n$ mais des fonctions de U dans $\mathbb{R}$: les fonctions « coordonnées cartésiennes des composantes de $\phi(p)$ » où ϕ est la carte concernée).

Lemme 3.32. *Pour tout système de coordonnées locales $(U, x_1, \dots, x_n)$ de M, la famille de formes différentielles $(dx_1, \dots, dx_n)$ est un repère de T^*M au-dessus de U.*

Démonstration. Notons $\phi = (x_1, \dots, x_n)$. Pour tout i et tout $x \in U$, $dx_i(x)$ est la forme linéaire sur T_xM qui à un vecteur v associe la i-ème coordonnée de $D\phi_x(v)$, c'est-à-dire $e_i^* \circ D\phi_x(v)$ où e_i^* désigne le i-ème élément de la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. La famille $(dx_i(x))$ est donc l'image de la base (e_i^*) par l'isomorphisme $\ell \mapsto \ell \circ D\phi_x$. □

Remarquons que l'on a montré dans la démonstration qui précède la formule :

$$dx_i = \phi^* e_i^*,$$

où l'on a noté abusivement e_i^* la 1-forme constante égale à e_i^* sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.33. *Etant donné un système de coordonnées locales $(U, x_1, \dots, x_n)$, on note $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ les champs de vecteurs tels que pour tout $x \in U$, la famille $(dx_1(x), \dots, dx_n(x))$ soit la base duale de la famille $(\frac{\partial}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(x))$ de vecteurs de T_xM.*

Autrement dit, en notant $\phi = (x_1, \dots, x_n)$, on a pour tout i et tout $x \in U$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x) = (D\phi_x)^{-1}(e_i) = ((\phi^{-1})_* e_i)_x$$

où l'on a noté abusivement e_i le champ de vecteurs constant égal à e_i sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3.34. Sur $\mathbb{R}^n$, si l'on pense à x_i, pour $i = 1, \dots, n$, comme à l'*application* (linéaire) qui à $p \in \mathbb{R}^n$ associe sa $i$ème composante, on obtient un système de coordonnées au sens précédent, pour lequel les dx_i sont les 1-formes constantes égales aux e_i^* et donc les $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sont les champs constants égaux aux e_i, ce qui est cohérent avec la fin du paragraphe précédent.

Les coordonnées polaires sont quant à elles pensées comme les applications $r, \theta : \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\}) \to]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ qui sont reliées aux coordonnées cartésiennes par les relations

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

i.e. telles que l'application (r, θ) soit la réciproque de l'application $\phi : (\rho, t) \mapsto (\rho\cos t, \rho\sin t)$ dont la jacobienne est la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\rho\sin t \\ \sin t & \rho\cos t \end{pmatrix}.$$

On peut donc calculer dr et $d\theta$ en inversant cette matrice, ou alors en raisonnant comme suit (ce qui est équivalent). Par hypothèse, $x = r\cos\circ\,\theta$ et $y = r\sin\circ\,\theta$, en tant que fonctions,

mais bien sûr, on préfère l'écriture $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Les formules de compositions des différentielles donnent :

$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$$
$$dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta.$$

En résolvant, on trouve :

$$\boxed{\begin{array}{c} dr = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\,dx + y\,dy) \\ d\theta = \frac{1}{x^2+y^2}(y\,dx - x\,dy). \end{array}}$$

Les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$ forment le repère dual de dr et $d\theta$. On obtient :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \theta} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}}$$

◀

Rappelons que dans un espace vectoriel E muni d'une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de base duale $(f_1^*, \ldots, f_n^*)$, on a pour tout $v \in E$ et tout $\ell \in E^*$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle f_i^*, v\rangle f_i, \quad \text{et} \quad \ell = \sum_{i=1}^{n} \langle \ell, f_i\rangle f_i^*.$$

On en déduit les formules suivantes exprimées à l'aide de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$. Pour tout champ de vecteurs X,

$$\boxed{X = \sum_{i=1}^{n} \langle dx_i, X\rangle \frac{\partial}{\partial x_i}}$$

et pour toute forme différentielle de degré 1,

$$\boxed{\alpha = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \alpha, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle dx_i}$$

En particulier, la dernière formule donne pour toute fonction f,

$$\boxed{df = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot f\right) dx_i}$$

ce qui justifie les choix de notations.

Chapitre 4

Champs de vecteurs et flots

I Champs de vecteurs et équations différentielles ordinaires

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $X : \mathbb{R} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs sur $\mathcal{O}$, dépendant du temps. Nous utiliserons la notation $X_t(x) = X(t, x)$. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, X_t est donc un champ de vecteurs sur $\mathcal{O}$.

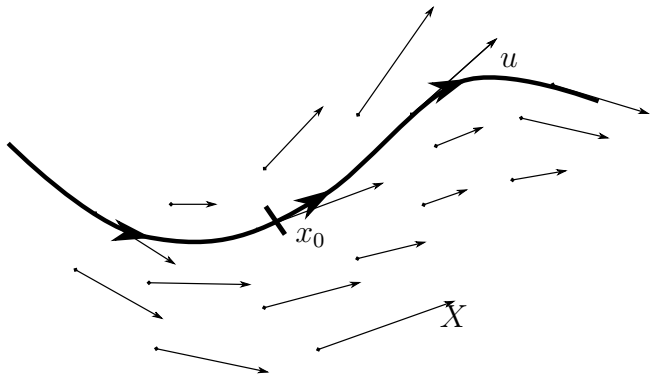
Théorème 4.1 (Cauchy-Lipschitz)**.** *Pour tous $x_0 \in \mathcal{O}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ (condition initiale), il existe un intervalle ouvert I contenant t_0, et une application $u : I \to \mathcal{O}$ lisse telle que*

$$\begin{cases} \forall t \in I, u'(t) = X_t(u(t)), \\ u(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

De plus, si (J, v) est un intervalle et une fonction vérifiant les mêmes conditions alors $u = v$ sur $I \cap J$.

Autrement dit, on a existence et unicité locale des solutions au système (4.1) (appelé *problème de Cauchy*).

Lorsque X ne dépend pas du temps t, on dit que X est un champ de vecteurs *autonome*. L'image de u s'appelle *courbe intégrale* ou *trajectoire* ou *orbite* de X. Si $X(x_0) \neq 0$, on verra qu'il s'agit effectivement d'une courbe (sous-variété de dimension 1) au voisinage de x_0 et que cette courbe est partout tangente au champ X.



Le résultat suivant signifie que dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, la solution u au problème de Cauchy, dépend de manière lisse des données initiales t_0 et x_0.

Théorème 4.2 (dépendance en les conditions initiales)**.** *Pour tous $a \in \mathcal{O}$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$, il existe un ouvert $\Omega \subset \mathcal{O}$ contenant a, un intervalle I contenant τ et une application lisse $u : \Omega \times I \times I \to \mathcal{O}$ lisse telle que*

$$\begin{cases} \forall t_0, t \in I, \forall x_0 \in \Omega, & \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0, t) = X_t(u(x_0, t_0, t)), \\ \forall t_0 \in I, \forall x_0 \in \Omega, & u(x_0, t_0, t_0) = x_0. \end{cases}$$

Important : Les deux théorèmes qui précèdent sont des énoncés locaux, ils restent donc vrais si l'on remplace $\mathcal{O}$ par une variété M et X par un champ de vecteurs (dépendant du temps) sur M, ce grâce au fait suivant : si ψ est un difféomorphisme (par exemple une carte), alors u est solution de

$$\begin{cases} \forall t \in I, u'(t) = X_t(u(t)), \\ u(t_0) = x_0. \end{cases}$$

si et seulement si $\psi \circ u$ est solution de

$$\begin{cases} \forall t \in I, v'(t) = \psi_* X_t(v(t)), \\ v(t_0) = \psi(x_0). \end{cases}$$

Proposition-définition 4.3 (solutions maximales)**.** *Soit J la réunion de tous les intervalles de définition des solutions du problème de Cauchy (4.1). Alors il existe une solution définie sur J. De plus, toute autre solution est une restriction de celle-ci à un intervalle plus petit. Cette solution est appelée* solution maximale *du problème de Cauchy.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si $u_1 : J_1 \to M$ et $u_2 : J_2 \to M$ sont deux solutions alors $u_1 = u_2$ sur $J_1 \cap J_2$. On pourra en effet alors définir $u(t)$ pour tout $t \in J$ comme la valeur de n'importe quelle solution définie au voisinage de t.

Soit $K = \{t \in J_1 \cap J_2 \,|\, u_1(t) = u_2(t)\}$. Bien sûr, K est non-vide car contient t_0. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, K est ouvert car on a unicité sur les petits intervalles. Enfin, par continuité de u_1 et u_2, K est fermé dans $J_1 \cap J_2$. La connexité de $J_1 \cap J_2$ implique donc : $K = J_1 \cap J_2$, ce qu'il fallait démontrer. □

L'intervalle de définition des solutions maximales n'est pas toujours $\mathbb{R}$ tout entier. La proposition suivante affirme que la seule possibilité pour que cet intervalle ne s'étende pas jusqu'à l'infini, est que la solution "parte à l'infini en temps fini" ou "explose en temps fini".

Proposition 4.4 (explosion en temps fini)**.** *On suppose que l'intervalle de définition de la solution maximale au problème de Cauchy $u : J \to M$ vérifie $\sup J < +\infty$. Alors, pour tout compact K de M, il existe un temps $T(K) \in J$ tel que*

$$\forall t \in J,\ t \geqslant T(K), \quad u(t) \notin K.$$

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons donc qu'il existe une suite de temps $(t_n) \in J$ convergeant vers $\tau = \sup J$, telle que pour tout n, $u(t_n) \in K$. Alors, par compacité, quitte à extraire une sous-suite, $u(t_n)$ converge vers un point $a \in K$. On applique alors la version à paramètre du théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 4.2), au voisinage du point

(τ, a) : il existe une application $v : \Omega \times I \times I \to M$, avec $a \in \Omega$, $\tau \in I$, telle que $t \mapsto v(x, s, t)$ est solution de l'équation différentielle et $v(x, s, s) = x$. Par unicité, on a pour n assez grand,

$$\forall t \in I \cap J, \quad v(u_n, t_n, t) = u(t).$$

En passant à la limite $n \to \infty$, on a donc $v(a, \tau, t) = u(t)$ pour tout $t \in I \cap J$, on peut donc prolonger u au-delà de τ par v, et cela contredit la maximalité. □

Exemple 4.5. Considérons le champ de vecteurs $X(x) = x^2$ défini sur $\mathbb{R}$. Les solutions au problème de Cauchy sont d'une part la solution nulle, et d'autre part les fonctions $x : t \mapsto \frac{1}{\frac{1}{t_0+\frac{1}{x_0}}-t}$. Toutes ces solutions explosent en temps fini. Par exemple, la solution qui part de 1 au temps 0 est $t \mapsto \frac{1}{1-t}$, temps vers l'infini lorsque $t \to 1$. ◀

La proposition qui précède a un corollaire très utile.

Corollaire 4.6. *Si le champ de vecteurs X est à support compact (par exemple si M est compacte), alors la solution maximale au problème de Cauchy est définie sur $\mathbb{R}$.*

Lorsque les solutions du problème de Cauchy sont définies sur $\mathbb{R}$ pour toutes conditions initiales, on dit que le champ de vecteurs X est *complet*.

Démonstration. En dehors du support de X, les solutions au problème de Cauchy sont les solutions constantes qui sont bien définis sur $\mathbb{R}$. Par unicité, il n'y a aucun solution non-constante qui intersecte le complémentaire du support de X. Par conséquent, aucune solution ne sort du support de X. Si celui-ci est compact, les solutions sont effectivement définies sur $\mathbb{R}$. □

II Flot d'un champ de vecteurs

Soit X un champ de vecteurs dépendant du temps que l'on suppose complet.

Définition 4.7 (Flot d'un champ de vecteurs)**.** *On note $t \mapsto \phi_s^t(x)$ la solution maximale du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = X_t(u(t)), \\ u(s) = x. \end{cases}$$

La famille d'applications $(\phi_s^t)_{s,t\in\mathbb{R}} : M \to M$ s'appelle le flot du champ de vecteurs X.

Lemme 4.8. *Si X est un champ autonome, alors $\phi_s^t = \phi_0^{t-s}$.*

On utilisera donc la notation allégée $\phi^t = \phi_0^t$ lorsque X est autonome.

Démonstration. Si $u : \mathbb{R} \to M$ est solution de $u'(t) = X_t(u(t))$, alors $v : t \mapsto u(t - s)$ est solution de

$$v'(t) = X_{t-s}(v(t)). \tag{4.2}$$

Comme X est autonome, $v'(t) = X(v(t))$. Par ailleurs, $v(s) = x$ si et seulement si $u(0) = x$. Autrement dit, si $u(t) = \phi_0^t$, alors $v(t) = \phi_s^t$. Ce qui montre bien $\phi_s^t = \phi_0^{t-s}$. □

Enonçons les propriétés suivantes du flot.

Proposition 4.9 (propriétés du flot)**.** *(a) Pour tous $s,t \in \mathbb{R}$, l'application ϕ_s^t est un difféomorphisme de M.*

(b) Pour tous $s,t,r \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\phi_s^s = \mathrm{Id}, \qquad \phi_r^t \circ \phi_s^r = \phi_s^t}$$

En particulier, ϕ_t^s est l'inverse de ϕ_s^t.

Le (b) de cette proposition énonce le fait intuitif que si l'on met bout à bout deux courbes intégrales de X, on obtient encore une courbe intégrale.

Donnons tout de suite une conséquence :

Corollaire 4.10. *Si X est autonome, l'application $\mathbb{R} \to \mathrm{Diff}(M)$, $t \mapsto \phi^t$ est un morphisme de groupe (on dit que c'est un* groupe à un paramètre *de difféomorphismes).*

Démonstration. En utilisant le lemme et la proposition qui précèdent, on peut écrire

$$\phi^s \circ \phi^t = \phi_0^s \circ \phi_0^t = \phi_t^{t+s} \circ \phi_0^t = \phi_0^{t+s} = \phi^{t+s}.$$

□

Démonstration. Montrons d'abord le point (b). L'identité $\phi_s^s(x) = x$ est évidente par définition du flot. Soit $x \in M$. Alors, en posant $y = \phi_s^r(x)$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\phi_r^t \circ \phi_s^r(x)) = \frac{d}{dt}\phi_r^t(y) &= X_t(\phi_r^t(y)) \\ &= X_t(\phi_r^t \circ \phi_s^r(x)).\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\phi_r^r \circ \phi_s^r(x) = \phi_s^r(x)$. Nous avons montré que $t \mapsto \phi_r^t \circ \phi_s^r(x)$ et $t \mapsto \phi_s^t(x)$ sont solutions du même problème de Cauchy, donc sont égales.

Montrons maintenant le point (a). Fixons $s \in \mathbb{R}$ et $x \in M$. Le théorème 4.2 (dépendance en les conditions initiales) affirme que pour t suffisamment proche de s, l'application ϕ_s^t est lisse au voisinage de x (Avec les notations du théorème, c'est l'application $x \mapsto u(x,s,t)$). Nous voudrions montrer que c'est encore vrai pour t quelconque.

Soit $T = \sup\{\tau \,|\, \phi_s^t \text{ est lisse au voisinage de } x \text{ pour tout } t \in [s,\tau]\}$. Supposons que T est fini. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut écrire

$$\phi_s^{T+\varepsilon}(x) = \phi_{T-\varepsilon}^{T+\varepsilon} \circ \phi_s^{T-\varepsilon}(x).$$

Par hypothèse, il existe $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit tel que $\phi_s^{T-\varepsilon}$ soit lisse au voisinage de x. Pour ε assez petit, $\phi_{T-\varepsilon}^{T+\varepsilon}$ est lisse également par le théorème 4.2. Ceci implique alors que $\phi_s^{T+\varepsilon}$ est lisse, contradiction. Nous avons montré que $T = \infty$.

On démontre de même que ϕ_s^t est lisse pour $t \in]-\infty, 0]$.

Nous avons montré que ϕ_s^t est lisse. Comme par ailleurs, nous savons que son inverse est ϕ_t^s et est donc lisse aussi, on en déduit qu'il s'agit bien d'un difféomorphisme. □

Nous avons montré que tout champ de vecteurs donne naissance à un chemin lisse de difféomorphismes. Ce résultat a une réciproque.

Proposition 4.11. *Soit $(h^t)_{t\in\mathbb{R}}$ une famille de difféomorphismes telle que $\mathbb{R}\times M \to M$, $(t,x)\mapsto h^t(x)$ soit lisse et $h^0 = \mathrm{Id}$. Alors il existe un unique champ de vecteurs X (dépendant du temps) de flot ϕ_s^t tel que pour tout $t\in\mathbb{R}$ on ait $h^t = \phi_0^t$.*

Si $t\mapsto h^t$, $\mathbb{R}\to \mathrm{Diff}(M)$ est un morphisme de groupe, alors X est autonome.

Démonstration. Un tel champ doit vérifier $\frac{d}{dt}h^t(x) = X_t(h^t(x))$ pour tout t et tout x. Donc

$$\boxed{X_t = \left(\frac{d}{dt}h^t(x)\right)\circ (h^t(x))^{-1}}$$

est l'unique champ qui convienne.

Si h^t est un groupe à un paramètre, en dérivant par rapport à s, à $s=0$ l'identité $h^{s+t} = h^s\circ h^t$, on obtient $\frac{d}{dt}h^t(x) = \frac{d}{ds}h^s(x)|_{s=0}\circ h^t$. On en déduit l'identité

$$\boxed{X_t = \frac{d}{ds}h^s(x)|_{s=0}}$$

qui implique que X ne dépend pas de t. □

Conjugaison et transport de champ de vecteurs Soit X un champ de vecteurs (dépendant du temps) sur M et $\psi : M\to N$ un difféomorphisme. Rappelons que le champ de vecteurs poussé en avant de X par ψ est défini par :

$$\psi_* X_t(x) = d\psi_{\psi^{-1}(x)}\cdot X_t(\psi^{-1}(x)).$$

On peut aussi transporter de manière naturelle les difféomorphismes de M par ψ. Ainsi, si $\phi\in\mathrm{Diff}(M)$, alors l'application *conjuguée* $\psi\circ\phi\circ\psi^{-1}$ est un difféomorphisme de N.

La proposition qui suit affirme que ces deux manières de transporter des objets sont compatibles avec la notion de flot.

Proposition 4.12. *Le flot de $\psi_* X$ est $\psi\circ\phi_s^t\circ\psi^{-1}$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la remarque suivante : u est solution du problème

$$\begin{cases} u'(t) = X_t(u(t)), \\ u(s) = x, \end{cases}$$

si et seulement si $v = \psi\circ u$ est solution du problème

$$\begin{cases} v'(t) = \psi_* X_t(u(t)), \\ v(s) = \psi(x). \end{cases}$$

La solution du premier problème est $t\mapsto \phi_s^t(x)$ et la solution du deuxième problème est $t\mapsto \rho_s^t\circ\psi(x)$, où ρ_s^t désigne le flot de $\psi_* X$. Par unicité, on en déduit bien $\psi\circ\phi_s^t(x) = \rho_s^t\circ\psi(x)$. □

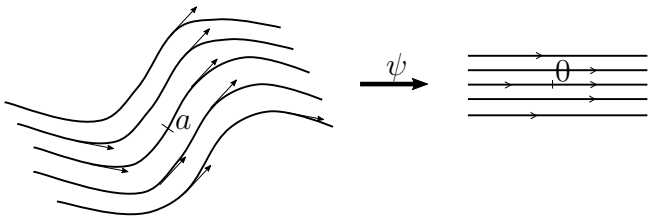
La proposition que nous venons de démontrer est très utile pour calculer les flots en pratique. Elle permet aussi d'utiliser les cartes pour l'étude locale des flots.

Le résultat suivant affirme que la dynamique locale, au voisinage des points où le champ de vecteurs ne s'annule pas, est très simple.

Théorème 4.13 (Redressement d'un champ de vecteurs)**.** *Soit X un champ de vecteur autonome et a un point de M tel que $X(a) \neq 0$. Alors, il existe des coordonnées locales $(U, x_1, \ldots, x_n)$ au voisinage de a telles que $X|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}$.*

Autrement dit, le flot de X est localement conjugué au flot rectiligne $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1 + t, x_2, \ldots, x_n)$.

