2017-2018 UGA

Examen de Topologie A, Janvier 2018

Corrigé

Problème 1

1.a. Un espace métrique (E, d) est complet si toute suite de Cauchy de (E, d) converge dans (E, d). Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet (pour la distance induite par la norme).

1.b. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$:

$$(*)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N,\ \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon, \text{ i.e. } \forall x \in [0,1],\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que pour chaque $x \in [0,1]$, la suite réelle $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, qui est complet, donc cette suite converge vers un réel que l'on note $f(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ comme dans $(*)$, $n \geq N$ et $x \in [0,1]$ quelconques. On a :

$$\forall m \geq N,\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon,$$

donc par passage à la limite quand $m \to +\infty$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Ceci étant vrai pour $n \geq N$ et $x \in [0,1]$ quelconques, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon,$$

donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

Reste à montrer la continuité de f. Soit $a \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$. D'après l'étape précédente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_N - f\|_\infty \leq \varepsilon/3$. Comme f_N est supposée continue en a, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [0,1],\ |x - a| < \eta \implies |f_N(x) - f_N(a)| < \varepsilon/3.$$

Mais alors pour tout $x \in [0,1]$, si $|x - a| < \eta$,

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Donc f est continue en a, et ce pour tout $a \in [0,1]$. Ainsi, on a montré que toute suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ converge dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, donc $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé complet, donc un espace de Banach.

2.a. Une partie A d'un espace topologique (E, τ) est dense si $\bar{A} = E$, ou encore si tout ouvert non vide de E rencontre A.

2.b. F contient l'ensemble des fonctions polynomiales, qui est dense dans E d'après le théorème de Weierstrass. F est donc lui aussi dense, i.e. $\bar{F} = E$. Comme $F \neq E$ (il existe des fonctions continues non C^1 sur $[0,1]$!), $F \neq \bar{F}$, donc F n'est pas fermé.

2.c. L'intérieur d'une partie A d'un espace topologique (E, τ) est le plus grand ouvert inclus dans A, ou encore l'ensemble des points intérieurs à A, i.e. des points qui possèdent un voisinage ouvert inclus dans A.

On a vu en cours qu'un sous-espace vectoriel strict d'un espace vectoriel normé (c'est le cas de F dans E) était toujours d'intérieur vide.

On peut aussi procéder à la main. Soit $f \in F$ une fonction C^1. Étant donné $\varepsilon > 0$, montrons que $B_E(f, \varepsilon)$ rencontre $E \setminus F$. Pour cela, posons $g : x \in [0,1] \mapsto |x - \frac{1}{2}|$ et remarquons que

$$\|(f + \varepsilon g) - f\|_\infty = \varepsilon \|g\|_\infty = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

et que $f + \varepsilon g$ est continue (car f et g le sont) mais pas C^1 (car f l'est mais pas g).

2.d. $\|\cdot\|_{C^1}$ est bien définie sur F car pour tout $f \in F$, f' est continue sur $[0,1]$. Elle est clairement positive, et comme elle est supérieure à $\|\cdot\|_\infty$ qui est une norme, elle satisfait automatiquement l'axiome de séparation. L'homogénéité et l'inégalité triangulaire découlent directement de celles de $\|\cdot\|_\infty$ et de la linéarité de la dérivation de F dans E.

2.e. Pour tout $f \in F$, $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{C^1}$ et $\|f'\|_\infty \leq \|f\|_{C^1}$ donc comme $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $(F, \|\cdot\|_{C^1})$, $(f_n)_n$ et $(f_n')_n$ sont de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, donc convergent dans cet espace. On note f et g leurs limites. La formule fondamentale de l'analyse fournit l'égalité de l'énoncé. Montrons que la suite de fonctions définies par le membre de droite $h_n : x \mapsto f_n(0) + \int_0^x f_n'(t)dt$ converge uniformément vers $h : x \mapsto f(0) + \int_0^x g(t)dt$. En effet, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |h_n(x) - h(x)| &\leq |f_n(0) - f(0)| + \int_0^x |f_n'(t) - g(t)|dt \\ &\leq \|f_n - f\|_\infty + \|f_n' - g\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

Or $h_n = f_n$ pour tout n et $(f_n)_n$ converge vers f donc par unicité de la limite, $f = h$, ce qui donne par dérivation $f' = g$ (et en particulier f est C^1). Finalement, si $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $(F, \|\cdot\|_{C^1})$, il existe $f \in F$ telle que (f_n) et (f_n') convergent uniformément vers f et f', de sorte que $(f_n)_n$ converge vers f dans $(F, \|\cdot\|_{C^1})$. On a donc montré que cet espace était un espace de Banach.

