Le système homogène (S_0) $Y' = AY$ admet pour base de solutions les fonctions

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1' \\ \vdots \\ v_1^{(p-1)} \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_2' \\ \vdots \\ v_2^{(p-1)} \end{pmatrix} \quad \ldots \quad V_p = \begin{pmatrix} v_p \\ v_p' \\ \vdots \\ v_p^{(p-1)} \end{pmatrix}.$$

On cherche alors une solution particulière de (S) sous la forme

$$Y(t) = \alpha_1(t)V_1(t) + \ldots + \alpha_p(t)V_p(t).$$

Comme $V_j' = AV_j$, il vient

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \sum \alpha_j(t)V_j'(t) + \sum \alpha_j'(t)V_j(t) \\ &= AY(t) + \sum \alpha_j'(t)V_j(t). \end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir les α_j tels que $\sum \alpha_j'(t)V_j(t) = B(t)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \alpha_1'(t)v_1(t) + \ldots + \alpha_p'(t)v_p(t) = 0 \\ \ldots \\ \alpha_1'(t)v_1^{(p-2)}(t) + \ldots + \alpha_p'(t)v_p^{(p-2)}(t) = 0 \\ \alpha_1'(t)v_1^{(p-1)}(t) + \ldots + \alpha_p'(t)v_p^{(p-1)}(t) = \frac{1}{a_p}\, b(t). \end{cases}$$

On obtient ainsi un système linéaire de p équations par rapport aux p inconnues $\alpha_1'(t), \ldots, \alpha_p'(t)$. Le déterminant de ce système est non nul pour tout $t \in \mathbb{R}$ (les vecteurs $V_1(t), \ldots, V_p(t)$ sont linéairement indépendants, car si une combinaison linéaire $Y = \beta_1 V_1 + \ldots + \beta_p V_p$ est telle que $Y(t) = 0$, alors $Y \equiv 0$ d'après le théorème d'unicité, donc $\beta_1 = \ldots = \beta_p = 0$).

La résolution de ce système permet de calculer $\alpha_1', \ldots, \alpha_p'$, puis $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ par intégration, d'où la solution particulière cherchée :

$$y(t) = \alpha_1(t)v_1(t) + \ldots + \alpha_p(t)v_p(t).$$

Exemple – (E) $y'' + 4y = \tan t$, avec $t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

• On commence par résoudre l'équation sans second membre

$$(E_0) \qquad y'' + 4y = 0.$$

Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^2 + 4$, et possède deux racines simples $2i$ et $-2i$. L'équation (E_0) admet pour base de solutions les fonctions $t \mapsto e^{2it}$, $t \mapsto e^{-2it}$, ou encore :

$$t \mapsto \cos 2t, \quad t \mapsto \sin 2t.$$

• On cherche ensuite une solution particulière de (E) en posant

$$y(t) = \alpha_1(t)\cos 2t + \alpha_2(t)\sin 2t.$$

Ceci conduit à résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha_1'(t)\cos 2t + \alpha_2'(t)\sin 2t = 0 \\ \alpha_1'(t)\cdot(-2\sin 2t) + \alpha_2'(t)\cdot(2\cos 2t) = \tan t. \end{cases}$$

Le déterminant du système étant égal à 2, on obtient

$$\begin{cases} \alpha_1'(t) = -\dfrac{1}{2}\ \tan t \sin 2t = -\sin^2 t = -\dfrac{1}{2}\ (1-\cos 2t) \\[2mm] \alpha_2'(t) = \dfrac{1}{2}\ \tan t\cos 2t = \dfrac{1}{2}\ \tan t(2\cos^2 t - 1) = \sin 2t - \dfrac{1}{2}\ \tan t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = -\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{4}\ \sin 2t \\[2mm] \alpha_2(t) = -\dfrac{1}{4}\ \cos 2t + \dfrac{1}{2}\ \ln(\cos t), \end{cases}$$

d'où la solution particulière

$$y(t) = -\frac{t}{2}\ \cos 2t + \frac{1}{2}\ \sin 2t\ \ln(\cos t).$$

La solution générale est donc

$$y(t) = -\frac{t}{2}\ \cos 2t + \frac{1}{2}\ \sin 2t\ \ln(\cos t) + \alpha_1\cos 2t + \alpha_2\sin 2t.$$

4. *Systèmes différentiels linéaires à coefficients variables*

L'objet de ce paragraphe (avant tout théorique) est de généraliser les résultats du § 2 au cas des systèmes linéaires à coefficients variables.

4.1. *Résolvante d'un système linéaire*

Considérons une équation linéaire sans second membre

$$(\mathrm{E}_0) \qquad Y' = A(t)Y$$

où $A : \mathbb{R} \supset I \to M_m(\mathbb{K})$ est une matrice $m\times m$ sur $\mathbb{K}$ à coefficients continus. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions maximales de (E_0). Pour tout $t_0 \in I$, on sait que

$$\Phi_{t_0} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{K}^m, \qquad Y \longmapsto Y(t_0)$$

est un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire. Pour tout couple $(t,t_0)\in I^2$, on définit

$$\begin{aligned} R(t,t_0) = \Phi_t\circ\Phi_{t_0}^{-1} : \mathbb{K}^m &\xrightarrow{\Phi_{t_0}^{-1}} \mathcal{S} \xrightarrow{\Phi_t} \mathbb{K}^m \\ V &\longmapsto Y \longmapsto Y(t). \end{aligned}$$