La condition $X|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}$ peut aussi être formulée comme suit. En notant $\psi = (x_1, \ldots x_n)$, on sait que l'on a par définition $\psi_* \frac{\partial}{\partial x_1} = e_1$, le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Donc la condition $X|_U = \frac{\partial}{\partial x_1}$ est équivalente à $\psi_* X = e_1$.



Démonstration. On choisit une carte (V, ψ) en a. Quitte à la composer par une application linéaire bien choisie, on peut supposer que $Y = \psi_* X$ vérifie $Y(0) = e_1$. On pose $f(s_1, \ldots, s_n) = \phi^{s_1}(0, s_2, \ldots, s_n)$, où (ϕ^t) désigne le flot de Y. Nous allons appliquer le théorème d'inversion locale pour montrer que f est un difféomorphisme au voisinage de 0. Pour cela, calculons les dérivées partielles de f.

D'abord,

$$\frac{\partial f}{\partial s_1}(0) = Y(0) = e_1.$$

Ensuite, pour $i \geqslant 2$,

$$\frac{\partial f}{\partial s_i}(0) = \frac{d}{dt}\phi^0(0, \ldots, 0, t, 0 \ldots, 0)|_{t=0} = e_i.$$

Nous avons montré que $df(0)$ est l'identité, donc que f est un difféomorphisme au voisinage de 0.

Le flot de $f_*^{-1} Y$ est $f^{-1} \circ \phi^t \circ f$ et celui-ci vérifie :

$$f^{-1} \circ \phi^t \circ f(s_1, \ldots, s_n) = f^{-1} \phi^{t+s_1}(0, s_2, \ldots, s_n) = (s_1 + t, s_2, \ldots, s_n).$$

On reconnaît là le flot du champ constant e_1.

Nous avons prouvé que $f_*^{-1} Y = e_1$, donc que $(f^{-1} \circ \psi)_* X = e_1$. □

Ceci va nous permettre de classer les orbites en trois types.

Proposition 4.14. *Soit X un champ autonome et complet. Pour chaque $x \in M$, il y a trois possibilités :*

(i) $\phi^t(x) = x$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,

(ii) l'application $t \mapsto \phi^t(x)$ est une immersion injective,

(iii) l'application $t \mapsto \phi^t(x)$ est T-périodique pour un certain $T > 0$ et l'application induite $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \to M$ est un plongement.

Démonstration. Si $X(x) = 0$, on est dans le premier cas. Plus généralement, si X s'annule sur l'orbite de X, alors par unicité, l'orbite de x est constante. Si $X(x) \neq 0$, alors $t \mapsto \phi^t(x)$ est une solution non-constante de l'équation différentielle donc $\frac{d}{dt}(\phi^t(x)) = X(\phi^t(x)) \neq 0$. On en déduit que $t \mapsto \phi^t(x)$ est une immersion.

Considérons maintenant $H = \{t \in \mathbb{R} \,|\, \phi^t(x) = x\}$. C'est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. D'après le théorème de redressement, 0 est un point isolé de H, donc H est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$. Il y a donc deux cas : si $H = \{0\}$, alors $t \mapsto \phi^t(x)$ est une immersion injective. Sinon, $H = T\mathbb{Z}$ pour un certain $T > 0$ et $t \mapsto \phi^t(x)$ est T-périodique. On a alors une immersion injective propre (car $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ est compact) et donc un plongement $\mathbb{R}/T\mathbb{Z} \to M$. □

III Quelques exemples

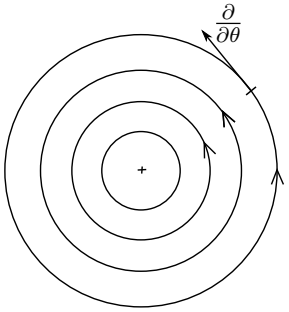
L'étude des flots des champs de vecteurs est un très vaste domaine. La liste d'exemples qui suit est loin de donner un aperçu exhaustif des différents phénomènes possibles.

Exemples 4.15. (Champ de vecteurs linéaires sur le plan) Voici d'abord quelques exemples de champs de vecteurs linéaires du plan. Par des changements de base linéaires, on peut souvent ramener un champ linéaire quelconque à l'un de ces exemples. Ces exemples servent aussi de modèles locaux pour étudier la dynamique au voisinage d'un zero isolé d'un champ de vecteurs.

(a) Considérons le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ donné par $X(x, y) = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}$. Nous avons vu qu'avec les coordonnées polaires, nous avons $X = \frac{\partial}{\partial \theta}$. Le système $(\dot{x}, \dot{y}) = X(x, y)$ est donc équivalent au système $(\dot{r}, \dot{\theta}) = (0, 1)$. On en déduit le flot en coordonnées polaires :

$$\phi^t(r, \theta) = (r, \theta + t).$$

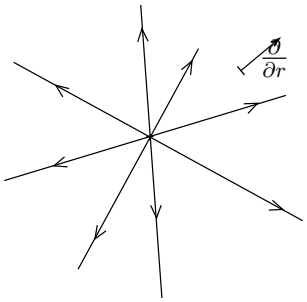
Autrement dit, ϕ^t est la rotation d'angle t. Les courbes intégrales de X sont les cercles concentriques centrés en l'origine.



(b) Considérons maintenant le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ donné par $X(x, y) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$. Nous avons vu qu'en coordonnées polaires, $X = r\frac{\partial}{\partial r}$. Le système $(\dot{x}, \dot{y}) = X(x, y)$ est donc équivalent au système $(\dot{r}, \dot{\theta}) = (r, 0)$. On en déduit le flot en coordonnées polaires :

$$\phi^t(r, \theta) = (re^t, \theta).$$

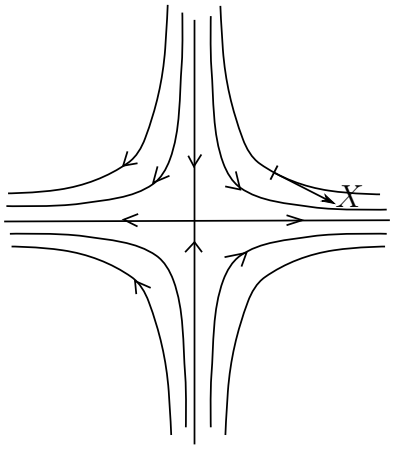
Autrement dit, ϕ^t est l'homothétie de rapport e^t. Les courbes intégrales de X sont les rayons issus de l'origine.



(c) Considérons maintenant le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ donné par $X(x,y) = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$. On peut facilement résoudre le système $(\dot{x}, \dot{y}) = X(x,y) = (x, -y)$ et obtenir le flot :

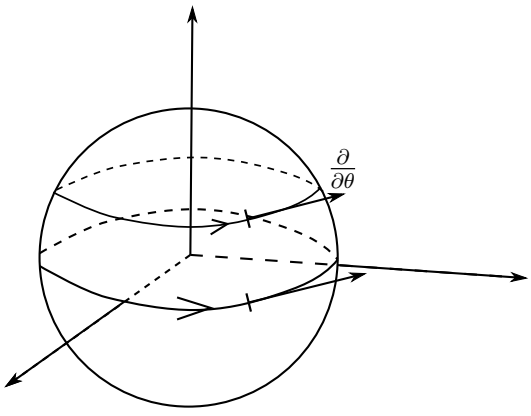
$$\phi^t(x,y) = (xe^t, ye^{-t}).$$

On peut remarquer que le produit des deux coordonnées reste constant au cours du temps. Les courbes intégrales de X sont donc des hyperboles.



◀

Exemple 4.16. (Rotations de la sphère) De manière analogue à l'exemple (a) ci-dessus, le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial\theta}$ induit le flot de rotation sur la sphère autour de son axe Nord-Sud.



◀

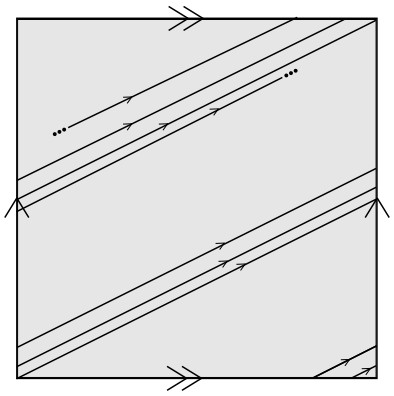
Exemple 4.17. (Champs constants sur le tore) Soit $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ tel que $X(x+k) = X(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $k \in \mathbb{Z}^n$. Alors, on peut définir, pour tout $y \in \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, le vecteur

$$Y(y) = dp_x \cdot X(x),$$

où p est la projection canonique $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ et x désigne n'importe quel antécédent de y par p. Gràce à la condition de périodicité, ceci définit un champ Y sur $\mathbb{T}^n$. [1]

En particulier, si $X = v$ est un champ constant sur $\mathbb{R}^n$, on obtient un champ sur Y appelé *champ constant* sur $\mathbb{T}^n$. Les courbes intégrales de X sont alors les droites parallèles à v. Les courbes intégrales de Y sont donc les projections sur $\mathbb{T}^n$ de ces droites.

Par exemple, dans le cas $n = 2$, on peut démontrer que si le rapport des coordonnées de v est rationnel, alors toutes les orbites sont périodiques. En revanche, si ce rapport est irrationnel, toutes les orbites sont denses dans le tore.



◀

Exemple 4.18. (Un bel exemple sur le plan projectif) On rappelle que les trois cartes usuelles du plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sont données par les formules

$$\varphi_0([1 : y : z]) = (y, z), \quad \varphi_1([x : 1 : z]) = (x, z), \quad \varphi_2([x : y : 1]) = (x, y).$$

Soient a, b, c trois nombres réels. Etant donné $u = [x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, on considère le chemin

$$\gamma_u : t \mapsto [(1 + ta)x : (1 + tb)y : (1 + tc)z],$$

défini sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. On note $X(u) = \gamma_u'(0)$ le vecteur tangent à γ_u en 0. Vérifions que X définit un champ de vecteurs sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Pour cela, explicitons $\phi_{i*}X$. Pour $i = 0$,

$$\phi_0 \circ \gamma_u(t) = \left(\frac{(1 + tb)y}{1 + ta)x}, \frac{(1 + tc)z}{1 + ta)x} \right),$$

$$\phi_0 \circ \gamma_u'(0) = \left((b - a)\frac{y}{x}, (c - a)\frac{z}{x} \right).$$

1. Plus généralement, étant donné un champ de vecteurs X sur une variété M, invariant par une action d'un groupe G sur M, libre, propre et par difféomorphismes, le champ X induit un champ Y sur le quotient M/G tel que localement $Y = p_*X$, où p désigne la projection canonique.

On a donc $\phi_{0*}X(y,z) = ((b-a)y,(c-a)z)$. De manière similaire, on a $\phi_{1*}X(x,z) = ((a-b)x,(c-b)z)$ et $\phi_{2*}X(x,y) = ((a-c)x,(b-c)y)$. Le champ X est lisse dans chaque carte d'un atlas donc est lisse partout.

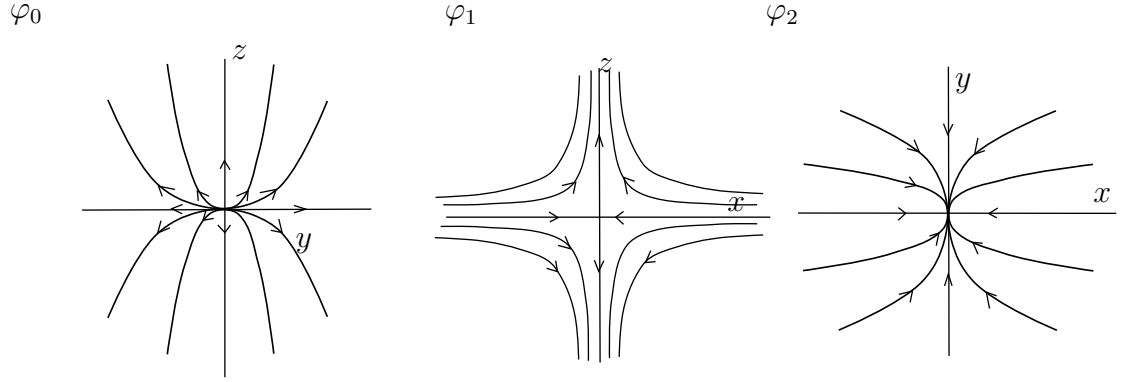
Le flot de $\phi_{0*}X$ est donné au temps t par l'application :

$$(y,z) \mapsto \left(e^{(b-a)t}y, e^{(c-a)t}z\right).$$

On a des formules analogues pour les autres valeurs de i. On en déduit le flot de X :

$$\phi_X^t([x:y:z]) = [e^{ta}x : e^{tb}y : e^{tc}z].$$

On suppose que $a < b < c$. Alors on peut dessiner sommairement les courbes intégrales du champ dans chacune des trois cartes :



On remarque qu'il y a exactement 2 trajectoires reliant (aux limites à l'infini) $[1:0:0]$ à $[0:1:0]$, 2 trajectoires reliant $[0:1:0]$ à $[0:0:1]$, et une infinité de $[1:0:0]$ à $[0:0:1]$. ◀

IV Dérivée de Lie d'un champ de vecteurs

Nous avons vu qu'il est souvent possible de transporter des objets au moyen de difféomorphismes. En particulier, il est possible de transporter des objets avec des flots. D'une manière générale, *la dérivée de Lie est la version infinitésimale du transport.*

Dans cette partie, nous abordons le cas de la dérivée de Lie d'un champ de vecteurs dans la direction d'un autre champ de vecteurs. Au chapitre suivant, nous définirons la dérivée de Lie d'une forme différentielle.

Dans cette partie, nous supposons que tous les champs de vecteurs sont **autonomes**.

Nous allons utiliser la notation $\phi^* X = \phi_*^{-1} X$, pour alléger nos notations.

Définition 4.19 (dérivée de Lie d'un champ de vecteurs)**.** *La dérivée de Lie d'un champ de vecteurs Y dans la direction d'un autre champ de vecteurs X est le champ de vecteurs donné par :*

$$\mathcal{L}_X Y(x) = \frac{d}{dt}(\phi_X^t)^* Y(x)|_{t=0}.$$

La proposition suivante donne une interprétation dynamique du crochet de Lie de deux champs de vecteurs.

Proposition 4.20. *Pour tous champs de vecteurs X, Y, on a*

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Démonstration. Rappelons que $[X, Y]$ est défini par la relation $[X, Y] \cdot f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f)$. Soit donc f une fonction lisse sur M. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X Y \cdot f &= df \cdot \mathcal{L}_X Y \\
&= df \cdot \frac{d}{dt}(\phi_X^t)^* Y(x)|_{t=0} \\
&= df \cdot \left(\frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{d}{ds}|_{s=0} \phi_X^{-t} \circ \phi_Y^s \circ \phi_X^t \right) \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{d}{ds}|_{s=0} f \circ \phi_X^{-t} \circ \phi_Y^s \circ \phi_X^t \\
&= \frac{d}{ds}|_{s=0} \frac{d}{dt}|_{t=0} f \circ \phi_X^{-t} \circ \phi_Y^s \circ \phi_X^t \\
&= \frac{d}{ds}|_{s=0} \left(df \cdot d\phi_X^{-t} \cdot d\phi_Y^s \cdot X - (df \cdot X) \circ \phi_Y^s \circ \phi_X^t \right) |_{t=0} \\
&= \frac{d}{ds}|_{s=0} \left(df \cdot d\phi_Y^s \cdot X - (df \cdot X) \circ \phi_Y^s \right) \\
&= \frac{d}{ds}|_{s=0} \left(d(f \circ \phi_Y^s) \cdot X - (df \cdot X) \circ \phi_Y^s \right) \\
&= d(Y \cdot f) \cdot X - Y \cdot (X \cdot f) \\
&= X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f) \\
&= [X, Y] \cdot f.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.21. *Pour tous champs de vecteurs X, Y*

$$[X, Y] = -\frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{d}{ds}|_{s=0} \phi_X^{-t} \circ \phi_Y^{-s} \circ \phi_X^t \circ \phi_Y^s.$$

Démonstration. Il suffit d'effectuer le calcul suivant :

$$\frac{d}{ds}|_{s=0} \phi_X^{-t} \circ \phi_Y^{-s} \circ \phi_X^t \circ \phi_Y^s = +Y - (\phi_X^t)^* Y,$$

puis,

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \frac{d}{ds}|_{s=0} \phi_X^{-t} \circ \phi_Y^{-s} \circ \phi_X^t \circ \phi_Y^s = -\mathcal{L}_X Y.$$

□

Terminons par une conséquence importante de ce qui précède :

Corollaire 4.22. *Pour tous champs de vecteurs X, Y*

$$[X, Y] = 0 \quad \Longleftrightarrow \forall s, t \in \mathbb{R},\ \phi_X^t \circ \phi_Y^s = \phi_Y^s \circ \phi_X^t.$$

Lorsque $[X, Y] = 0$, on dit que les champs de vecteurs X et Y *commutent*. Le corollaire que nous venons de voir justifie cette terminologie : leurs flots commutent.

Démonstration. L'implication réciproque est une conséquence immédiate du corollaire précédent. Montrons l'implication directe. Sous l'hypothèse que $[X, Y] = 0$,

$$\frac{d}{dt}(\phi_X^t)_* Y = (\phi_X^t)_* \frac{d}{ds}(\phi_X^s)_* Y|_{s=0} = (\phi_X^t)_* \mathcal{L}_X Y = 0$$

Donc pour tout t, $(\phi_X^t)_* Y = Y$. On peut alors appliquer la proposition 4.12. On obtient

$$\phi_X^{-t} \circ \phi_Y^s \circ \phi_X^t = \phi_Y^s$$

pour tout t et tout s. $\square$

Chapitre 5

Formes différentielles

I Formes alternées et produits extérieurs

Nous noterons $\mathcal{S}_p$ le groupe des permutations d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire le groupe des bijections de l'ensemble $\{1, \dots, p\}$. Rappelons d'abord que $\mathcal{S}_p$ est engendré par les *transpositions*, c'est-à-dire les permutations qui échangent deux éléments et laissent tous les autres invariants. Rappelons aussi qu'il existe un (unique) morphisme de groupe $\varepsilon : \mathcal{S}_p \to \{\pm 1\}$ qui vaut -1 sur toutes les transpositions. Ce morphisme est appelée *signature*.

Pour toute cette partie, on fixe un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, de dimension finie p.

Définition 5.1 (formes alternées)**.** *Une forme p-linéaire $\omega : E^p \to \mathbb{R}$ est dite* alternée *si et seulement si pour tous $x_1, \dots, x_p \in E$, tels que $x_i = x_j$ pour certains indices $i \neq j$, alors $\omega(x_1, \dots, x_p) = 0$.*

Remarque 5.2 (alternée $\iff$ antisymétrique). Une forme est alternée si et seulement si elle est antisymétrique, c'est-à-dire pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_p$, on a

$$\omega(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\omega(x_1, \dots, x_p).$$

Démontrons-le. Pour commencer supposons ω antisymétrique. Si $x_i = x_j$, alors en utilisant la transposition τ qui échange i et j, on a $\tau(x_k) = x_k$ pour tout $k = 1, \dots, p$, donc

$$\omega(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)}) = \omega(x_1, \dots, x_p).$$

Mais par antisymétrie, on a aussi :

$$\omega(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)}) = -\omega(x_1, \dots, x_p).$$

D'où, $\omega(x_1, \dots, x_p) = -\omega(x_1, \dots, x_p) = 0$ (notons qu'ici on a utilisé que $\mathbb{R}$ n'est pas de caractéristique 2).

Réciproquement, supposons ω alternée. Alors, pour tous $x_1, \dots, x_p$, on peut écrire $\omega(x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$. En développant et en utilisant les identités $\omega(x_1, x_1, x_3, \dots, x_n) = 0$ et $\omega(x_2, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$, il vient :

$$\omega(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + \omega(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n) = 0.$$

Ceci prouve l'identité

$$\omega(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\omega(x_1,\dots,x_p)$$

dans le cas où σ est la transposition qui échange 1 et 2. La même démonstration donne cette identité pour toute transposition. Comme les transpositions engendrent $\mathcal{S}_p$, on en déduit l'identité pour toute permutation σ. ◀

Remarque 5.3.

(a) Une 1-forme alternée n'est rien d'autre qu'une forme linéaire.

(b) Par convention, on décide qu'une 0-forme est un scalaire.

◀

Notation. *On note $\Lambda^p E^*$ l'ensemble des p-formes linéaires alternées de E. En particulier, $\Lambda^1 E^* = E^*$ et $\Lambda^0 E^* = \mathbb{R}$.*

Remarque 5.4.