2.f. Pour tout $f \in F$, $\|D(f)\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq 1 \times \|f\|_{C^1}$, donc l'application D est continue de $(F, \|\cdot\|_{C^1})$ dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et $|||D||| \leq 1$. Vérifions que $|||D||| = 1$ (notons que cette borne ne peut être atteinte car si $\|D(f)\|_\infty = \|f\|_{C^1}$, $\|f\|_\infty = 0$ donc f est la fonction nulle). Considérons la suite de fonctions C^1 non identiquement nulles $f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n}$. Pour tout $n \geq 1$, $\|f_n\|_{C^1} = \|f_n\|_\infty + \|f_n'\|_\infty = \frac{1}{n} + 1$ et $\|D(f_n)\|_\infty = 1$ donc $\lim_n \frac{\|D(f_n)\|_\infty}{\|f_n\|_{C^1}} = 1$ donc $|||D||| \geq 1$, ce qui conclut.

2.g. Comme il s'agit d'une application linéaire entre EVN, il suffit de montrer qu'elle n'est pas bornée sur la boule unité, avec le même genre d'idée que ce qui précède : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : x \mapsto \sin(nx)$. Toutes ces fonctions appartiennent à la boule unité de $(F, \|\cdot\|_\infty)$, et leurs images satisfont $\|D(f_n)\|_\infty = n \to +\infty$, ce qui conclut.

2.h. Si ces normes étaient équivalentes, toute application continue pour l'une le serait pour l'autre, ce qui n'est pas le cas d'après les questions précédentes, donc elles ne sont pas équivalentes.

3.a. On a montré dans la question 2.c que F était d'intérieur vide dans E. Son complémentaire, l'ensemble des fonctions continues non C^1, est donc dense dans E. Il n'est pas ouvert car F n'est pas fermé d'après la question 2.b.

3.b.

$$^cU_n = \left\{ f \in E \,\middle|\, \exists x \in [0,1],\ \forall y \neq x,\ |x - y| < \frac{1}{n} \implies \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq n \right\}.$$

Soit donc $(f_k)_k$ une suite de ${}^c U_n$ convergeant vers f dans E, et, pour chaque k, x_k tel que

$$\forall y \neq x_k,\ |x_k - y| < \frac{1}{n} \implies \left| \frac{f_k(x_k) - f_k(y)}{x_k - y} \right| \leq n.$$

Comme $[0,1]$ est compact, $(x_k)_k$ admet une sous-suite $(x_{\phi(k)})_k$ convergeant vers un réel $x \in [0,1]$. Si $y \neq x$ satisfait $|y - x| < 1/n$, alors pour tout k assez grand, $y \neq x_{\phi(k)}$ et $|y - x_{\phi(k)}| < 1/n$, donc $\left| \frac{f_{\phi(k)}(x_{\phi(k)}) - f_{\phi(k)}(y)}{x_{\phi(k)} - y} \right| \leq n$ et donc par passage à la limite $\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq n$, ce qui montre que $f \in {}^c U_n$, et donc que ${}^c U_n$ est fermé.

3.c. Soit $f \in E$ et $\varepsilon > 0$. On va montrer qu'il existe $g \in U_n$ avec $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$ en prenant $g = f + \varepsilon v_p$ avec p assez grand. On constate déjà que pour un tel g, comme $\|v_p\|_\infty = 1$, on a $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$. f est continue sur le compact $[0,1]$ donc uniformément continue d'après le théorème de Heine. Soit $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [0,1]^2$, $|x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. Soit $x \in [0,1]$. Il appartient à un intervalle $[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}]$. Prenons pour y l'extrémité de cet intervalle la moins proche de x, de sorte que $\frac{1}{2p} \leq |x - y| \leq \frac{1}{p}$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} &= \frac{|f(x) - f(y) + \varepsilon(v_p(x) - v_p(y))|}{|x - y|} \\ &\geq \frac{\varepsilon |v_p(x) - v_p(y)| - |f(x) - f(y)|}{|x - y|} \\ &\geq \varepsilon 2p - \tfrac{\varepsilon}{2} 2p = \varepsilon p \end{aligned}$$

à condition que $\frac{1}{p} \leq \eta$. Ainsi en prenant $p \geq \max(\eta^{-1}, \frac{n}{\varepsilon})$, on voit que le minorant ci-dessus est supérieur à n, et donc que $g \in U_n$.

3.d. Soit $f \in \cap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$ et $x \in [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \neq x$ tel que $|x - y_n| < \frac{1}{n}$ et $\left| \frac{f(x) - f(y_n)}{x - y_n} \right| > n$. En particulier, $(y_n)_n$ converge vers x et $\frac{f(x) - f(y_n)}{x - y_n}$ diverge quand $n \to +\infty$. Ceci montre que f n'est pas dérivable en x, et ce pour tout x.