(a) La théorie du déterminant nous apprend que $\Lambda^n E^*$ est de dimension 1 (rappelons que n est la dimension de E). Nous savons aussi que pour toute base $\mathcal{B}$, l'application "déterminant dans la base $\mathcal{B}$" est une application n-linéaire alternée, non-nulle.

(b) Si $p > n$, $\Lambda^p E^* = \{0\}$, autrement dit, toute forme p-linéaire alternée est nulle. C'est une conséquence du fait qu'une forme alternée s'annule sur une famille liée de vecteurs, ce qui se démontre simplement en écrivant l'un des vecteurs en fonction des autres et en développant.

◀

Plus généralement, nous avons le résultat suivant :

Proposition 5.5. *Pour tout $p \geqslant 0$, l'espace vectoriel $\Lambda^p E^*$ est de dimension $\binom{n}{p}$.*
De plus, si $\ell_1,\dots,\ell_n$ est une base de E^*, alors la famille $(\ell_I)_{I\subset\{1,\dots,n\},|I|=p}$ définie par

$$\ell_I(x_1,\dots x_p) = \det(\ell_{t_i}(x_j)),\ \text{où } I = \{t_1 < \dots < t_p\}$$

forme une base de $\Lambda^p E^*$, indicée par l'ensemble des parties à p éléments de $\{1,\dots,n\}$.

Remarque 5.6. Si $(\ell_1,\dots,\ell_n)$ est la base duale d'une base $\mathcal{B}$ de E, alors $\ell_{t_i}(x_j)$ est la t_i-ème coordonnée de x_j dans $\mathcal{B}$, donc : *la matrice $(\ell_{t_i}(x_j))_{i,j}$ est la matrice obtenue de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_p)$ en ne gardant que les lignes d'indice appartemant à I.*

Par exemple, dans $\mathbb{R}^4$, en supposant que les ℓ_i forment la base duale de la base canonique (c'est-à-dire $\ell_i = e_i^*$),

$$\ell_{\{1,3\}}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix}1&5\\3&7\end{vmatrix} = -8.$$

◀

Démonstration. Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base dont $(\ell_1,\dots,\ell_p)$ est la base duale. Nous allons commencer par montrer que la famille des ℓ_I, où I est une partie de $\{1,\dots,n\}$ à p éléments est une famille libre.

Pour cela remarquons que si I, $J = \{j_1 < \cdots < j_p\}$ sont deux parties à p éléments, alors

$$\ell_I(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) = \begin{cases} 1 & \text{si } I = J, \\ 0 & \text{si } I \neq J. \end{cases}$$

Supposons maintenant que l'on ait une combinaison linéaire nulle $\sum_I \lambda_I \ell_I = 0$. En appliquant aux vecteurs $e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}$, on obtient $\lambda_J = 0$. On montre ainsi que tous les coefficients de la combinaison linéaire sont nuls et donc que la famille est libre.

Montrons maintenant que la famille est génératrice. Soit $\omega \in \Lambda^p E^*$ et soient $x_1, \ldots, x_p \in E$. Alors,

$$\begin{aligned} \omega(x_1, \ldots, x_p) &= \omega\left(\sum_{i_1=1}^{n} \ell_{i_1}(x_1) e_{i_1}, x_2, \ldots, x_p\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \ell_{i_1}(x_1)\, \omega\left(e_{i_1}, x_2, \ldots, x_p\right) \\ &= \sum_{i_1, \ldots, i_p = 1}^{n} \ell_{i_1}(x_1) \cdots \ell_{i_p}(x_p)\, \omega\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}\right) \end{aligned}$$

Dans la somme ci-dessus, les termes pour lesquels deux indices sont égaux sont nuls (car ω est alternée). De plus, les termes ayant pour indices respectifs $i_1, \ldots, i_n$ et $\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_p)$ ne diffèrent que par le signe $\varepsilon(\sigma)$. Nous pouvons donc faire disparaître de l'écriture les termes nuls et regrouper les termes restant comme suit :

$$\begin{aligned} \omega(x_1, \ldots, x_p) &= \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} \left(\omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) \ell_{\sigma(i_1)}(x_1) \ldots \ell_{\sigma(i_p)}(x_p) \right) \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}) \ell_I(x_1, \ldots, x_p). \end{aligned}$$

Nous avons montré que ω est une combinaison linéaire des ℓ_I. □

Définition 5.7 (Produit extérieur de formes)**.** *Soient α une forme p-linéaire alternée et β une forme q-linéaire alternée. Le* produit extérieur *de α et β est la forme $p+q$-linéaire alternée donnée par*

$$\boxed{\alpha \wedge \beta(x_1, \ldots, x_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q}} \varepsilon(\sigma) \alpha(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)})\, \beta(x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)})}$$

Par convention, si $p = 0$, α est simplement un scalaire et on définit le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ comme le produit standard de ce scalaire avec β.

Pour montrer que la formule ci-dessus donne bien une forme alternée, supposons que $x_i = x_j$ pour deux indices distincts i et j. Alors, dans chacun des termes de la somme, les indices i et j apparaissent ou bien tous les deux dans α, qui vaut alors zero, ou bien tous les deux dans β, qui vaut alors zero, ou bien l'un dans α et l'autre dans β, mais alors l'opposé de ce terme est aussi un terme de la somme (il s'agit de celui où σ est composé avec la transposition qui échange i et j). La somme est donc nulle.

Exercice 22. *Montrer que le produit extérieur est aussi donné par la formule*

$$\boxed{\alpha \wedge \beta(x_1, \dots, x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p,q}} \varepsilon(\sigma) \alpha(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)})\, \beta(x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)})}$$

où $\mathcal{S}_{p,q} = \{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q} \,|\, \sigma(1) < \dots \sigma(p) \text{ et } \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)\}$.

Cette deuxième formule est plus efficace pour les calculs explicites.

Exemple 5.8. Si α et β sont deux formes bilinéaires alternées, alors pour tous vecteurs x_1, x_2, x_3, x_4, on a

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta(x_1, x_2, x_3, x_4) = {} & \alpha(x_1, x_2)\beta(x_3, x_4) - \alpha(x_1, x_3)\beta(x_2, x_4) + \alpha(x_1, x_4)\beta(x_2, x_3) \\ & + \alpha(x_2, x_3)\beta(x_1, x_4) - \alpha(x_2, x_4)\beta(x_1, x_3) + \alpha(x_3, x_4)\beta(x_1, x_2).\end{aligned}$$

◀

Dans la pratique, on calcule peu les produits extérieurs avec les formules ci-dessus. Les propriétés suivantes s'avèrent en effet beaucoup plus faciles d'emploi.

Propriétés 5.9. *(i) Associativité :* $\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3)$,

(ii) Unitarité : $1 \wedge \omega = \omega \wedge 1 = \omega$ *où* $1 \in \mathbb{R} = \Lambda^0 E^*$

(iii) Anti-commutativité : $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$.

On résume parfois les propriétés ci-dessus en disant que $\Lambda E^* = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^p E^*$ est une $\mathbb{R}$-*algèbre graduée unitaire et anticommutative.*

Pour démontrer l'anti-commutativité, il suffit de vérifier (en comptant le nombre d'inversions) que

$$\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & \dots & p & p+1 & \dots & \dots & \dots & p+q \\ p+1 & \dots & \dots & \dots & p+q & 1 & \dots & p \end{pmatrix} = (-1)^{pq}.$$

Nous allons beaucoup utiliser les produits extérieurs de formes linéaires.

Proposition 5.10. *Soient* $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in E^*$ *des formes linéaires. Alors, pour tous vecteurs* $x_1, \dots, x_p$,

$$\boxed{\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p(x_1, \dots x_p) = \det(\alpha_i(x_j))_{i,j}}$$

En particulier, $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ *est une famille libre si et seulement si* $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p \neq 0$.

Notons que si $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ forme une base de E^* et si $I = \{i_1 < \dots < i_p\} \subset \{1, \dots, n\}$, alors d'après cette proposition,

$$\ell_I = \ell_{i_1} \wedge \dots \wedge \ell_{i_p}.$$

Démonstration. Nous allons faire la démonstration par récurrence sur p. Le cas $p = 1$ est évident. Supposons la formule vraie pour toute famille de $p-1$ formes linéaires. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in E^*$ et $x_1, \dots, x_p \in E$. Alors,

$$\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_p)(x_1, \dots, x_p) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^j \alpha_1(x_j)(\alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_p)(x_1, \dots, \hat{x_j}, \dots, x_p).$$

On démontre donc l'hérédité en comparant avec la formule du développement du déterminant par rapport à la première ligne. □

REMARQUE 5.11. Comme l'indique la proposition précédente, le produit extérieur d'une forme linéaire avec elle-même est toujours nul. C'est faux en général pour des formes p-linéaires avec $p > 1$. Par exemple, si $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ forme une famille libre et si l'on pose $\alpha = \ell_1 \wedge \ell_2 + \ell_3 \wedge \ell_4$, alors $\alpha \wedge \alpha \neq 0$.

En effet, en utilisant $\ell_1 \wedge \ell_1 = \ell_2 \wedge \ell_2 = 0$ et l'anti-commutativité du produit extérieur,

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \alpha &= (\ell_1 \wedge \ell_2 + \ell_3 \wedge \ell_4) \wedge (\ell_1 \wedge \ell_2 + \ell_3 \wedge \ell_4) \\ &= \ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \ell_1 \wedge \ell_2 + \ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \ell_3 \wedge \ell_4 + \ell_3 \wedge \ell_4 \wedge \ell_1 \wedge \ell_2 + \ell_3 \wedge \ell_4 \wedge \ell_3 \wedge \ell_4 \\ &= 2\,\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \ell_3 \wedge \ell_4 \neq 0.\end{aligned}$$

◀

Transport de formes alternées par une application linéaire. Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie. On définit une application linéaire $f^* : \Lambda^p F^* \to \Lambda^p E^*$ par la formule

$$(f^*\omega)(x_1, \ldots, x_p) = \omega(f(x_1), \ldots, f(x_p)),$$

pour toute forme $\omega \in \Lambda^p F^*$ et tout vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ in E.

Dans le cas particulier où $p = 1$, f^* s'appelle l'endomorphisme transposé de f. Dans le cas particulier où $p = \dim E = \dim F$, l'application f^* est une application linéaire entre espaces de dimension 1, et d'après les propriétés du déterminant, il s'agit de la multiplication par le scalaire $\det f$.

Propriétés 5.12. *(i)* $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$,

(ii) $f^*1 = 1$,

(iii) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$.

Ces propriétés sont faciles à vérifier.

Les deux dernières propriétés se résument en disant que $f^* : \Lambda F^* \to \Lambda E^*$ est un morphisme d'algèbres unitaires graduées.

Produit intérieur. Pour $v \in E$ et $\omega \in \Lambda^p E^*$ (avec $p = 1$), le *produit intérieur* de ω par v est la forme $p-1$-linéaire alternée donnée par

$$\iota_v\omega(x_1, \ldots, x_{p-1}) = \omega(v, x_1, \ldots, x_{p-1}).$$

Exercice 23. *Pour tout vecteur v, toute forme p-linéaire alternée α et toute forme q-linéaire alternée β, montrer que*

$$\iota_v(\alpha \wedge \beta) = (\iota_v\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \iota_v\beta.$$

Cette propriété est résumée en affirmant que ι_v est une anti-dérivation de degré -1 sur ΛE^*.

II Formes différentielles sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Dans cette partie, on fixe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\Omega^k(U) = C^\infty(U, \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*)$. Les éléments de $\Omega^k(U)$ sont appelés *formes différentielles* de degré k sur U, ou simplement *k-formes* sur U. Etant donnée une k-forme α et $x \in U$, on note souvent α_x à la place de $\alpha(x)$.

Quelques cas particuliers méritent d'être soulignés :

— $\Omega^0(U) = C^\infty(U)$ car $\Lambda^0(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}$,

— $\Omega^1(U)$ est l'ensemble des formes différentielles de degré 1 sur U que l'on avait déjà défini au chapitre 2,

— Si $k > n$, $\Omega^k(U) = \{0\}$ car $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^* = \{0\}$,

— Si $k < 0$, nous n'avons pas défini $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$. *Dans ce cas, on choisit de poser par convention* $\Omega^k(U) = \{0\}$.

Notons $x_1, \dots, x_n$ les fonctions coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^n$. Leurs différentielles $dx_1, \dots, dx_n$ sont des formes différentielles de degré 1 qui, en tout point sont égales aux formes linéaires $e_1^*, \dots, e_n^*$ duales de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ notée $(e_1, \dots, e_n)$. Autrement dit, $dx_i(e_j) = \delta_{ij}$.

Pour toute partie $I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, on note comme dans la partie précédente,

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

La proposition 5.5 implique que toute k-forme α s'écrit de manière unique

$$\alpha = \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}, |I|=k} f_I \, dx_I$$

où $f_I \in C^\infty(U)$. En termes savants, ceci s'exprime par : "$\Omega^k(U)$ est un $C^\infty(U)$-module libre engendré par les dx_I".

Produit extérieur. Si $\alpha \in \Omega^k(U)$, $\beta \in \Omega^\ell(U)$, alors $\alpha \wedge \beta$ définie par

$$\forall x \in U, \ \alpha \wedge \beta(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x).$$

On définit ainsi le *produit extérieur des formes différentielles*, $\wedge : \Omega^k(U) \times \Omega^\ell(U) \to \Omega^{k+\ell}(U)$.

Les règles de calcul se déduisent automatiquement des règles de calcul du produit extérieur des formes alternées. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$ muni des fonctions coordonnées x, y et z, on peut écrire :

$$\begin{aligned}(x\,dy + y\,dz) \wedge (z\,dx \wedge dy + x\,dx \wedge dz) &= zy\,dz \wedge dx \wedge dy + x^2\,dy \wedge dx \wedge dz \\ &= (zy - x^2) dx \wedge dy \wedge dz.\end{aligned}$$

Transport de formes différentielles. Soit $\phi : U \to V$ une application lisse à valeurs dans un ouvert V de $\mathbb{R}^m$. Alors pour toute $\alpha \in \Omega^k(V)$, on définit le *tiré en arrière* de α par ϕ comme la k-forme $\phi^*\alpha$ donnée par

$$\boxed{(\phi^*\alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{\phi(x)}(d\phi_x(v_1), \dots, d\phi_x(v_k))}$$

pour tout $x \in U$ et tous vecteurs $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier.

Propriétés 5.13. *(i) L'application $\phi^* : \Omega^k(V) \to \Omega^k(U)$ est $\mathbb{R}$-linéaire,*

(ii) Pour toutes formes $\alpha \in \Omega^k(V)$, $\beta \in \Omega^\ell(V)$,

$$\boxed{\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*\alpha \wedge \phi^*\beta}$$

(iii) Si $\psi : V \to W$ est une application lisse à valeur dans un ouvert W de $\mathbb{R}^p$, alors

$$\boxed{(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*}$$

Remarque 5.14.

(a) Si $k = 0$, nous avons vu que $\Omega^0(V) = C^\infty(V)$. Dans ce cas, pour toute $f \in C^\infty(V)$, le tiré en arrière s'écrit :

$$\phi^* f = f \circ \phi.$$

(b) Si $k = n = m$, alors $\alpha \in \Omega^n(V)$ est de la forme $\alpha = f \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = f \cdot \det_{\mathcal{B}_0}$, où $\mathcal{B}_0$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^\infty(V)$ une certaine fonction lisse. Alors pour tout point $x \in U$, on peut écrire

$$\begin{aligned}(\phi^*\alpha)_x &= (\phi^* f)(x)\phi^* \det_{\mathcal{B}_0} \\ &= f \circ \phi(x) \det(d\phi_x) \det_{\mathcal{B}_0} \\ &= f \circ \phi(x) \det(d\phi_x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.\end{aligned}$$

Cette dernière formule fait penser (à juste titre) à la formule du changement de variable. Elle prendra tout son sens lorsque nous définirons l'intégration des formes différentielles plus tard dans ce chapitre.

(c) Si ϕ est l'injection canonique d'un ouvert U dans un autre ouvert V le contenant, $\phi^*\alpha$ n'est rien d'autre que la restriction de α à U.

◀

Différentielle extérieure. La différentielle extérieure est définie par le résultat suivant.

Théorème 5.15. *Il existe une unique famille d'applications $\mathbb{R}$-linéaires $d_k : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$, $k \in \mathbb{N}$, telles que*

(i) pour toute fonction $f \in C^\infty(U)$, $d_0 f = df$ est la différentielle usuelle,

(ii) pour toutes formes $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^\ell(U)$,

$$d_{k+l}(\alpha \wedge \beta) = (d_k\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d_\ell\beta,$$

(iii) pour tout entier k,

$$d_{k+1} \circ d_k = 0.$$

Ces applications vérifient de plus

$$d_k(\phi^*\alpha) = \phi^* d_k\alpha$$

pour toute application lisse $\phi : U \to V$ et toute k-forme α sur V.

En pratique, on allègera les notations en omettant l'indice k et en notant donc simplement d pour d_k. Le théorème donne donc l'existence d'une certaine application linéaire $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$, où $\Omega(U) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Omega^k(U)$.

Définition 5.16. *L'application d est appelée* différentielle extérieure.

En langage savant, $\Omega(U)$ munie du produit extérieur est une $\mathbb{R}$-algèbre unitaire graduée anti-commutative et d est une dérivation de degré 1 sur $\Omega(U)$. Démontrons le théorème.

Démonstration. Commençons par remarquer que s'il existe une telle application d, comme $d \circ d = 0$, alors $d(dx_i) = 0$ pour tout i. La propriété (ii) (que l'on appellera formule de Leibniz) implique alors (par une récurrence facile) que $d(dx_I) = 0$ pour tout I. En utilisant à nouveau Leibniz, et la propriété (i), on en déduit la formule

$$\begin{aligned} d\left(\sum_I f_I\, dx_I\right) &= \sum_I df_I \wedge dx_I + \sum_I f_I d(dx_I) \\ &= \sum_I df_I \wedge dx_I. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Toute forme différentielle se décomposant sous la forme $\sum_I f_I\, dx_I$, la formule ci-dessus force l'unicité de d.

Passons maintenant à la démonstration de l'existence. Pour les 0-formes, nous n'avons pas le choix, d est la différentielle usuelle. On définit d pour les formes de degré supérieur par la formule (5.1). Il nous faut montrer les propriétés (i) et (ii) du théorème.

Par linéarité, on peut se contenter de démontrer la formule de Leibniz pour des formes α et β qui s'écrivent $\alpha = f\, dx_I$ et $\beta = g\, dx_J$, avec f et g des fonctions. Calculons :

$$d(\alpha \wedge \beta) = d(fg\, dx_I \wedge dx_J).$$

$dx_I \wedge dx_J$ est soit nul si $I \cap J \neq \emptyset$, soit égal à $\pm dx_{I\cup J}$ si $I \cap J = \emptyset$. Dans tous les cas, la formule (5.1) implique

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg) \wedge\ dx_I \wedge dx_J \\ &= (f\, dg + g\, df) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (df \wedge dx_I) \wedge (g\, dx_J) + (-1)^k (f\, dx_I) \wedge (dg \wedge dx_J), \end{aligned}$$

où k est le degré de α, c'est-à-dire le cardinal de I. On a donc bien prouvé $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$.

Montrons maintenant que $d \circ d = 0$. A nouveau par linéarité, il suffit de montrer que $d \circ d$ s'annule sur les formes qui s'écrivent $f\, dx_I$. Calculons :

$$\begin{aligned} d \circ d(f dx_I) &= d(df \wedge dx_I) \\ &= d\left(\sum_j \partial_j f dx_j \wedge dx_I\right) \\ &= \sum_{k,j} \partial_k \partial_j f\, dx_k \wedge dx_j \wedge dx_I \\ &= \sum_{j<k} (\partial_k \partial_j f - \partial_j \partial_k f)\, dx_k \wedge dx_j \wedge dx_I \end{aligned}$$

Chacun des facteurs $\partial_k\partial_j f - \partial_j\partial_k f$ est nul par le lemme de Schwarz, et l'on en déduit $d \circ d(f\,dx_I) = 0$

Enfin, il nous reste à établir l'identité $\phi^*(d\alpha) = d(\phi^*\alpha)$. Remarquons d'abord que cette identité est vraie pour les 0-formes c'est-à-dire les fonctions. En effet, si f est une fonction, alors nous avons bien

$$d(\phi^* f)_x = d(f \circ \phi)_x = df_{\phi(x)} \cdot d\phi_x = (\phi^* df)_x.$$

En particulier, pour tout i, on a $\phi^* dx_i = d(x_i \circ \phi)$.

Pour établir l'identité en général, comme précédemment, il suffit de l'établir pour les formes $f\,dx_I = f\,dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$.

$$\begin{aligned} d(\phi^*(f\,dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) &= \\ &= d\left((\phi^* f)(\phi^* dx_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (\phi^* dx_{i_k})\right) \\ &= d\left((f \circ \phi)\, d(x_{i_1} \circ \phi) \wedge \cdots \wedge d(x_{i_k} \circ \phi)\right) \\ &= d(f \circ \phi) \wedge d(x_{i_1} \circ \phi) \wedge \cdots \wedge d(x_{i_k} \circ \phi) \\ &= \phi^* df \wedge \phi^* dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \phi^* dx_{i_k} \\ &= \phi^*(df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \\ &= \phi^* d(f\,dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}). \end{aligned}$$

Ce calcul conclut notre démonstration. □

Avec les règles de calcul données par le théorème, calculer la différentielle extérieure d'une forme est relativement aisé.

Exercice 24. *Vérifier les calculs suivants :*

(i) $d(xyz^2) = yz^2\,dx + xz^2\,dy + 2xyz\,dz$,

(ii) $d(yx\,dx \wedge dz) = -x\,dx \wedge dy \wedge dz$,

(iii) $d\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}\right) = 0$.

Pour ce dernier exemple, on peut résoudre par le calcul direct ou alors utiliser le fait que sur un ouvert dense $\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$ *est la forme* $d\theta$ *des coordonnées polaires.*

III Fibré des formes alternées d'une variété

Soit M une variété et $k \geqslant 0$ un entier. De manière similaire à ce que nous avions fait pour le fibré tangent et le fibré cotangent au chapitre 3, nous posons

$$\Lambda^k T^*M = \bigsqcup_{x \in M} \Lambda^k T_x^* M = \{(x, \alpha) \,|\, x \in M, \alpha \in \Lambda^k(T_x^* M)\}.$$

Comme $d\phi_x : T_xM \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme pour toute carte ϕ et tout point x du domaine de ϕ, l'application linéaire

$$((d\phi_x)^{-1})^* : \Lambda^k T_x^* M \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$$

est également un isomorphisme (son inverse est $(d\phi_x)^*$).

Comme pour TM et T^*M, nous pouvons appliquer le lemme 3.18 et ainsi munir $\Lambda^k T^*M$ de l'unique structure de variété telle que pour toute carte (U, ϕ) de M, en notant $\pi : \Lambda^k T^*M \to M$ la projection canonique,

— $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de $\Lambda^k T^*M$,
— l'application

$$\pi^{-1}(U) \to U \times \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*,\ (x,\alpha) \mapsto (x\,,\,(d\phi_x^{-1})^*\alpha)$$

est un difféomorphisme.

L'application $\pi : \Lambda^k T^*M \to M$ est alors un fibré vectoriel que l'on appelle le *fibré des formes alternées* sur M.

Remarquons que dans le cas où $k = 1$, ce fibré est le fibré cotangent. Lorsque $k = 0$, la fibre au-dessus de chaque point est tout simplement $\mathbb{R}$. Autrement dit, $\Lambda^0 T^*M \simeq M \times \mathbb{R}$ est le fibré trivial de rang 1.

Définition 5.17 (Formes différentielles)**.** *Une forme différentielle de degré k sur M est une section du fibré $\Lambda^k T^*M$. On note $\Omega^k(M) = \Gamma(M, \Lambda^k T^*M)$.*

On note aussi parfois $\Omega(M) = \bigoplus_k \Omega^k(M)$.

Les opérations que l'on avait sur $\mathbb{R}^n$ s'étendent aux variétés. En effet, on peut définir le produit extérieur d'une k-forme α et d'une ℓ-forme β par la formule

$$\alpha \wedge \beta(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x).$$

On définit ainsi un produit associatif, unitaire, anti-commutatif $\Omega^k(M) \times \Omega^\ell(M) \to \Omega^{k+\ell}(M)$.

On peut aussi tirer en arrière des formes d'une variété à une autre. Soit $f : M \to N$ une application lisse et soit $\alpha \in \Omega^k(N)$ une forme différentielle, alors la formule

$$f^*\alpha_x(v_1, \ldots, v_k) = \alpha_{f(x)}(df_x v_1, \ldots, df_x v_k)$$

définit une application linéaire $\Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ qui envoie 1 sur 1 et préserve le produit.

Remarque 5.18. Toute carte (U, ϕ) de M induit par "transport de formes" un isomorphisme linéaire :

$$\Omega^k(U) \to \Omega^k(\phi(U)),\ \alpha \mapsto (\phi^{-1})^*\alpha.$$

◀

Remarque 5.19. Les éléments de $\Omega^0(M)$, c'est-à-dire les 0-formes, sont les sections du fibré trivial $M \times \mathbb{R} \to M$. Autrement dit, ce sont les applications $M \to M \times \mathbb{R}$ qui s'écrivent $x \mapsto (x, f(x))$, avec f fonction sur M. En pratique, on identifiera une telle application avec f elle-même. En conséquence, nous obtenons une identification $\Omega^0(M) \simeq C^\infty(M)$. ◀

La différentielle extérieure des formes, que nous avions définie sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$, peut aussi être définie sur une variété.

Théorème 5.20. *Il existe une unique famille d'applications linéaires $d_k : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, $k \in \mathbb{N}$, telle que :*

(i) Pour toute fonction $f : \Omega^0(M) \simeq C^\infty(M)$, $d_0 f = df$ la différentielle usuelle,

(ii) Pour toute k-forme α et toute ℓ-forme β,

$$d_{k+\ell}(\alpha \wedge \beta) = d_k\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d_\ell\beta,$$

(iii) Pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$, $d_{k+1} \circ d_k = 0$.

Ici encore, nous noterons d à la place de d_k pour alléger les notations.

Définition 5.21. *L'application d s'appelle différentielle extérieure sur les formes différentielles de M.*

La démonstration qui suit présente quelques similarités avec la démonstration de l'équivalence entre dérivations de l'algèbre des fonctions et champs de vecteurs.

Démonstration. Commençons par remarquer que l'existence et l'unicité d'un tel d sont des propriétés invariantes par difféomorphisme. En effet, si $\phi : M \to N$ est un difféomorphisme, d vérifie les propriétés (i), (ii) et (iii) du théorème sur $\Omega(M)$ si et seulement si $(\phi^{-1})^* \circ d \circ \phi^*$ les vérifient sur $\Omega(N)$. Comme l'existence et l'unicité ont déjà été prouvées dans les ouverts de $\mathbb{R}^n$, elles sont aussi vraies sur les domaines des cartes.

Soit (U, ϕ) une carte de M. On sait donc que la différentielle extérieure existe de manière unique sur $\Omega(U)$. Notons-la δ_U. Etant donnée une application d vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) du théorème sur $\Omega(M)$, on définit la restriction $d|_U$ de d à $\Omega(U)$ par la formule

$$d|_U\omega(x) = d\tilde{\omega}(x),$$

pour tout $\omega \in \Omega(U)$, tout $x \in U$ et tout $\tilde{\omega} \in \Omega(M)$ qui coïncide avec ω au voisinage de x. Une telle forme $\tilde{\omega}$ existe bien : il suffit de multiplier ω par une fonction plateau à support suffisamment petit et étendre par 0 à toute la variété. De plus, cette formule ne dépend pas du choix de $\tilde{\omega}$. En effet, c'est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 5.22. *Supposons que $\omega_1 = \omega_2$ sur un ouvert V, alors pour toute application d vérifiant (i) et (ii), nous avons $d\omega_1|_V = d\omega_2|_V$.*

Démonstration. Soit $x \in V$. Posons $\alpha = \omega_1 - \omega_2$. Alors, pour toute fonction plateau f valant 1 au voisinage de x et à support inclus dans V, on a $f\alpha = 0$ donc :

$$0 = d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f\, d\alpha.$$

Comme $df_x = 0$ et $f(x) = 1$, nous obtenons $0 = d\alpha(x)$ et donc $d\omega_1(x) = d\omega_2(x)$, comme annoncé. □

Les propriétés (i), (ii) et (iii) du théorème étant toutes locales on démontre facilement que la restriction $d|_U$ les vérifie. Par unicité locale, $d|_U$ est la différentielle extérieure δ_U. On en déduit que pour tout $x \in U$ et toute forme ω sur M,

$$d\omega(x) = \delta_U\omega|_U(x)$$

ce qui donne l'unicité de d.

Réciproquement, définissons d par cette formule, autrement dit, pour toute forme ω posons $d\omega$ comme étant l'application qui à x associe $\delta_U\omega|_U(x)$ pour n'importe quel domaine de carte U. L'unicité locale implique que cette définition ne dépend pas du choix de la carte. On définit donc bien ainsi une application sur $\Omega^k(U)$ qui vérifie bien les conditions (i), (ii) et (iii) puisqu'il s'agit de conditions locales. □

Produit intérieur et dérivée de Lie. Nous avons déjà défini le produit intérieur dans le contexte linéaire. La définition s'étend facilement au cadre général :

Définition 5.23 (produit intérieur)**.** *Soit ω une k-forme sur M, $k \geqslant 0$, et soit X un champ de vecteurs. Le* produit intérieur *de ω par X est la $k-1$-forme définie par $\iota_X\omega = 0$ si $k = 0$ et*

$$\iota_X\omega_x(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \omega_x(X(x), v_1, \ldots, v_{k-1}),$$

pour tout $x \in M$, et tous vecteurs $v_1, \ldots, v_{k-1} \in T_xM$.

Proposition 5.24. *Le produit intérieur est une anti-dérivation, c'est à dire vérifie :*

$$\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)}\alpha \wedge (\iota_X\beta),$$

pour tout champ X et toutes formes α et β.

Définissons maintenant la dérivée de Lie d'une forme dans la direction d'un champ de vecteurs. Comme dans le cas de la dérivée de Lie d'un champ de vecteurs dans la direction d'un autre champ de vecteurs, *la dérivée de Lie est la version infinitésimale du transport par le flot.*

Définition 5.25 (dérivée de Lie)**.** *Soient X un champ de vecteurs, ω une k-forme différentielle. Alors, la dérivée de Lie de ω par rapport à X est donnée par*

$$\boxed{\mathcal{L}_X\omega(x) = \frac{d}{dt}((\phi^t)^*\omega(x))|_{t=0}}$$

où ϕ^t désigne le flot du champ de vecteurs X.

La dérivée de Lie est une dérivation sur l'algèbre des formes différentielles :

Proposition 5.26. *Pour tout champ X et toutes formes α et β,*

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X\beta).$$

Démonstration. On pose $f(t) = (\phi^t)^*\alpha(x)$ et $g(t) = (\phi^t)^*\beta(x)$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta)(x) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(f(t) \wedge g(t)) \\ &= f'(0) \wedge g(0) + f(0) \wedge g'(0) \\ &= (\mathcal{L}_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X\beta).\end{aligned}$$

□

La méthode la plus pratique pour calculer une dérivée de Lie est d'utiliser la formule suivante.

Proposition 5.27 (formule de Cartan)**.** *Pour tout forme ω et tout champ de vecteurs X,*

$$\boxed{\mathcal{L}_X\omega = \iota_X d\omega + d\iota_X\omega}$$

Démonstration. Remarquons d'abord qu'il s'agit d'une formule locale. Il suffit donc de la démontrer localement.

Remarquons ensuite que le membre de droite vérifie l'identité de Leibniz. En effet, en notant k le degré de α,

$$\begin{aligned}\iota_X d(\alpha\wedge\beta) &= \iota_X(d\alpha\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge d\beta)\\ &= (\iota_X d\alpha)\wedge\beta+(-1)^{k+1}d\alpha\wedge\iota_X\beta+(-1)^k\iota_X\alpha\wedge d\beta+\alpha\wedge(\iota_X d\beta),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}d\iota_X(\alpha\wedge\beta) &= d(\iota_X\alpha\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge\iota_X\beta)\\ &= (d\iota_X\alpha)\wedge\beta+(-1)^{k-1}\iota_X\alpha\wedge d\beta+(-1)^k d\alpha\wedge\iota_X\beta+\alpha\wedge d\iota_X\beta.\end{aligned}$$

D'où

$$(d\iota_X+\iota_X d)(\alpha\wedge\beta)=((d\iota_X+\iota_X d)\alpha)\wedge\beta+\alpha\wedge((d\iota_X+\iota_X d)\beta).$$

Maintenant, localement, toute forme est une somme de produits de fonctions et de différentielles de fonctions. Comme l'identité de Leibniz est vérifiée par les deux membres de la formule de Cartan, il nous suffit donc de l'établir pour les fonctions et leurs différentielles. Soit donc f une fonction. Alors,

$$\mathcal{L}_X f=\frac{d}{dt}f\circ\phi^t|_{t=0}=df\cdot X=\iota_X df=d\iota_X f+\iota_X df,$$

car $\iota_X f=0$ par définition, ce qui établit la formule de Cartan pour les fonctions. De plus,

$$\mathcal{L}_X df=\frac{d}{dt}(\phi^t)^*df|_{t=0}=\frac{d}{dt}d(f\circ\phi^t)|_{t=0}=d\frac{d}{dt}(f\circ\phi^t)|_{t=0}=d(\iota_X df)=d\iota_X(df)+\iota_X d(df),$$

car $d(df)=0$, ce qui établit la formule de Cartan pour les différentielles de fonctions. □

Remarquons que nous avons montré au passage que pour toute fonction $f\in C^\infty(M)$, on a

$$\boxed{\mathcal{L}_X f=df\cdot X=X\cdot f}$$

Il existe d'autres formules reliant ces différents opérateurs. Par exemple :

Exercice 25. *Montrer que pour tous champs de vecteurs X,Y et toute forme α, on a*

1. $\mathcal{L}_x\iota_Y\alpha-\iota_Y\mathcal{L}_X\alpha=\iota_{[X,Y]}\alpha$.
2. *Si α est une 1-forme,* $d\alpha(X,Y)=\mathcal{L}_X\iota_Y\alpha-\mathcal{L}_Y\iota_X\alpha-\iota_{[X,Y]}\alpha$.

IV Orientation des variétés

Commençons par quelques rappels sur l'orientation des expaces vectoriels. On fixe un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n. Etant données deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ décomposés dans la base $\mathcal{B}$. On note $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ son déterminant. Cette matrice de passage est également la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'isomorphisme u de E qui envoie $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$. On a donc $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')=\det u$. Enfin, rappelons les formules $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'')=\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'')$ et $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')=\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})^{-1}$.

On munit l'ensemble des bases de E de la relation d'équivalence

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \quad \text{si et seulement si} \quad \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0.$$

Exercice : vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence !

Les classes d'équivalence de bases pour cette relation sont appelées *orientations* de E. Tout espace vectoriel E admet exactement deux orientations. L'espace E est dit *orienté* s'il est muni d'une orientation $\mathcal{O}$. Dans ce cas, les bases de $\mathcal{O}$ sont dites *orientée* ou *positives*.

L'espace $\mathbb{R}^n$ admet une *orientation canonique*, celle de la base canonique.

Notons qu'étant donné un isomorphisme linéaire f, si $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ alors $f(\mathcal{B}) \sim f(\mathcal{B}')$. En effet, si u envoie $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$, alors $f \circ u \circ f^{-1}$ envoie $f(\mathcal{B})$ sur $f(\mathcal{B}')$, donc $\det_{f(\mathcal{B})}(f(\mathcal{B}')) = \det(f \circ u \circ f^{-1}) = \det u = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. Ceci permet de définir l'image $f(\mathcal{O})$ d'une orientation $\mathcal{O}$ par f comme la classe de la base $f(\mathcal{B})$ pour n'importe quelle base $\mathcal{B}$ représentant $\mathcal{O}$. On dit qu'un isomorphisme entre espaces vectoriels *préserve l'orientation*, s'il envoie base positive sur base positive, ou, de manière équivalente, si son déterminant dans des bases positives est strictement positif.

Via les espaces tangents et les différentielles d'applications, ces notions peuvent être étendues au cadre de la géométrie différentielle.

Définition 5.28. *On dit qu'un difféomorphisme ϕ entre ouverts de* $\mathbb{R}^n$ préserve l'orientation *si sa différentielle la préserve en tout point, autrement dit, en tout point x de son domaine* $\det d\phi_x > 0$.

Un atlas orienté *est un atlas dont tous les changements de cartes préservent l'orientation.*

Une orientation *d'une variété M est la donnée d'un sous-atlas orienté maximal parmi tous les sous-atlas orientés de son atlas maximal. On dit qu'une variété M est* orientable *si elle admet un atlas orienté, ou, de manière équivalente, si elle admet une orientation.*

Exemple 5.29. L'atlas de la sphère $\mathbb{S}^n$ donné par les projections stéreographiques n'est pas orienté. En effet, le changement de carte, donné par la formule

$$p_S \circ p_N^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|^2},$$

ne préserve pas l'orientation. En revanche, en remplaçant l'une des cartes par une carte de même domaine mais d'orientation opposée (par exemple en remplaçant p_S par $\tau \circ p_S$ où τ est une réflexion de $\mathbb{R}^n$), on obtient un atlas orienté. La sphère $\mathbb{S}^n$ est donc orientable. ◀

Nous allons beaucoup utiliser la remarque qui suit dans nos démonstrations.

Remarque 5.30 (Orientation d'une variété et orientation des espaces tangents). Soit M une variété et soient $\mathcal{O}_x$ une orientation de l'espace tangent T_xM pour tout $x \in M$. On dit que la famille $(\mathcal{O}_x)_{x\in M}$ est *localement constante* si pour tout point $a \in M$, il existe une carte (U, ϕ) en a telle que pour tout $x \in U$, l'image de $\mathcal{O}_x$ par $d\phi_x$ est constante.

Il y a une *bijection canonique entre orientations de M et familles d'orientations localement constantes de ses espaces tangents.*

En effet, à un atlas orienté, on peut associer la famille d'orientations données en tout point x par $\mathcal{O}_x = (d\phi_x)^{-1}(\mathcal{O}_{can})$ pour n'importe quelle carte de l'atlas orienté. Une telle famille est évidemment localement constante.

Réciproquement, s'il existe une famille d'orientations $(\mathcal{O}_x)$ localement constante des espaces tangents, alors on construit un atlas orienté en ne gardant que les cartes (U, ϕ) pour lesquelles $d\phi_x(\mathcal{O}_x) = \mathcal{O}_{\text{can}}$ pour tout $x \in U$. ◀

Proposition 5.31. *Soit M une variété orientable connexe. Alors M admet exactement 2 orientations.*

Démonstration. Soient $(\mathcal{O}_x)$ et $(\mathcal{O}'_x)$ deux familles d'orientations localement constantes. Alors, elles coïncident en un point si et seulement si elles coïncident en un voisinage. L'ensemble des points où elles coïncident, ainsi que son complémentaire, sont des ouverts. On conclut par connexité. Il y a donc autant d'orientations de M qu'il y a d'orientations de l'un de ses espaces tangents, c'est-à-dire 2. □

REMARQUE 5.32. Supposons que l'on ait une décomposition en somme directe $E = F \oplus G$. Soient $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F, et $\mathcal{B}_G$, $\mathcal{B}'_G$ deux bases de G. Supposons que $\mathcal{B}_G \sim \mathcal{B}'_G$ et $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G \sim \mathcal{B}'_F \cup \mathcal{B}'_G$. Alors $\mathcal{B}_F \sim \mathcal{B}'_F$. Par conséquent, la donnée d'une orientation sur E et d'une orientation d'un supplémentaire de F déterminent une orientation de F.

En particulier, si $u : (E, \mathcal{O}) \to (E', \mathcal{O}')$ est une application linéaire surjective entre espaces vectoriels orientés, alors u est un isomorphisme entre un supplémentaire de $\ker(u)$ et E', et induit donc une orientation sur ce supplémentaire. D'après ce qui précède $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ déterminent ainsi une orientation de $\ker(u)$. Pour cette orientation, une base $(e_1, \dots, e_k)$ de $\ker u$ est positive si et seulement s'il est possible de la compléter en une base positive $(e_1, \dots, e_n)$ de E de telle sorte que $(u(e_{k+1}), \dots, u(e_n))$ est une base positive de E'. ◀

Proposition 5.33. *Soient M une variété orientée, $f : M \to \mathbb{R}^{n-k}$ une submersion avec $k \geqslant 1$, et $N = f^{-1}(0)$. Alors N (qui est une sous-variété de M) admet une orientation induite par celle de M et celle (canonique) de $\mathbb{R}^{n-k}$ par la remarque qui précède.*

Démonstration. Soit $(\mathcal{O}_x)$ une famille localement constante d'orientations de l'espace tangent. La remarque qui précède appliquée à l'application $df_x : (T_xM, \mathcal{O}_x) \to (\mathbb{R}^{n-k}, \mathcal{O}_{\text{can}})$ permet de définir une famille localement constante d'orientations sur les espaces $T_xN = \ker df_x$. □

Exercice 26. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, montrer que l'orientation induite sur N est aussi donnée par l'atlas orienté constitué des applications de la forme $(U \cap N, \phi|_{U\cap N})$ avec (U, ϕ) une carte orientée de M telle que $f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots x_n) = (x_{k+1}, \dots, x_n)$.*

On dit qu'un difféomorphisme local entre variétés orientées *préserve l'orientation* si sa différentielle préserve l'orientation des espaces tangents en tout point.

Proposition 5.34 (Orientation d'un quotient de variété)**.** *Soient M une variété et G un groupe discret agissant librement et proprement par difféomorphismes sur M. Alors, il existe une bijection canonique entre les orientations de M préservées par l'action de G (c'est-à-dire par l'action de chacun des éléments de G) et les orientations du quotient M/G, induite par l'action sur les orientations de la projection canonique $p : M \to M/G$.*

Démonstration. Pour tout élément $g \in G$, notons $\psi_g : x \mapsto g \cdot x$. Par définition, $p \circ \psi_g = p$ donc $dp_{g\cdot x} \circ d(\psi_g)_x = dp_x$ en tout point x.

A une famille d'orientations localement constante $(\mathcal{O}_x)$ du quotient $N = M/G$, on associe l'orientation de N tirée en arrière par p, c'est à dire donnée par la formule $(dp_x)^{-1}(\mathcal{O}_x)$. Celle-ci est automatiquement invariante par G, car pour tout g,

$$d(\psi_g)_x \circ (dp_{g\cdot x})^{-1}(\mathcal{O}_x) = (dp_x)^{-1}(\mathcal{O}_x).$$

Réciproquement, étant donnée une orientation $(\mathcal{O}_x)$ invariante par G, on peut la pousser en avant par p en posant $\mathcal{O}'_y = dp_x(\mathcal{O}_x)$ pour n'importe quel antécédent x de y par p. Comme deux antécédents d'un même point sont dans la même orbite sous l'action de G, l'invariance par G implique que $(\mathcal{O}'_y)$ est une famille bien définie d'orientations sur les espaces tangents à M/G. □

Cette proposition permet de traiter plusieurs de nos exemples favoris.

Corollaire 5.35. *(i) Le tore $\mathbb{T}^n$ est orientable,*

(ii) la bouteille de Klein et le Ruban de Moebius ne sont pas orientables,

(iii) l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est orientable si et seulement si n est impair.

Démonstration. Les points (i) et (ii) sont des applications directes de la proposition précédente. L'action de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}^n$ par translation préserve l'orientation de $\mathbb{R}^n$, d'où l'orientation du tore. En revanche, l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}\times]-1,1[$ donnée par $n\cdot(x,y) = (x+n,(-1)^n y)$, pour $n\in\mathbb{Z}$, $x\in\mathbb{R}$ et $y\in]-1,1[$ et l'action de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ donnée par $(n,k)\cdot(x,y) = ((-1)^k x + n, y+k)$, pour $n,k\in\mathbb{Z}$, $x,y\in\mathbb{R}$ ne préservent pas l'orientation, d'où la non-orientabilité du ruban de Moebius et de la bouteille de Klein.

Passons au point (iii). D'après la proposition, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est orientable si et seulement si l'application antipodale $a : x\mapsto -x$ préserve l'orientation de $\mathbb{S}^n$. L'orientation de chacun des espaces tangents de $\mathbb{S}^n = f^{-1}(0)$ avec $f(x) = \|x\|^2$ est donnée par la proposition 5.33. On voit que pour cette orientation, $(v_1,\dots,v_n)$ est une base positive de $T_x\mathbb{S}^n$ si et seulement si la base $(v_1,\dots,v_n,x)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ est positive (en effet, $df_x(x) = 2\|x\|^2 > 0$). On en déduit que a préserve l'orientation si et seulement si $(v_1,\dots,v_n,x)$ est de la même orientation que $(-v_1,\dots,-v_n,-x)$, autement dit si et seulement si n est impair. □

Définition 5.36 (formes volumes)**.** *Une* forme volume *sur une variété M est une forme différentielle de degré maximal (c'est-à-dire de degré égal à la dimension de la variété) qui ne s'annule en aucun point.*

Par exemple, la forme $dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ $(= \det_{\mathcal{B}_0})$ est une forme volume sur $\mathbb{R}^n$. Remarquons qu'une base $(v_1,\dots,v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est positivement orientée si et seulement si $dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n(v_1,\dots,v_n) > 0$.

Théorème 5.37. *Pour toute variété M de dimension n, il y a équivalence entre*

(a) il existe une forme volume sur M,

(b) le fibré $\Lambda^n T^*M$ est trivialisable,

(c) M est orientable.

Démonstration. L'équivalence entre (a) et (b) a déjà été vue : un fibré en droite est trivial si et seulement s'il admet une section qui ne s'annule pas. Or, une forme volume n'est rien d'autre qu'une section de $\Lambda^n T^*M$ qui ne s'annule pas.

Montrons que (c) implique (a). On se donne un atlas orienté $(U_i,\phi_i)_{i\in I}$ et $(\rho_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$. Notons $\sigma = dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ la forme volume standard sur $\mathbb{R}^n$. La forme $\phi_i^*\sigma$ n'est définie que sur U_i mais la forme $\rho_i\,\phi_i^*\sigma$, qui est à support compact inclus dans U_i, peut être étendue en une forme ω_i globalement définie sur M.

Posons $\omega = \sum_{i\in I} \omega_i$ et vérifions que ω est une forme volume sur M.
Soit $x \in M$. Alors, il existe un indice j pour lequel $\rho_j(x) > 0$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\omega(x) &= \sum_{i\in I} \rho_i(x)\phi_i^*\sigma(x) \\
&= \rho_j(x) \sum_{i\in I} \frac{\rho_i(x)}{\rho_j(x)} \phi_j^*(\phi_i \circ \phi_j^{-1})^*\sigma(x) \\
&= \rho_j(x) \sum_{i\in I} \frac{\rho_i(x)}{\rho_j(x)} \phi_j^*(\det(d(\phi_i \circ \phi_j^{-1}))\,\sigma)(x) \\
&= \left(\sum_{i\in I} \frac{\rho_i(x)}{\rho_j(x)} \det(d(\phi_i \circ \phi_j^{-1})_{\phi_j(x)}) \right) \rho_j(x)\, \phi_j^*\sigma(x).
\end{aligned}$$

Comme l'atlas est orienté, chacun des termes de la somme est positif et le terme d'indice j est strictement positif. La somme est donc non-nulle et il en est de même de $\rho_j(x)\,\phi_j^*\sigma(x)$. Nous avons prouvé que $\omega(x) \neq 0$.

Démontrons maintenant que (a) implique (c). Soit donc ω une forme volume. Pour tout $x \in M$, on définit une orientation $\mathcal{O}_x$ sur M en décidant qu'une base $(v_1, \ldots, v_n)$ est positivement orientée si et seulement si $\omega_x(v_1, \ldots, v_n) > 0$. Vérifions que la famille d'orientations ainsi construite est localement constante. Soit $a \in M$ et soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de T_aM positive pour $\mathcal{O}_a$. Soit ϕ une carte en a. Pour $i = 1, \ldots, n$, on pose $V_i(x) = (d\phi_x)^{-1}(d\phi_a(v_i))$. La famille $(V_1, \ldots, V_n)$ forme un repère de TM défini au voisinage de a, qui coïncide avec $(v_1, \ldots, v_n)$ en a. De plus, par continuité, comme $\omega_a(v_1, \ldots, v_n) > 0$, on a $\omega_x(V_1(x), \ldots, V_n(x)) > 0$ pour x proche de a. Par conséquent, $(V_1(x), \ldots, V_n(x))$ représente $\mathcal{O}_x$ pour x proche de a. Comme $d\phi_x(V_i(x)) = d\phi_a(v_i)$ ne dépend pas de x, on en déduit que $d\phi_x(\mathcal{O}_x)$ ne dépend pas de x (au voisinage de a). On a bien prouvé que la famille d'orientations $(\mathcal{O}_x)$ est localement constante. □

V Intégration des formes différentielles

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $\Omega_c^n(U)$ l'ensemble des formes différentielles de degré n, à support compact. Notons que les formes que l'on considère ici ont un degré égal à la dimension de l'espace. Tout élément de $\Omega_c^n(U)$ s'écrit de manière unique $\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, pour une fonction f à support compact sur U.

On définit alors tout simplement l'intégrale de $\omega \in \Omega_c^n(U)$ par la formule :

$$\boxed{\int_U \omega := \int_U f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n} \tag{5.2}$$

L'intéret de cette définition vient de son invariance par difféomorphisme :

Proposition 5.38 (changement de variable)**.** *Soient U, V des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\phi : U \to V$ un difféomorphisme* ***préservant l'orientation****. Alors, pour toute forme $\omega \in \Omega_c^n(V)$,*

$$\int_U \phi^*\omega = \int_V \omega.$$

Démonstration. Ecrivons $\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Alors,

$$\begin{aligned}\phi^*\omega &= f\circ\phi\, \phi^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)\\ &= f\circ\phi\, \det(d\phi)\, dx_1 \wedge \ldots dx_n,\end{aligned}$$

d'après la remarque 5.14 (b). Comme ϕ préserve l'orientation, $\det d\phi = |\det d\phi|$ et la proposition est donc conséquence de la formule de changement de variable pour l'intégrale de Lebesgue. □

REMARQUE 5.39. Bien sûr, dans la proposition précédente, si ϕ inverse l'orientation, alors $\int_U \phi^*\omega = -\int_V \omega$. C'est une conséquence de la démonstration ci-dessus, car alors $\det d\phi = -|\det d\phi|$. ◀

Etant donnée une variété, on note $\Omega^n_c(M)$ l'ensemble des n-formes à support compact sur M. Bien sûr, si M est compact, alors $\Omega^n_c(M) = \Omega^n(M)$.

Théorème 5.40 (Intégration des formes différentielles)**.** *Soit M une variété **orientée** de dimension n. Il existe une unique forme linéaire $\int_M : \Omega^n_c(M) \to \mathbb{R}$ telle que pour toute carte orientée (U, ϕ) de M et toute n-forme ω à support compact dans U, on ait :*

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*\omega.$$

Démonstration. Supposons d'abord qu'une telle forme linéaire existe. Soit $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$ un atlas orienté de M, et $(\rho_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$. Pour toute n-forme à support compact ω, nous pouvons écrire $\omega = \sum_{i\in I} \rho_i\omega$. Cette somme est en fait finie car le support de ω est compact et le support des partitions de l'unité est localement fini. Alors, nécessairement,

$$\int_M \omega = \sum_{i\in I} \int_M \rho_i\omega = \sum_{i\in I} \int_{\phi_i(U_i)} (\phi_i^{-1})^*(\rho_i\omega). \tag{5.3}$$

Cette formule implique l'unicité.

Pour l'existence, on définit $\int_M$ par la formule ci-dessus. La linéarité est claire. Supposons que $\omega \in \Omega_c(U)$, où U est le domaine d'une carte (U, ψ). Alors,

$$\begin{aligned}\int_M \omega &= \sum_i \int_{\phi_i(U_i\cap U)} (\phi_i^{-1})^*(\rho_i\omega)\\ &= \sum_i \int_{\psi(U_i\cap U)} (\psi^{-1})^*(\rho_i\omega)\\ &= \int_{\psi(U)} (\psi^{-1})^* \left(\sum_i \rho_i\omega\right)\\ &= \int_{\psi(U)} (\psi^{-1})^*\omega,\end{aligned}$$

où la deuxième égalité est conséquence de la formule de changement de variable (proposition 5.38). La forme linéaire ainsi définie vérifie donc bien les conditions demandées. □

Il y a de multiples remarques à faire.

REMARQUE 5.41.

(a) L'unicité implique que la définition de $\int_M$ donnée ci-dessus ne dépend pas des choix d'atlas orienté, ni de partition de l'unité. Dans la pratique, on n'utilise pas la formule donnée dans la démonstration, car les partitions de l'unité sont en général impossible à calculer.

(b) Si l'on change l'orientation de M, la forme linaire $\int_M$ est remplacée par son opposé $-\int_M$. En effet, cela revient à remplacer toutes les cartes de l'atlas $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$ ayant servi à la démonstration par $(U_i, \tau\circ\phi_i)_{i\in I}$ où τ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ renversant l'orientation fixé.

(c) Si ω est une forme volume sur une variété compacte connexe, alors $\int_M \omega \neq 0$. En effet, dans la formule (5.3), tous les termes ont le même signe.

(d) Si $\psi : M \to N$ est un difféomorphisme préservant l'orientation, alors

$$\boxed{\int_M \phi^*\omega = \int_N \omega}.$$

On peut le voir comme une conséquence de l'unicité ou le déduire de la formule (5.3) et de la proposition 5.38.

(e) Plus généralement, si B est un borélien [1] de M (par exemple un ouvert ou un fermé de M), on peut montrer qu'il existe une unique forme linéaire

$$\int_B : \Omega^n_B(M) \to \mathbb{R}$$

où $\Omega^n_B(M)$ est l'ensemble des n-formes ω sur M telles que $\overline{(\mathrm{Supp}\omega)\cap B}$ est compact, telle que pour toute carte orientée (U, ϕ) de M et toute $\omega \in \Omega^n_B(M)$ à support dans U, on ait

$$\int_B \omega = \int_{\phi(B\cap U)} (\phi^{-1})^*\omega.$$

L'intégrale des formes différentielles est σ-additive sur les domaines.

(f) Si ω est une k-forme, $k \leqslant n$ et $N \subset M$ est une sous-variété orientée de dimension k de M, alors on définit l'intégrale de ω sur N comme l'intégrale $i^*\omega$ où i est l'injection canonique $N \to M$:

$$\int_N \omega := \int_N i^*\omega.$$

En combinant avec la remarque (d) ci-dessus, on obtient que pour tout plongement $j : V \to M$ où V est un ouvert de $\mathbb{R}^k$ et pour toute k-forme ω,

$$\int_{j(V)} \omega = \int_V j^*\omega.$$

Bien sûr, ici, $j(V)$ est muni de l'orientation image par j de l'orientation de $\mathbb{R}^k$. Cette dernière formule est très utile pour calculer des intégrales de formes en pratique.

◀

1. Rappelons qu'un borélien d'un espace topologique est un élément de la tribu engendrée par les ouverts de M.

Exemple 5.42. Soit α une 1-forme et $\gamma : I \to M$ une courbe paramétrée lisse. Alors,

$$\int_{\gamma(I)} \alpha = \int_I \gamma^*\alpha = \int_I \alpha_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))\, dt.$$

En effet, pour tout $t \in I$, et tout $\tau \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$\gamma^*\alpha_t(\tau) = \alpha_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t)\tau) = \alpha_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))\tau.$$

En notant, comme d'habitude, dt la 1-forme égale en tout point à la forme linéaire $\tau \mapsto \tau$, nous obtenons bien la formule

$$\gamma^*\alpha_t = \alpha_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))\, dt.$$

◀

Exercice 27. *Vérifier que l'intégrale de la forme*

$$d\theta = \frac{y\, dx - x\, dy}{x^2 + y^2}$$

sur un cercle du plan centré en l'origine vaut 2π.

Exemple 5.43. Nous allons calculer l'intégrale de la forme $\omega = z\, dx \wedge dy$ sur la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$.

On paramètre la sphère à l'aide des coordonnées sphèriques. Autrement dit, on la voit comme image du plongement

$$j : (\varphi, \theta) \mapsto (\cos\theta\, \cos\varphi, \cos\theta\, \sin\varphi, \sin\theta), \quad]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3.$$

On veut appliquer la formule $\int_{j(V)} \omega = \int_V j^*\omega$. Il nous faut donc calculer $j^*\omega$. Calculons :

$$j^*dx = d(x \circ j) = -\sin\theta\, \cos\varphi\, d\theta - \sin\varphi\, \cos\theta\, d\varphi,$$

et de même,

$$j^*dy = -\sin\theta\, \sin\varphi\, d\theta + \cos\varphi\, \cos\theta\, d\varphi.$$

D'où,

$$\begin{aligned} j^*\omega &= j^*(z\, dx \wedge dy) \\ &= \sin\theta(-\sin\theta\, \cos\varphi)(\cos\varphi\, \cos\theta)\, d\theta \wedge d\varphi - \sin\theta(-\sin\theta\, \sin\varphi)(-\sin\varphi\, \cos\theta)\, d\theta \wedge d\varphi \\ &= \sin^2\theta\, \cos\theta\, d\varphi \wedge d\theta. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant calculer l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{S}^2} \omega = \int_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]0,2\pi[} j^*\omega = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, \cos\theta\, d\theta\, d\varphi = 2\pi \left[\tfrac{1}{3}\sin^3\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{4}{3}\pi.$$

◀

VI La formule de Stokes

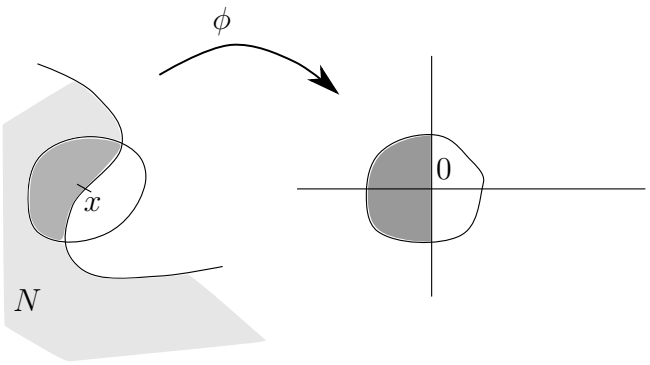
VI.1 Domaines à bord lisse

Dans toute la suite, nous utiliserons la notation $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$. On fixe une variété M de dimension $n \geqslant 1$.

Définition 5.44 (Domaines à bord lisse)**.** *Une partie N d'une variété M est appelée* domaine à bord lisse *de M si N est l'adhérence d'un ouvert et si pour tout x appartenant à la frontière $\partial N = \overline{N} \setminus \mathring{N}$ de N, il existe une carte (U, ϕ) en x, telle que $\phi(x) = 0$ et*

$$\phi(U \cap N) = (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \phi(U).$$

La frontière ∂N est appelée bord *de N.*



Exemple 5.45. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse dont 0 est une valeur régulière. Alors, $\{x \in M \,|\, f(x) \leqslant 0\}$ est un domaine à bord lisse de M.

En effet, par le théorème de forme normale des submersions, il existe une carte ϕ telle que

$$f \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = x_1,$$

pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ au voisinage de 0. Alors, localement $f(x) \leqslant 0$ si et seulement si $f \circ \phi^{-1}(\phi(x)) \leqslant 0$, si et seulement si la première coordonnée de $\phi(x)$ est négative. Donc localement, ϕ envoie $\{x \,|\, f(x) \leqslant 0\}$ sur $\{x \,|\, x_1 \leqslant 0\}$. ◀

Dans la proposition qui suit, on note p la projection canonique $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$.

Proposition 5.46. *Soit N un domaine à bord lisse de M. Alors le bord ∂N est une sous-variété de codimension 1 de M.*

De plus, si M est orientée, et $n \geqslant 2$, ∂N admet une orientation induite telle que si (U, ϕ) est une carte orientée en un point de ∂N vérifiant $\phi(U \cap N) = (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \phi(U)$, alors $(U \cap \partial N, p \circ \phi|_{U \cap \partial N})$ est une carte orientée de ∂N.

Démonstration. Pour tout $x \in \partial N$, une carte (U, ϕ) en x telle que

$$\phi(U \cap N) = (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \phi(U)$$

vérifie en particulier

$$\phi(U \cap \partial N) = (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \phi(U).$$

Ceci montre que ∂N est une sous-variété.

Montrons que les applications de la forme $(U \cap \partial N, p \circ \phi|_{U\cap\partial N})$, avec (U, ϕ) une carte orientée en un point de ∂N vérifiant $\phi(U \cap N) = (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \phi(U)$, forment un atlas orienté de ∂N. Par définition d'un domaine à bord lisse, les domaines de ces applications recouvrent ∂N (on peut ajuster l'orientation de ϕ en composant par une réflexion laissant la première coordonnée invariante).

Etant données deux telles cartes $(U\cap\partial N, p\circ\phi|_{U\cap\partial N})$ et $(U'\cap\partial N, p\circ\phi'|_{U'\cap\partial N})$, par hypothèse, le changement de carte $\phi' \circ \phi^{-1}$ préserve l'orientation et envoie $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$ dans lui-même. Il en est donc de même de sa différentielle, qui préserve donc l'orientation du facteur $\mathbb{R}^{n-1}$. Cela montre que le changement de carte entre $p \circ \phi|_{\partial N}$ et $p \circ \phi'|_{\partial N}$ préserve l'orientation. □

Remarque 5.47. Appelons *vecteur sortant* à N tout vecteur $v \in T_xM$ en $x \in \partial N$ qui est de la forme $c'(0)$ avec c un chemin en x tel que $c(t) \in \mathring{N}$ pour $t < 0$, $c(t) \notin N$ pour $t > 0$ et $c'(0) \notin T_x\partial N$.

Avec l'orientation donnée dans la proposition précédente, si v est un vecteur sortant en x, alors une base $(v_2, \dots, v_n)$ de $T_x\partial N$ est positive si et seulement si $(v, v_2, \dots, v_n)$ est une base positive de T_xM.

Justifions cette affirmation. Les cartes orientées envoient l'orientation de l'espace tangent sur l'orientation canonique, donc une base $(v_2, \dots, v_n)$ est positive si et seulement si la famille $(d\phi_x(v_2), \dots, d\phi_x(v_n))$ est une base positive dans $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Comme $d\phi_x(v)$ a une première coordonnée positive, c'est équivalent à $(d\phi_x(v), d\phi_x(v_2), \dots, d\phi_x(v_n))$ positive et donc à $(v, v_2, \dots, v_n)$ positive. ◀

VI.2 La formule de Stokes

Nous pouvons maintenant énoncer la formule de Stokes.

Théorème 5.48 (Formule de Stokes)**.** *Soient M une variété orientée, de dimension $n \geqslant 2$, et N un domaine à bord lisse. On note $j : \partial N \to M$ l'injection canonique. Alors, pour toute $n-1$-forme ω sur M telle que* $\operatorname{Supp}\omega \cap N$ *est compact,*

$$\boxed{\int_{\partial N} j^*\omega = \int_N d\omega}$$

Remarque 5.49. Dans le cas où $M = \mathbb{R}$ et N est un intervalle de la forme $[a, b]$, nous n'avons pas défini l'intégrale d'une 0-forme sur une variété de dimension 0. En revanche, on sait que l'on a pour $\omega(x) = f(x)$, $d\omega = f'(x)\,dx$, donc

$$\int_{[a,b]} f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

◀

Démonstration. Nous allons commencer par établir la formule de Stokes dans le cas où $M = \mathbb{R}^n$ et $N = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$. Dans ce cas, une $n-1$-forme ω s'écrit

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i\,dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

La différentielle s'écrit alors explicitement :

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Nous pouvons ensuite exprimer l'intégrale de $d\omega$ sur N.

$$\int_N d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i-1} \int \int \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Or, l'hypothèse sur le support de ω implique que pour $i \geqslant 2$, la fonction f_i est à support compact et donc $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i$ s'annule. On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_N d\omega &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $j^*\omega = f_1|_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}} dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n|_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}}$ car $dx_1|_{\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}} = 0$. Nous avons donc bien établi dans ce cas la formule $\int_{\partial N} j^*\omega = \int_N d\omega$.

Notons au passage que dans ce cas particulier, si jamais ω est à support inclus dans l'intérieur de N, alors on obtient $\int_N d\omega = \int_{\partial N} j^*\omega = 0$. Bien sûr, si ω est à support dans le complémentaire de N, on obtient la même formule.

Le cas général se déduit facilement du cas particulier à l'aide de partitions de l'unité. On choisit un atlas orienté (U_i, ϕ_i) de cartes de M telles que $\phi_i(U_i \cap N) = (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \phi_i(U_i)$. Un tel atlas existe par définition des domaines à bord lisse. Bien sûr, une telle carte définie au voisinage d'un point de $\mathring{N}$ a son image incluse dans l'intérieur de $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$, et une telle carte définie au voisinage d'un point de $M \setminus N$ a son image incluse dans le complémentaire de $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$. On choisit également une partition de l'unité f_i subordonnée au recouvrement (U_i), et on note $\omega_i = f_i\omega$. Alors, en utilisant le cas particulier et la formule de changement de variable,

$$\begin{aligned} \int_N d\omega &= \sum_i \int_N d\omega_i = \sum_i \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\phi_i^{-1})^* d\omega_i = \sum_i \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\left((\phi_i^{-1})^*\omega_i\right) \\ &= \sum_i \int_{\mathbb{R}^{n-1}} j^*_{\mathbb{R}^{n-1}} (\phi_i^{-1})^*\omega_i = \sum_i \int_{\mathbb{R}^{n-1}} ((\phi_i|_{\partial N})^{-1})^*\omega_i = \sum_i \int_{\partial N} \omega_i \\ &= \int_{\partial N} \omega. \end{aligned}$$

□

Remarque 5.50. La formule de Stokes s'applique au cas particulier où $N = M$. Dans ce cas, $\partial N = \emptyset$ et l'on obtient

$$\int_M d\omega = 0,$$

pour toute $n-1$-forme ω à support compact. ◀

Exemple 5.51. Calculons le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^3$. Une première méthode consiste à écrire la forme $dx \wedge dy \wedge dz$ en coordonnées sphériques, puis intégrer sur le pavé droit $[0,1] \times [0,2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Une autre méthode consiste à appliquer la formule de Stokes à la forme $z\,dx \wedge dy$, dont la différentielle est $dx \wedge dy \wedge dz$. Il se trouve que l'on a déjà calculé son intégrale sur la sphère : $\frac{4}{3}\pi$, qui est bien le volume de la boule unité. ◀

Exemple 5.52. Soit Ω un domaine à bord lisse de $\mathbb{R}^2$, dont le bord est donné par une courbe lisse simple $\gamma : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2$. On note $\gamma = (f, g)$ les applications coordonnées de γ. Alors, en utilisant la formule de Stokes :

$$\text{Aire}(\Omega) = \int_\Omega dx \wedge dy = \int_{\partial\Omega} x\,dy = \int_0^T f(t)\,g'(t)\,dt.$$

Une telle aire est donc très simple à calculer. Notons que la formule de Stokes donne aussi :

$$\text{Aire}(\Omega) = -\int_{\partial\Omega} y\,dx = \tfrac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (x\,dy - y\,dx).$$

◀

Les deux corollaires suivants sont des cas particuliers de la formule de Stokes connus sous d'autres noms.

Corollaire 5.53 (Formule de Green-Riemann)**.** *Soit D un domaine à bord lisse du plan. Alors pour toutes fonctions P, Q lisses sur D,*

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Le corollaire suivant demande un peu de préparation. Etant donné un domaine à bord lisse Ω de $\mathbb{R}^3$. On se donne un champ de vecteurs N sur $\mathbb{R}^3$ qui coïncide en tout point x de $\partial\Omega$ avec le vecteur normal unitaire sortant. On note $j : \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ l'injection canonique. La 2-forme

$$\sigma = j^*(\iota_N(dx \wedge dy \wedge dz))$$

est appelée *forme d'aire* sur $\partial\Omega$. Etant donné un champ de vecteurs X, on appelle *flux* de X à travers $\partial\Omega$ la quantité

$$\text{Flux}_{\partial\Omega}(X) = \int_{\partial\Omega} \langle X, N\rangle \sigma.$$

Intuitivement, si l'on pense au flot de X comme à un écoulement de fluide, le flux de X à travers $\partial\Omega$ est la quantité infinitésimale de matière qui traverse $\partial\Omega$ par unité de temps.

On appelle *divergence* de $X = (X_1, X_2, X_3)$ la fonction $\text{div}(X) = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z}$. Nous pouvons maintenant énoncer le deuxième corollaire :

Corollaire 5.54 (Formule de Gauss-Ostrogradski)**.** *Pour tout champ de vecteurs X,*

$$\text{Flux}_{\partial\Omega}(X) = \int_\Omega \text{div}(X)\,dx\,dy\,dz.$$

Démonstration. Notons $\alpha = dx \wedge dy \wedge dz$. Par définition, $\langle X, N\rangle\sigma = \langle X, N\rangle j^*(\iota_N\alpha)$ en tout point de $\partial\Omega$. Comme α est une 3-forme et $\partial\Omega$ est de dimension 2, la restriction de α à $\partial\Omega$ est nulle. En particulier, pour tout champ de vecteurs T tangent à $\partial\Omega$, $j^*(\iota_T\alpha) = 0$.

Ceci s'applique en particulier au champ de vecteurs $T = X - \langle X, N\rangle N$. On en déduit :

$$\langle X, N\rangle\sigma = j^*(\iota_X\alpha).$$

Par la formule de Stokes, nous avons donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{Flux}_{\partial\Omega}(X) &= \int_\Omega di_X\alpha \\ &= \int_\Omega d(X_1 dy \wedge dz + X_2 dz \wedge dx + X_3 dx \wedge dy) \\ &= \int_\Omega \mathrm{div}(X)\, dx\, dy\, dz.\end{aligned}$$

□

VI.3 Une application topologique : le théorème de Brouwer

Nous allons utiliser la formule de Stokes pour montrer le théorème suivant :

Théorème 5.55 (Brouwer)**.** *Toute application continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même admet un point fixe.*

Pour cela, nous allons d'abord établir le lemme suivant :

Lemme 5.56 (de non-rétraction)**.** *Soit N un domaine à bord lisse orientable et compact d'une variété. Alors, il n'existe pas d'application lisse $r : N \to \partial N$ telle que $r|_{\partial N} = \mathrm{Id}_{\partial N}$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une telle application r. Soit ω une forme volume sur ∂N. Alors, on sait que $\int_{\partial N}\omega \neq 0$. Notons par ailleurs que $d\omega$ est nulle car c'est une n-forme sur ∂N qui est de dimension $n-1$. Notons $j : \partial N \to N$ l'injection canonique. Par hypothèse, $r \circ j = \mathrm{Id}_{\partial N}$. Alors, par la formule de Stokes,

$$0 = \int_N r^* d\omega = \int_N d(r^*\omega) = \int_{\partial N} j^* r^*\omega = \int_{\partial N}\omega \neq 0.$$

On obtient bien une contradiction. □

Démonstration. Supposons qu'il existe une application continue sans point fixe de la boule fermée dans elle-même, que l'on notera $\overline{B}$. Alors, en approchant f par une application lisse f_ε telle que $\|f_\varepsilon\| < 1 + \varepsilon$ et en considérant $\frac{1}{1+\varepsilon}f_\varepsilon$, on obtient une application lisse de $\overline{B}$ dans elle-même, sans point fixe pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. On peut donc supposer dans la suite de cette démonstration que f est lisse.

On définit alors $r(x)$ comme l'intersection de la droite passant par x et $f(x)$ (qui sont distincts) avec la sphère unité, située du côté de x. Autrement dit, $r(x) = x + \lambda(x - f(x))$ où λ est l'unique racine positive de l'équation $\|x + \lambda(x - f(x))\|^2 = 1$. On sait que r est lisse grâce aux formules donnant les racines d'un polynôme du second degré. De plus, r est bien l'identité en restriction au bord de $\overline{B}$. Nous obtenons une contradiction avec le lemme. □

Chapitre 6

Cohomologie de De Rham

Dans ce chapitre, nous introduisons la cohomologie de De Rham, qui est un outil algébrique permettant de distinguer des variétés non homéomorphes. Nous calculerons la cohomologie de De Rham sur certains exemples et donnerons quelques applications. Ce chapitre constitue une première approche de la topologie algébrique, dont le but est de classer les espaces topologiques à l'aide d'invariants algébriques.

I Formes fermées et formes exactes

On se place sur une variété M de dimension n donnée.

Définition 6.1. *Une forme différentielle ω est dite fermée si $d\omega = 0$. Elle est dite exacte s'il existe une forme α telle que $\omega = d\alpha$.*

Remarque 6.2.

(a) Une n-forme est toujours fermée.

(b) Une 0-forme est fermée si et seulement si c'est une fonction localement constante. Elle n'est jamais exacte, sauf si elle est nulle.

(c) Comme $d \circ d = 0$, une forme exacte est toujours fermée. La réciproque est fausse en général et c'est ce phénomène précis que nous étudierons en détail dans ce chapitre !

◀

Proposition 6.3. *Soit V une sous-variété compacte orientable de dimension k, et ω une k-forme.*

(a) Si ω est exacte alors $\int_V j^*\omega = 0$.

(b) Si ω est fermée et s'il existe une sous-variété orientable W telle que V soit le bord d'un domaine à bord lisse compact de W, alors $\int_V j^*\omega = 0$.

Démonstration. Chacun des deux points va être une application de la formule de Stokes.

(a) Si $\omega = d\alpha$ alors, d'après la formule de Stokes appliquée au domaine V dans la variété V (donc de bord vide) $\int_V j^* d\alpha = 0$ car le bord est vide.

(b) Si $d\omega = 0$ et si $V = \partial\Omega$, alors $\int_V j^*\omega = \int_\Omega d\omega = 0$.

□

Exemple 6.4. Etudions des exemples de 1-formes définies sur des ouverts du plan. Une 1-forme sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ s'écrit

$$\omega = f\,dx + g\,dy.$$

Elle est fermée si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$.

Dans le cas où $U = \mathbb{R}^2$ et si ω est fermée, alors nous allons vérifier que ω est exacte. Posons $F(x,y) = \int_0^x f(t,y)dt + \int_0^y g(0,t)dt$. Alors,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) & = f(x,y), \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) & = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t,y)dt + g(0,y) = \int_0^x \frac{\partial g}{\partial x}(t,y)dt + g(0,y) = g(x,y), \end{cases}$$

donc $\omega = dF$.

Par exemple, considérons la forme $\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$, définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Nous avons déjà vu que $d\omega = 0$. Il s'agit donc d'une forme fermée. En revanche, nous pouvons montrer qu'elle n'est pas exacte sur U.

En effet, si ω était exacte, alors son intégrale sur le cercle unité serait nulle (proposition précédente). Or nous avons vu que $\int_{\mathbb{S}^1} \omega = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$.

Dans le cas où $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$, les p_i étant des points 2 à 2 distincts, on peut construire de multiples exemples de formes fermées non-exactes. Par exemple, en notant τ_u la translation de vecteur $-u$, on peut considérer l'espace V de toutes les combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^k a_i \tau_{p_i}^* \omega$, où ω est la forme d'angle du paragraphe précédent et $a_1, \ldots, a_k$ sont des coefficients réels.

L'intégrale d'une telle forme sur un petit cercle $\mathcal{C}_i$ autour de p_i (et qui n'entoure qu'un seul p_i) est $2\pi a_i$. Donc l'application linéaire

$$I : V \to \mathbb{R}^k, \omega \mapsto \left(\int_{\mathcal{C}_1} \omega, \ldots, \int_{\mathcal{C}_n} \omega \right)$$

est un isomorphisme et V est de dimension k. De plus, si deux élements de V diffèrent par une forme exacte alors, d'après la proposition précédente, ils ont la même image par I, donc les mêmes coefficients a_i. Ceci prouve

$$\dim \big(\{\omega \in \Omega^1(U) \,|\, \omega \text{ fermée}\} / \{\omega \in \Omega^1(U) \,|\, \omega \text{ exacte}\} \big) \geqslant k,$$

et suggère que d'une manière générale, le quotient de l'espace des formes fermées par celui des formes exactes mesure la complexité d'un espace, le nombre de ses "trous". Nous allons développer cette idée dans la suite du chapitre.

Nous démontrerons en particulier que le quotient ci-dessus est de dimension exactement k (voir proposition 6.25 ci-dessous). ◀

II Cohomologie de De Rham

Guidé par l'exemple précédent, il est naturel de poser la définition suivante.

Définition 6.5. *On note $\mathcal{Z}^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \,|\, d\omega = 0\}$ l'ensemble des formes fermées de degré k sur M et $\mathcal{B}^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \,|\, \omega$ exacte$\}$ l'ensemble des formes exactes.*

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel quotient $H^k(M) = \mathcal{Z}^k(M)/\mathcal{B}^k(M)$ est appelé k-ième groupe de cohomologie de De Rham. *La classe d'une k-forme fermée α, notée $[\alpha]$, est appelée classe de cohomologie de α. L'entier k est le degré de la classe.*

Remarque 6.6.

(a) Si $k < 0$ ou $k > n$, alors $H^k(M) = \{0\}$ puisque $\Omega^k(M) = \{0\}$.

(b) Si $k = 0$, alors $H^0(M) = Z^0(M)$ est l'ensemble des fonctions localement constantes sur M. Par conséquent, on peut écrire

$$\boxed{H^0(M) = \mathbb{R}^{\{\text{composantes connexes de } M\}}}$$

Cela confirme l'idée que les groupes de cohomologie mesurent la complexité de l'espace. Les autres $H^k(M)$ sont plus compliqués à calculer.

◀

Certaines opérations sur les formes induisent des opérations en cohomologie.

Proposition 6.7. *Le produit extérieur induit un produit*

$$\cup : H^k(M) \times H^\ell(M) \to H^{k+\ell}(M)$$

donné par $[\alpha] \cup [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$ *pour toute* k*-forme* α *et* ℓ*-forme* β*. On l'appelle le produit "cup".*

Démonstration. Supposons que pour des formes fermées $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, on ait $\alpha' = \alpha + da$ et $\beta' = \beta + db$. Alors,

$$\alpha' \wedge \beta' = \alpha \wedge \beta + da \wedge \beta + \alpha \wedge db + da \wedge db.$$

Comme β est fermée, $da \wedge \beta = d(a \wedge \beta) \pm a \wedge d\beta = d(a \wedge \beta)$ est exacte. De même $\alpha \wedge db$ et $da \wedge db$ sont exactes. Ceci montre que $\alpha' \wedge \beta'$ et $\alpha \wedge \beta$ diffèrent par une forme exacte et donc que le produit extérieur passe au quotient. □

Proposition 6.8. *Soit* $f : M \to N$ *une application lisse. Alors,* $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ *induit un morphisme* $H^k(N) \to H^k(M)$*. De plus, si* $g : N \to P$ *est une autre application lisse, alors* $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$*.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du fait que pour toute forme ω, $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$, ce qui implique que f^* envoie forme fermée sur forme fermée et forme exacte sur forme exacte. □

Nous allons maintenant développer deux outils permettant de calculer les groupes de cohomologie : l'invariance par homotopie et la suite exacte de Mayer-Vietoris.

III Invariance par homotopie

Commençons par définir la notion d'homotopie.

Définition 6.9. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $f, g : X \to Y$ deux applications continues. Une* homotopie *de f à g est une application continue $H : X \times [0,1] \to Y$, telle que pour tout $x \in X$, $H(0,x) = f(x)$ et $H(1,x) = g(x)$. S'il existe une homotopie de f à g, on dit que f et g sont homotopes.*

Soient M et N deux variétés et $f, g : M \to N$ deux applications lisses. Une homotopie lisse de f à g est une application lisse $H : M \times]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\to N$ avec $\varepsilon > 0$ telle que $H(x,t) = f(x)$ pour tout $(x,t) \in M \times]-\varepsilon, 0]$ et $H(x,t) = g(x)$ pour tout $(x,t) \in M \times [1, 1+\varepsilon[$. S'il existe une homotopie lisse de f à g, on dit que f et g sont C^∞-homotopes.

Proposition 6.10. *Les relations d'homotopie et d'homotopie lisse sont des relations d'équivalence.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une homotopie H de f à g. Alors, $(x,t) \mapsto H(x, 1-t)$ définit une homotopie de g à f. De plus, elle est lisse si H l'est. Cela prouve que ces relations sont réflexives.

Supposons maintenant que l'on ait une homotopie H de f à g et une homotopie K de g à h. Alors, l'application

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} H(x, 2t), & \text{si } t \leqslant \frac{1}{2} \\ K(x, 2t-1), & \text{si } t \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

est une homotopie de f à h. Si H et K sont lisses, on peut contruire une homotopie lisse de f à h par la formule

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} H(x, (2+\delta)t), & \text{si } t \leqslant \frac{1}{2+\delta} \\ K(x, (2+\delta)t - 1 - \delta), & \text{si } t \geqslant \frac{1}{2+\delta}, \end{cases}$$

pour $\delta > 0$ suffisamment petit. Ceci montre que ces relations sont transitives. □

Proposition 6.11. *Soient $f, g : M \to N$ deux applications lisses C^∞-homotopes. Alors, les applications linéaires f^* et g^* entre $H^k(N)$ et $H^k(M)$ coïncident.*

Nous allons commencer par établir le lemme fondamental suivant.

Lemme 6.12. *On note $j_0, j_1 : M \to M \times \mathbb{R}$ les applications données par $j_0(x) = (x,0)$ et $j_1(x) = (x,1)$, pour tout $x \in M$. Alors j_0^* et j_1^* coïncident.*

La proposition s'en déduit facilement.

Démonstration. Soit H une homotopie lisse de f à g. On peut prolonger H en une application $M \times \mathbb{R} \to N$ lisse telle que $H(\cdot, t) = f$ pour $t \leqslant 0$ et $H(\cdot, t) = g$ pour $t \geqslant 0$. Alors, on peut écrire $f = H \circ j_0$ et $g = H \circ j_1$ donc $f^* = j_0^* \circ H^*$ et $g^* = j_1^* \circ H^*$. Le lemme implique donc bien $f^* = g^*$. □

Démonstration. Nous allons construire une application $K_p : \Omega^p(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^{p-1}(M)$ vérifiant [1]

$$\forall \alpha \in \Omega^p(M \times \mathbb{R}),\ j_1^*\alpha - j_0^*\alpha = dK_p\alpha + K_{p+1}d\alpha.$$

1. En langage technique, K est une "homotopie de complexes de cochaines".

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \Omega^{p-1}(M\times\mathbb{R}) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p}(M\times\mathbb{R}) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p+1}(M\times\mathbb{R}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & \swarrow^{j_1^*-j_0^*} & \downarrow & \swarrow^{K_p} & \downarrow & \swarrow^{K_{p+1}} & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & \Omega^{p-1}(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p}(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{p+1}(M) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Ceci impliquera que si α est une forme fermée, alors $j_1^*\alpha - j_0^*\alpha$ est exacte donc $[j_1^*\alpha] = [j_0^*\alpha]$ comme souhaité.

On considère le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$ sur $M \times \mathbb{R}$, dont le flot est donné par la formule $\phi^t(x,s) = (x, s+t)$. Pour des raisons typographiques, il sera pratique de noter ϕ_t au lieu de ϕ^t. On a donc $\phi_t \circ j_0 = j_t$ où j_t désigne le plongement $j_t : x \mapsto (x,t)$, $M \to M \times \mathbb{R}$. Alors,

$$\frac{d}{dt}(j_t^*\alpha) = j_0^*\frac{d}{dt}(\phi_t^*\alpha) = j_0^*\phi_t^*\frac{d}{ds}(\phi_s^*\alpha)|_{s=0} = j_0^*\phi_t^*\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}}\alpha = j_t^*\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}}\alpha.$$

Par la formule de Cartan, nous obtenons ensuite

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(j_t^*\alpha) &= j_t^*(d\iota_{\frac{\partial}{\partial t}}\alpha + \iota_{\frac{\partial}{\partial t}}d\alpha)\\ &= d(j_t^*\iota_{\frac{\partial}{\partial t}}\alpha) + j_t^*\iota_{\frac{\partial}{\partial t}}d\alpha.\end{aligned}$$

Pour toute p-forme α, posons

$$K_p(\alpha) = \int_0^1 j_t^*\iota_{\frac{\partial}{\partial t}}\alpha\, dt.$$

D'après ce qui précède,

$$j_1^*\alpha - j_0^*\alpha = \int_0^1 \frac{d}{dt}(j_t^*\alpha)\, dt = dK_p\alpha + K_{p+1}d\alpha,$$

comme annoncé. □

Le théorème suivant, que nous admettrons, va nous permettre de nous passer de la lissité des applications, dans de nombreux cas.

Théorème 6.13 (Admis)**.** *Toute application continue $M \to N$ entre variétés est homotope à une application lisse $M \to N$. De plus, deux applications lisses homotopes sont C^∞-homotopes.*

Ce théorème affirme donc que les classes d'homotopies d'applications continues entre M et N s'identifient aux classes d'homotopie lisse d'applications lisses entre M et N. Ce théorème permet de définir le tiré en arrière d'une classe de cohomologie par une application continue.

Définition 6.14. *Pour toute application continue $f : M \to N$, on définit $f^* : H^k(N) \to H^k(M)$ en posant $f^* := \bar{f}^*$ où $\bar{f}$ est n'importe quelle application lisse $M \to N$ homotope à f.*

D'après la proposition 6.11 et la deuxième partie du théorème 6.13, $\bar{f}^*$ ne dépend pas du choix de $\bar{f}$, et f^* est ainsi bien définie. On vérifie facilement que si $f : M \to N$ et $g : N \to P$ sont continues, alors $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Nous allons maintenant donner quelques définitions et remarques supplémentaires ainsi que les implications sur la cohomologie.

Définition 6.15. *On dit qu'une application continue $f : X \to Y$ est une* équivalence d'homotopie *s'il existe $g : Y \to X$ continue telle que $f \circ g$ est homotope à Id_Y et $g \circ f$ est homotope à Id_X.*

S'il existe une équivalence d'homotopie entre N et M, on dit que N et M ont même type d'homotopie.

En particulier, deux espaces homéomorphes ont même type d'homotopie.

Exemple 6.16. (a) $\mathbb{R}^n$ a le même type d'homotopie que $\{0\}$. En effet, l'inclusion de $\{0\} \to \mathbb{R}^n$ est une équivalence d'homotopie. Soit g l'application triviale $\mathbb{R}^n \to \{0\}$. Alors $g \circ f : \{0\} \to \{0\}$ est l'identité de $\{0\}$ et $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est l'application constante égale à 0. Celle-ci est homotope à l'identité de $\mathbb{R}^n$ via l'homotopie $H(x,t) = tx$.

(b) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a le même type d'homotopie que $\mathbb{S}^n$. En effet, si l'on considère l'inclusion canonique f de $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et g l'application $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^n$, définie par $g(x) = \frac{x}{\|x\|}$, alors $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^n}$ et $f \circ g$ est l'application $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$. Cette dernière est bien homotope à $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ via l'homotopie $H(x,t) = t\frac{x}{\|x\|} + (1-t)x$.

◀

Exercice 28. *Soit X un espace et I un intervalle. Montrer que pour tout $c \in I$, l'application $X \to X \times I$, $x \mapsto (x, c)$ est une équivalence d'homotopie entre X et $X \times I$.*

Si f est une équivalence d'homotopie, alors avec les notations de la définition, f^* est un isomorphisme entre $H^k(M) \to H^k(N)$ de réciproque g^*. D'où le théorème suivant :

Théorème 6.17. *Deux variétés qui ont même type d'homotopie ont des groupes de cohomologie de De Rham isomorphes.*

En particulier, deux variétés homéomorphes ont des groupes de cohomologie isomorphes.

On dit qu'un espace est *contractile*, s'il a le type d'homotopie d'un singleton.

Exercice 29. *Montrer qu'un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$ est contractile.*

La cohomologie d'un singleton étant particulièrement simple, on déduit du théorème précédent :

Corollaire 6.18. *Soit M une variété contractile. Alors*

$$H^0(M) = \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad H^k(M) = 0, \forall k > 0.$$

Nous allons maintenant développer un deuxième outil de calcul, de nature algébrique, la suite exacte de Mayer-Vietoris.

IV La suite exacte de Mayer-Vietoris

IV.1 Vocabulaire d'algèbre homologique

Un *complexe de cochaines* (E, d) est une suite d'espaces vectoriels (ou de modules sur un anneau commutatif unitaire) $E = (E^k)_{k\in\mathbb{Z}}$, munie d'une suite d'applications linéaires $d = (d_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, appelée *différentielle du complexe*, telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $d_k : E^k \to E^{k+1}$ et

$d_{k+1} \circ d_k = 0$. Afin de bien visualiser l'ensemble des données, on note souvent un tel complexe comme suit :

$$\cdots \longrightarrow E^k \xrightarrow{d_k} E^{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} E^{k+2} \longrightarrow \cdots$$

Bien sûr, $(\Omega^*(M), d)$, où d est la différentielle extérieure, est le complexe de cochaines qui nous intéresse dans ce cours. Mais ce n'est pas le seul qui soit intéressant. Ces complexes sont omniprésents en topologie et en algèbre.

La condition $d_{k+1} \circ d_k = 0$ est équivalente à $\operatorname{Im} d_k \subset \ker d_{k+1}$.

On dit qu'un complexe est une *suite exacte* si pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on a $\operatorname{Im} d_k = \ker d_{k+1}$.

Une *suite exacte courte* est une suite exacte dont tous les termes sont nuls sauf éventuellement trois consécutifs d'entre eux. Une suite exacte courte se note :

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0 \,.$$

Un tronçon de suite exacte de la forme $0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} F$ signifie $\ker i = 0$, c'est-à-dire i injective. De même, un tronçon de suite exacte de la forme $E \xrightarrow{\pi} F \longrightarrow 0$ signifie $\operatorname{Im} \pi = G$, c'est-à-dire π surjective.

Si l'on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0 \,,$$

alors $G \simeq F/E$ (en particulier, $\dim F = \dim E + \dim G$). En effet, π est surjective donc $G = \operatorname{Im} \pi \simeq F/\ker \pi = F/\operatorname{Im} i \simeq F/E$. Le dernier isomorphisme vient du fait que i est injective et donc $\operatorname{Im} i \simeq E$.

Un *morphisme de complexes de cochaines* $f : (E, d) \to (E', d')$ est la donnée d'applications $f^k : E^k \to E'^k$ telles que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $d'_k \circ f^k = f^{k+1} \circ d_k$. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & E^k & \xrightarrow{d_k} & E^{k+1} & \xrightarrow{d_{k+1}} & E^{k+2} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f^k} & & \downarrow{\scriptstyle f^{k+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f^{k+2}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & E'^k & \xrightarrow{d'_k} & E'^{k+1} & \xrightarrow{d'_{k+1}} & E'^{k+2} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Nous avons vu par exemple que si $f : M \to N$ est une application lisse, alors f^* est un morphisme de complexes entre $(\Omega(N), d)$ et $(\Omega(M), d)$.

La *cohomologie* d'un complexe de cochaines est la suite des espaces vectoriels (ou modules) $H^*(E, d) = (H^k(E, d))_{k \in \mathbb{Z}}$ donnée par

$$H^k(E, d) = \ker d_k / \operatorname{Im} d_{k-1}.$$

Une suite exacte a une cohomologie nulle. Intuitivement, la cohomologie mesure donc le défaut d'exactitude du complexe.

Par exemple, les groupes de cohomologie de De Rham forment la cohomologie du complexe $(\Omega(M), d)$.

Un morphisme de complexes $f : (E, d) \to (E', d')$ induit une application en cohomologie $\bar{f} : H^*(E, d) \to H^*(E, d)$. En effet, si $a, a' \in E_k$ représentent la même classe de cohomologie de E, alors $a - a' = d_{k-1} b$ pour un certain $b \in E_{k-1}$. Donc $f_k(a) = f_k(a' + d_{k-1} b) = f_k(a') + f_k(d_{k-1} b) = f_k(a') + d_{k-1} f_{k-1}(b)$ et on voit que $f_k(a)$ et $f_k(a')$ définissent la même classe de cohomologie de E'.

IV.2 Suite exacte longue en cohomologie associée à une suite exacte courte de complexes

Une *suite exacte courte de complexes* est la donnée de trois complexes de cochaines E, F, G et de morphismes $f : E \to F$ et $g : F \to G$ tels que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$0 \longrightarrow E^k \xrightarrow{f_k} F^k \xrightarrow{g_k} G^k \longrightarrow 0$$

est exacte. Autrement dit, on a un diagramme commutatif comme ci-dessous, où les colonnes sont des complexes et les lignes des suites exactes courtes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E^{k-1} & \xrightarrow{f_{k-1}} & F^{k-1} & \xrightarrow{g_{k-1}} & G^{k-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E^{k} & \xrightarrow{f_{k}} & F^{k} & \xrightarrow{g_{k}} & G^{k} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E^{k+1} & \xrightarrow{f_{k+1}} & F^{k+1} & \xrightarrow{g_{k+1}} & G^{k+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array} \tag{6.1}$$

Le théorème suivant est très utile.

Théorème 6.19. *Soit* $0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$ *une suite exacte courte de complexes. Alors, pour tout entier* k*, il existe une application linéaire* $\delta_k : H^k(G) \to H^{k+1}(E)$ *telle que*

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{k-1}} H^k(E) \xrightarrow{\bar{f}_k} H^k(F) \xrightarrow{\bar{g}_k} H^k(G) \xrightarrow{\delta_k} H^{k+1}(E) \xrightarrow{\bar{f}_{k+1}} H^{k+1}(F) \xrightarrow{\bar{g}_{k+1}} H^{k+1}(G) \xrightarrow{\delta_{k+1}} \cdots$$

soit une suite exacte.

Démonstration. Pour alléger la démonstration, nous noterons de manière indifférentiée d la différentielle de chacun des complexes. Nous omettrons également les indices k de chacune des applications. On notera aussi $[a]$ la classe de cohomologie d'un élément a de l'un des complexes. Pour faciliter le suivi de la démonstration, le lecteur est invité à garder le diagramme (6.1) sous les yeux pendant sa lecture.

Etape 1 : exactitude en $H^k(F)$. De $g \circ f = 0$, on déduit en passant au quotient $\bar{g} \circ \bar{f} = 0$ donc $\operatorname{Im} \bar{f} \subset \ker \bar{g}$. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $a \in F^k$ tel que $da = 0$ et $[a] \in \ker \bar{g}$. Alors $[g(a)] = \bar{g}([a]) = 0$, donc il existe un élément $b \in G^{k-1}$ tel que $g(a) = db$. Comme g est surjective, il existe $c \in F^{k-1}$ tel que $g(c) = b$. Si l'on résume, nous avons donc $dg(c) = g(a)$ et comme le diagramme commute, $g(dc) = g(a)$. D'où $a - dc \in \ker g = \operatorname{Im} f$.

Il existe donc un élément $e \in E^k$ tel que $f(e) = a - dc$. Comme $f(de) = df(e) = da - ddc = 0$ et comme f est injective, $de = 0$. On peut donc considérer la classe de cohomologie $[e]$ de e.

Elle vérifie $\bar{f}([e]) = [f(e)] = [a - dc] = [a]$. Nous venons de montrer que toute classe $[a]$ du noyau de $\bar{g}$ est dans l'image de $\bar{f}$.

ETAPE 2 : CONSTRUCTION DE δ. Soit $[c]$ la classe de cohomologie d'un élément $c \in G^k$, vérifiant $dc = 0$. Comme g est surjective, il existe un élement $b \in F^k$ tel que $g(b) = c$.

Remarquons alors que $db \in \ker g$. En effet, $g(db) = dg(b) = dc = 0$. Comme $db \in \ker g = \operatorname{Im} f$, il existe un élement $a \in E^{k+1}$ tel que $f(a) = db$.

Cet élément a vérifie $da = 0$. En effet, $f(da) = df(a) = ddb = 0$ et donc $da = 0$ puisque f est injective. Nous pouvons donc considérer la classe de $[a]$. Nous allons poser $\delta([c]) = [a]$. Cette définition ne pourra bien sûr être faite que lorsque l'étape suivante aura été démontrée.

ETAPE 3 : LA CONSTRUCTION DE δ EST INDÉPENDANTE DES CHOIX DE c, b ET a. Soit donc c', b', a' un autre jeu de tels choix. Autrement dit, on a les relations : $[c'] = [c]$, $g(b') = c'$ et $f(a') = db'$.

Alors, comme $[c'] = [c]$, il existe $\gamma \in G^{k-1}$ tel que $c' = c + d\gamma$. Comme g est surjective, il existe $\beta \in F^{k-1}$ tel que $g(\beta) = \gamma$. Alors $g(b' - b - d\beta) = g(b') - g(b) - dg(\beta) = 0$. Comme $b' - b - d\beta \in \ker g = \operatorname{Im} f$, il existe un élément $\alpha \in E^k$ tel que $b' - b - d\beta = f(\alpha)$.

Mais alors, $f(a' - a - d\alpha) = db' - db - df(\alpha) = dd\beta$. L'application f étant injective, on en déduit que $a' = a + d\alpha$ et donc que $[a'] = [a]$ comme souhaité.

ETAPE 4 : EXACTITUDE EN $H^k(E)$. Soit $c \in G^k$ tel que $dc = 0$. Alors avec les notations de la construction de δ, $\bar{f}(\delta([c])) = \bar{f}([a]) = [f(a)] = [db] = 0$. Ceci montre que $\bar{f} \circ \delta = 0$.

Montrons maintenant que $\ker \bar{f} \subset \operatorname{Im} \delta$. Supposons donc que l'on ait $\bar{f}([a]) = 0$ pour un certain élément $a \in E^{k+1}$. Alors, $[f(a)] = 0$, donc il existe $b \in F^k$ tel que $f(a) = db$. Posons $c = g(b)$. Alors, $dc = dg(b) = g(db) = g \circ f(a) = 0$. Donc c admet une classe de cohomologie et par définition de δ, nous avons $\delta([c]) = [a]$. Nous avons montré l'inclusion souhaitée.

ETAPE 5 : EXACTITUDE EN $H^k(G)$. Soit $b \in F^k$ tel que $db = 0$. Alors, $\delta(\bar{g}([b])) = \delta([g(b)])$ est représenté par construction par tout antécédent de db par f, donc par 0 puisque $db = 0$. Ceci montre que $\delta \circ \bar{g} = 0$.

Montrons maintenant que $\ker \delta \subset \operatorname{Im} g$. Supposons donc que l'on ait $\delta([c]) = 0$ pour un certain élément $c \in G^k$. Alors, avec les notations de la construction de δ, $[a] = 0$ donc il existe $\alpha \in E^k$ tel que $a = d\alpha$. Posons $\beta = f(\alpha)$. Alors, $d\beta = df(\alpha) = f(d\alpha) = f(a) = db$ donc $b - \beta$ admet une classe de cohomologie qui vérifie $\bar{g}([b - \beta]) = [g(b - \beta)] = [g(b) - g(f(\alpha))] = [g(b)] = [c]$. Nous avons montré l'inclusion souhaitée. □

Ces quelques préparatifs achevés, nous pouvons maintenant revenir au calcul de la cohomologie de De Rham.

IV.3 La suite exacte de Mayer-Vietoris

Il s'agit d'une suite exacte longue qui relie la cohomologie de la réunion de deux ouverts à la cohomologie de ces ouverts et à celle de leur intersection.

Théorème 6.20 (suite exacte de Mayer-Vietoris)**.** *Soient M une variété et U, V deux ouverts*

de M. On considère les applications[2]

$$f : \Omega(U \cup V) \to \Omega(U) \oplus \Omega(V), \quad \alpha \mapsto (\alpha|_U, \alpha|_V),$$
$$g : \Omega(U) \oplus \Omega(V) \to \Omega(U \cap V), \quad (\beta, \beta') \mapsto \beta|_{U\cap V} - \beta'|_{U\cap V}.$$

Alors,

$$0 \longrightarrow \Omega(U \cup V) \xrightarrow{f} \Omega(U) \oplus \Omega(V) \xrightarrow{g} \Omega(U \cap V) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de complexes. Elle induit une suite exacte longue

$$0 \longrightarrow H^0(U \cup V) \longrightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \longrightarrow H^0(U \cap V) \longrightarrow H^1(U \cup V) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^1(U \cup V) \longrightarrow H^n(U) \oplus H^n(V) \longrightarrow H^n(U \cap V) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Comme les applications considérées descendent en cohomologie, la suite exacte longue est une conséquence du théorème précédent, une fois la suite exacte courte de complexes établie.

Remarquons d'abord que les applications considérées sont des morphismes de complexes. Le fait que f est injectif est immédiat. Montrons que g est surjective.

Soit $\omega \in \Omega(U\cap V)$. On choisit une partition de l'unité (ρ_U, ρ_V) subordonnée au recouvrement (U, V) de $U \cap V$. On pose ensuite $\beta = \rho_V\omega$ étendue par 0 à U et $\beta' = -\rho_U\omega$ étendue par 0 à V. On a alors bien $\omega = \beta|_{U\cap V} - \beta'_{U\cap V} = g(\beta, \beta')$.

Il est clair que $g \circ f = 0$ et il nous reste donc à montrer que $\ker g \subset \mathrm{Im} f$. Supposons donc que $g(\beta, \beta') = 0$ pour des classes $\beta \in \Omega(U)$ et $\beta' \in \Omega(V)$. Alors, $\beta|_{U\cap V} = \beta'|_{U\cap V}$. On peut alors poser $\alpha = \beta$ sur U et $\alpha = \beta'$ sur V. On alors $f(\alpha) = (\beta, \beta')$. □

Remarque 6.21. Un cas particulier trivial de la suite exacte de Mayer-Vietoris est le cas ou U et V sont disjoints. On a alors $H^k(U \cap V) = \{0\}$ pour tout k par convention, donc $H^k(U \cup V) \simeq H^k(U) \oplus H^k(V)$. ◀

Nous avons maintenant les outils pour quelques calculs de cohomologie de De Rham.

V Quelques calculs

Proposition 6.22. *Pour tout $n \geqslant 1$, $H^0(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{R}$, $H^n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{R}$ et $H^k(\mathbb{S}^n) = \{0\}$, pour tout $k \neq n$.*

Démonstration. Nous allons appliquer la suite exacte de Mayer-Vietoris aux ouverts $U = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ et $V = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$. Il s'agit d'ouverts contractiles donc leur cohomologie est $\mathbb{R}$ en degré 0, et $\{0\}$ dans tous les autres degrés. Bien sûr, leur réunion est $\mathbb{S}^n$. Quant à leur intersection, elle vaut $\mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}$ et a donc le type d'homotopie de $\mathbb{S}^{n-1}$. On voit donc que l'on est dans une situation propice pour calculer la cohomologie des sphères par induction sur la dimension.

2. Autrement dit, en notant les différentes injections canoniques $i_U : U \cap V \to U$, $i_V : U \cap V \to V$, $j_U : U \to U \cup V$ et $j_V : V \to U \cup V$, on a $f : \alpha \mapsto i_U^*\alpha + i_V^*\alpha$ et $g : \beta + \beta' \mapsto j_U^*\beta - j_V^*\beta'$.

Dans le cas du cercle, la suite exacte s'écrit donc

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{f} H^0(U) \oplus H^0(V) \xrightarrow{g} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0 \,.$$

En remplaçant par les isomorphismes connus,

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0 \,.$$

Comme f est injective, elle est de rang 1. Donc le noyau de g est de dimension 1. Par le théorème du rang, g est donc aussi de rang 1 et le noyau de δ est de dimension 1. En appliquant le théorème du rang à δ on en déduit que $H^1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$. Nous avons bien initialisé la récurrence.

Supposons maintenant $n > 1$. Alors, les premiers termes de la suite exacte donnent

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \longrightarrow H^0(U \cap V) \longrightarrow H^1(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0 \,,$$

comme précédemment, sauf qu'ici $U \cap V$ est connexe. Donc en remplaçant par les isomorphismes connus,

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^1(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0 \,.$$

En raisonnant comme au-dessus, on obtient $\dim H^1(\mathbb{S}^n) = 0$.

Pour $k \geqslant 1$, utilisons le morceau de suite exacte :

$$H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow H^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(U \cup V) \longrightarrow H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \,.$$

En remplaçant par les isomorphismes connus :

$$\{0\} \longrightarrow H^k(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(\mathbb{S}^n) \longrightarrow \{0\} \,.$$

L'application δ est donc un isomorphisme et on en déduit les formules annoncées. □

Remarque 6.23. Nous avons vu que la forme $y\,dx - x\,dy$ définie sur $\mathbb{S}^1$ est fermée mais pas exacte. Elle engendre donc $H^1(\mathbb{S}^1)$. ◀

Plus généralement :

Théorème 6.24. *Si M est compacte connexe orientable et si ω est une forme volume, alors $[\omega] \neq 0$. En particulier, $H^{\dim M}(M) \neq \{0\}$.*

Démonstration. En effet, si une forme volume ω était exacte, alors on aurait $\int_M \omega = 0$, ce qui n'est pas le cas. □

Proposition 6.25. *Soit D le disque unité de $\mathbb{R}^2$ et $x_1, \ldots, x_p$ des points distincts de D. Alors,*

$$H^k(D \setminus \{x_1, \ldots, x_p\}) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } k = 0, \\ \mathbb{R}^p, & \text{si } k = 1, \\ \{0\}, & \text{si } k \geqslant 2. \end{cases}$$

Démonstration. Pour tout $i = 1, \dots, p$, on choisit D_i un disque ouvert contenant x_i inclus dans D, de telle sorte que les D_i soient deux à deux disjoints. Nous allons appliquer la suite exacte de Mayer-Vietoris aux ouverts $U = D \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$ et $V = D_1 \cup \cdots \cup D_p$. Comme la variété considérée est de dimension 2, la suite s'annule au delà du degré 2.

$$\begin{aligned} 0 \to & H^0(U \cup V) \to H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V) \to \\ & H^1(U \cup V) \to H^1(U) \oplus H^1(V) \to H^1(U \cap V) \to \\ & H^2(U \cup V) \to H^2(U) \oplus H^0(V) \to H^2(U \cap V) \to 0. \end{aligned}$$

Or, $U \cup V = D$ est contractile et V est une réunion disjointe d'ouverts contractiles. De plus, $U \cap V$ est la réunion disjointe des $D_i \setminus \{x_i\}$ et a donc le type d'homotopie d'une réunion disjointes de p cercles. On peut donc remplacer dans la suite exacte :

$$\begin{aligned} 0 \to & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p \to \\ & \{0\} \to H^1(U) \oplus \{0\} \to \mathbb{R}^p \to \\ & \{0\} \to H^2(U) \oplus \{0\} \to \{0\} \to 0. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat escompté. □

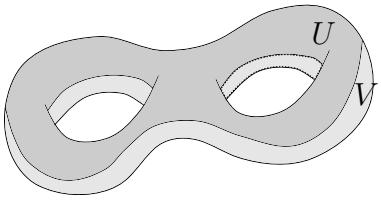
Remarque 6.26. Remarquons au passage que dans la démonstration ci-dessus, l'application $H^1(U) \to \mathbb{R}^p$, qui est induite par la restriction des formes de $U = D \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$ à la réunion des $D_i \setminus \{x_i\}$, est un isomorphisme. ◀

Nous allons pouvoir en déduire la cohomologie des surfaces compactes orientables.

Proposition 6.27. *Soit Σ_g la surface de $\mathbb{R}^3$ de genre g (définie dans la liste d'exemples 1.19). Alors,*

$$H^k(\Sigma_g) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } k = 0, \\ \mathbb{R}^{2g}, & \text{si } k = 1, \\ \mathbb{R}, & \text{si } k = 2. \end{cases}$$

Démonstration. Comme Σ_g est connexe, nous avons $H^0(\Sigma_g) = \mathbb{R}$. Ensuite, Σ_g peut être obtenue comme réunion de deux ouverts U, V de telle sorte que U et V soient tous les deux difféomorphes à un disque privé de g points et $U \cap V$ ait le type d'homotopie de $g + 1$ cercles deux à deux disjoints.



Appliquons la suite exacte de Mayer-Vietoris dans cette situation.

$$\begin{aligned} 0 \to & H^0(U \cup V) \to H^0(U) \oplus H^0(V) \to H^0(U \cap V) \to \\ & H^1(U \cup V) \to H^1(U) \oplus H^1(V) \to H^1(U \cap V) \to \\ & H^2(U \cup V) \to H^2(U) \oplus H^0(V) \to H^2(U \cap V) \to 0. \end{aligned}$$

En remplaçant par les isomorphismes connus, nous en déduisons la suite exacte suivante (au passage, donnons un nom aux applications, ce sera utile pour la suite du raisonnement) :

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{a} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{b} \mathbb{R}^{k+1} \xrightarrow{c} H^1(\Sigma_g) \xrightarrow{d} \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^k \xrightarrow{e} \mathbb{R}^{k+1} \xrightarrow{f} H^2(\Sigma_g) \to \{0\} \oplus \{0\} \to \{0\} \to 0.$$

Alors a est injective donc de rang 1. Par le théorème du rang, b est donc de rang $2-1=1$. Le théorème du rang à nouveau nous donne c de rang $k+1-1=k$. De même, d est de rang $\dim H^1(\Sigma_g) - k$, et e est de rang $2k - \dim H^1(\Sigma_g) + k = 3k - \dim H^1(\Sigma_g)$.

On peut dire plus sur le rang de e. En effet, la remarque 6.26 implique que le rang de e est au moins de dimension k. D'où $\dim H^1(\Sigma_g) \leqslant 2k$.

Continuons à analyser la suite. On déduit du rang de e le rang de f qui est donc $k+1+\dim H^1(\Sigma_g) - 3k = \dim H^1(\Sigma_g) + 1 - 2k$. Par ailleurs, f est surjective donc de rang $\dim H^2(\Sigma_g)$. Nous en déduisons :

$$\dim H^2(\Sigma_g) = \dim H^1(\Sigma_g) + 1 - 2k.$$

Comme $\dim H^2(\Sigma_g) \geqslant 1$ (en effet, Σ_g est compacte orientable, donc le théorème 6.24 s'applique), nous en déduisons $\dim H^1(\Sigma_g) \geqslant 2k$.

Avec l'inégalité du paragraphe précédent, nous obtenons bien $\dim H^1(\Sigma_g) = 2g$, et dans un deuxième temps $\dim H^2(\Sigma_g) = 1$. □

VI Cohomologie en degré maximal et applications

VI.1 Quelques énoncés sans démonstration

Dans les exemples qui précèdent de variétés compactes connexes le groupe de cohomologie de degré maximal était toujours de dimension 1. C'est un fait général :

Théorème 6.28. *Soit M une variété compacte connexe orientée de dimension n. Alors,*

$$\int_M : H^n(M) \to \mathbb{R}, \quad [\omega] \mapsto \int_M \omega$$

est un isomorphisme (bien défini).

Remarquons que la surjectivité de cette application est donnée par le théorème 6.24. Dans le cas de $\mathbb{S}^n$ où des surfaces compactes orientables, le fait qu'il s'agit d'un isomorphisme résulte des calculs de la partie précédente.

Ce résultat ce généralise encore comme suit :

Théorème 6.29 (dualité de Poincaré)**.** *Soit M une variété compacte connexe orientée de dimension n. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'application bilinéaire*

$$H^k(M) \times H^{n-k}(M) \to \mathbb{R}, \quad ([\alpha], [\beta]) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$$

est non-dégénérée. Par conséquent, $H^{n-k}(M) \simeq H^k(M)^*$.

REMARQUE 6.30. Si M est connexe mais non orientable, on peut montrer que $H^n(M) = \{0\}$. ◀

On appelle k-ième *nombre de Betti* l'entier

$$b_k(M) = \dim H^k(M).$$

La dualité de Poincaré implique que si M est compacte orientable, $b_k(M) = b_{n-k}(M)$.

La *caractéristique d'Euler* de M est l'entier

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k(M).$$

Par exemple, la caractéristique d'Euler d'une surface orientable de genre g est $2-2g$. Si M est compacte orientable et de dimension impaire, la dualité de Poincaré implique que la caractéristique d'Euler est nulle.

Exercice 30. *Montrer que la caractéristique d'Euler de la somme connexe de deux variétés M et N de dimension n est donnée par :*

$$\chi(M \sharp N) = \begin{cases} \chi(M) + \chi(N) - 2, & \text{si } n \text{ est pair.} \\ \chi(M) + \chi(N), & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

VI.2 Degré d'une application de la sphère

Nous avons déjà mentionné le fait que la cohomologie est un invariant qui sert à distinguer les espaces. En réalité, la cohomologie a de très nombreuses autres applications. Nous allons donner deux exemples, qui passent tous les deux par la notion de degré.

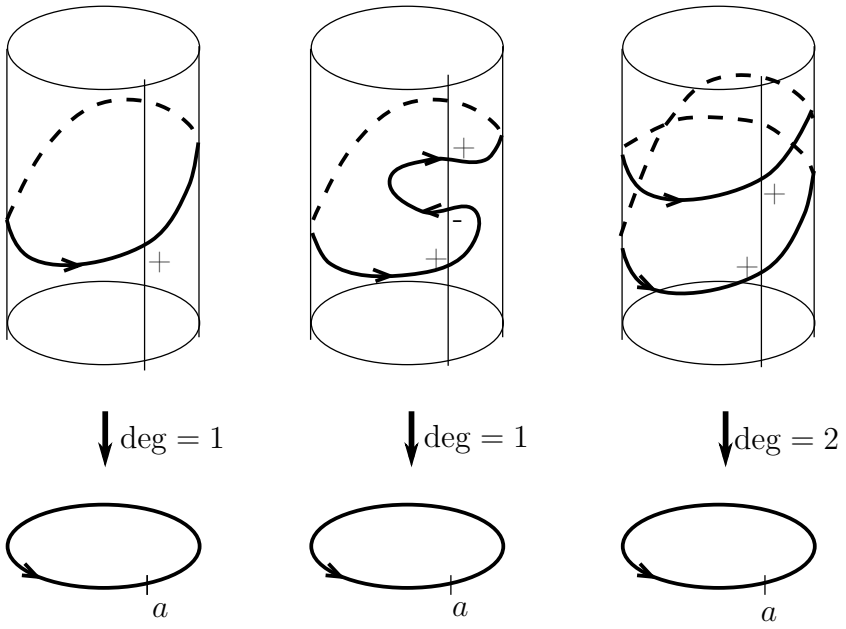
Définition 6.31 (degré d'une application)**.** *Soit $f : M \to M$ une application lisse, avec M compacte orientée. Pour toute valeur régulière a de f et tout point $x \in f^{-1}(a)$, on pose*

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } df_x \text{ préserve l'orientation,} \\ -1 & \text{si } df_x \text{ renverse l'orientation.} \end{cases}$$

Le degré de f au dessus de a est l'entier

$$\deg_a f = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \varepsilon(x).$$

Exemples 6.32. Voici trois exemples d'applications du cercle dans lui-même.



On peut observer que sur chacun de ces trois exemples, le degré obtenu ne dépend pas du choix de a (parmi les valeurs régulières). ◀

Théorème 6.33. *Pour toute application lisse $f : M \to M$ avec M compacte connexe orientée de dimension n, le degré de f ne dépend pas du choix de la valeur régulière. On le note* $\deg f$. *De plus, l'application $f^* : H^n(M) \to H^n(M)$ est la multiplication par* $\deg f$.

Donnons quelques conséquences intéressantes (toujours sous les hypothèses M compacte connexe orientable) :

— Si $\deg f \neq 0$ alors f est surjective.
— Le nombre modulo 2 de préimages des valeurs régulières d'une application lisse ne dépend pas de la valeur régulière.
— Si f admet une valeur régulière qui a un nombre impair de préimages alors $\deg f = \pm 1$ et f est nécessairement surjective.

Démonstration. Nous allons montrer que pour toute valeur régulière a, l'application $f^* : H^n(M) \to H^n(M)$ est la multiplication par $\deg_a f$. Cela impliquera les deux assertions du théorème.

Soit a une valeur régulière. Par le théorème d'inversion locale, pour tout $x \in f^{-1}(a)$, f est un difféomorphisme au voisinage de x. Choisissons un ouvert V autour de a et U_x des ouverts autour de chacun des $x \in f^{-1}(a)$ tels que $f(U_x) = V$. On peut supposer que les U_x sont 2 à 2 disjoints.

Soit ϕ une carte en a, et ρ une fonction à support compact inclus dans $\phi(V)$ et d'intégrale 1. Alors, $\omega = \phi^*(\rho\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$ est une forme à support compact inclus dans V et d'intégrale 1. On l'étend à M par 0.

Alors $f^*\omega$ est supportée dans la réunion des U_x, donc

$$\int_M f^*\omega = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \int_{U_x} f|_{U_x}^* \omega = \sum_{x \in f^{-1}(a)} \varepsilon(x) \int_V \omega = \deg_a(f) \int_M \omega.$$

D'après le théorème 6.28, on en déduit que f^* est la multiplication par $\deg_a(f)$. $\square$

Donnons deux applications du degré.

Théorème 6.34 (de la boule chevelue)**.** *Tout champ de vecteurs sur une sphère de dimension paire s'annule en au moins un point.*

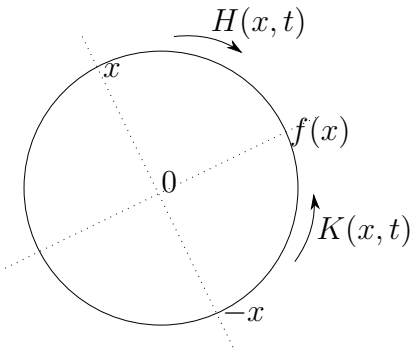
Démonstration. Supposons qu'il existe un champ de vecteurs X qui ne s'annule pas sur $\mathbb{S}^{2n}$. Alors $f : x \mapsto \frac{X(x)}{\|X(x)\|}$ définit une application de la sphère dans elle-même qui a la propriété que $f(x)$ est orthogonal à x, pour tout x.

Nous pouvons utiliser f pour construire une homotopie entre $\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^{2n}}$ et $-\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^{2n}}$. En effet, f est homotope à $\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^{2n}}$ via l'homotopie donnée par

$$H(x,t) = \frac{1}{\|tf(x) + (1-t)x\|}(tf(x) + (1-t)x),$$

et est homotope à $-\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^{2n}}$ via l'homotopie donnée par

$$K(x,t) = \frac{1}{\|tf(x) - (1-t)x\|}(tf(x) - (1-t)x).$$



Comme $\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^{2n}}$ et $-\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^{2n}}$ sont homotopes, elles agissent de manière identique en cohomologie donc ont même degré. Le degré de Id est 1. Comme $-\mathrm{Id}$ est bijective, son degré est ± 1 selon que $-\mathrm{Id}$ préserve ou renverse l'orientation.

Pour déterminer si $-\mathrm{Id}$ préserve ou renverse l'orientation, regardons $-\mathrm{Id}$ dans les cartes de l'atlas par projection stéréographique. On peut remarquer que pour $x \neq N, S$, on a $p_N(-x) = -p_S(x)$. Donc

$$p_N \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^{2n}}) \circ p_N^{-1} : x \mapsto -\frac{x}{\|x\|^2}, \quad \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}.$$

Cette application renverse l'orientation de $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$, donc $-\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^{2n}}$ renverse l'orientation de $\mathbb{S}^{2n}$ et est donc de degré -1. Contradiction. $\square$

Théorème 6.35 (d'Alembert-Gauss)**.** *Tout polynôme non-constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.*

Démonstration. Soit P un polynôme complexe non-constant. Commençons par montrer que P s'étend en une application $\tilde{P} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ lisse. Rappelons que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ s'identifie à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Pour cela, on peut plonger $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ via $z \mapsto [z : 1]$. On a alors $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[z : 1] \,|\, z \in \mathbb{C}\} \cup \{[1 : 0]\}$.

Pour que $\tilde{P}$ étende P, on doit donc avoir $\tilde{P}([z : 1]) = [P(z) : 1]$, et donc pour tout $y \neq 0$, $\tilde{P}([x : y]) = [P(\frac{x}{y}) : 1] = [y^n P(\frac{x}{y}) : y^n]$, en notant n le degré de P (remarquons que $y^n P(\frac{x}{y})$ est un polynôme homogène de degré n à deux variables). Cette dernière formule détermine $\tilde{P}$ en tout point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et en montre la lissité.

Comme $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^2$, la théorie du degré s'applique. Comme P est holomorphe, P préserve l'orientation. En effet, sa différentielle en z est la multiplication par $P'(z)$ qui est une similitude directe. Donc le degré de $\tilde{P}$ est le nombre de préimages de n'importe quelle valeur régulière de $\tilde{P}$, donc en particulier, de n'importe quelle valeur régulière de P.

Comme P n'est pas constant, il existe au moins un point z où $P'(z) \neq 0$. Par inversion locale, l'image de P est donc d'intérieur non-vide. L'image de P contient donc au moins une valeur régulière. Autrement dit, il existe au moins une valeur régulière qui admet au moins un antécédent. Par conséquent, le degré topologique de $\tilde{P}$ est strictement positif.

Cela implique que $\tilde{P}$ est surjectif. En particulier, 0 est dans l'image de P. □

Remarque 6.36. Une conséquence de la démonstration qui précède est que le degré de $\tilde{P}$ coïncide avec le degré du polynôme P. ◀