3.e. Le théorème de Baire affirme que dans un espace métrique complet, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet d'après 1, donc le théorème s'applique, et $\cap_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$ est dense dans E. D'après la question précédente, cela entraîne que les fonctions continues nulles part dérivables sont denses dans E.

Problème 2 : Distance de Hausdorff et ensembles fractals

Partie I. Un exemple en dimension 1

1. Si K est un compact de $\mathbb{R}$, comme les homothéties sont des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $T_0(K)$ et $T_2(K)$ sont aussi compacts, et leur réunion (finie !) également.

2. (rajouter légende)

3. D'après la question précédente, $\mathcal{T}(I) \subset I$, donc en regardant leurs images par $\mathcal{T}^n$, on obtient $\mathcal{T}^{n+1}(I) = \mathcal{T}^n(\mathcal{T}(I)) \subset \mathcal{T}^n(I)$. Une intersection décroissante de compacts non vide est un compact non vide. Enfin $\mathcal{T}(I_\infty) = \mathcal{T}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}^n(I)) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}(\mathcal{T}^n(I)) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{T}^n(I) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}^n(I) = I_\infty$ puisque la suite est décroissante.

4. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$, le résultat découle immédiatement des expressions des homothéties T_0 et T_1 : pour $a_1 \in \{0, 1\}$, pour tout $x \in [0, 1]$, $T_{a_1}(x) = \frac{a_1+x}{3}$, et comme T_{a_1} est continue et croissante, $T_{a_1}([\alpha, \beta]) = [T_{a_1}(\alpha), T_{a_1}(\beta)]$.

Supposons maintenant le résultat vrai au rang $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \{0, 2\}^{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, $(T_{a_2} \circ \cdots \circ T_{a_{n+1}})(I)$ est le segment $[\sum_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{3^i}, \sum_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{3^i} + \frac{1}{3^n}] =: [\alpha_n, \beta_n]$. Alors d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}
(T_{a_1} \circ \cdots \circ T_{a_{n+1}})(I) &= T_{a_1}([\alpha_n, \beta_n]) \\
&= [T_{a_1}(\alpha_n), T_{a_1}(\beta_n)] \\
&= \left[\frac{a_1}{3} + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{3^i}, \frac{a_1}{3} + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{3^i} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^n}\right] \\
&= \left[\frac{a_1}{3} + \sum_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{3^{i+1}}, \frac{a_1}{3} + \sum_{i=1}^n \frac{a_{i+1}}{3^{i+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k}, \sum_{i=1}^n \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^{n+1}}\right]
\end{aligned}$$

ce qui est bien l'expression attendue, et qui conclut la récurrence.

5. Soient $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $b = (b_1, \dots, b_n)$ deux éléments distincts de $\{0, 2\}^n$. Alors $\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i} \neq \beta = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{3^i}$ (unicité de l'écriture propre en base 3). Soit i_0 le plus petit indice tel que $a_i \neq b_i$. Spdg, on peut supposer que $a_{i_0} = 0$ et $b_{i_0} = 2$, et alors

$$\beta - \alpha = \frac{2}{3^{i_0}} + \sum_{i=i_0+1}^n \frac{b_i - a_i}{3^i} \geq \frac{2}{3^{i_0}} - 2\sum_{i=i_0+1}^n \frac{1}{3^i} = \frac{2}{3^{i_0}}(1 - \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{3^i}}_{<1/2}) > \frac{1}{3^{i_0}} \geq \frac{1}{3^n}$$

donc les intervalles $[\alpha, \alpha + \frac{1}{3^n}]$ et $[\beta, \beta + \frac{1}{3^n}]$ sont disjoints, ce qu'on voulait.

$\mathcal{T}^n(I)$ est par construction la réunion pour $a = (a_1, \dots, a_n)$ parcourant $\{0, 2\}^n$ des segments précédents. Chacun de ces segments est connexe (car un intervalle est connexe), donc les composantes connexes de $\mathcal{T}^n(I)$ sont des réunions de tels segments. Or un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si c'est un intervalle, et aucune réunion de deux ou plus de ces segments n'est un intervalle, car ils sont disjoints *et à distance strictement positive les uns des autres*Â (le caractère disjoint ne suffit pas : $[0, 1[$ et $[1, 2]$ sont des intervalles disjoints, mais ce ne sont pas les composantes connexes de leur réunion $[0, 2]$). Les composantes connexes de $\mathcal{T}^n(I)$ sont donc précisément les segments ci-dessus.

6.a. Il s'agit de vérifier que pour toute suite $(a_i)_i \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, la série $\sum_{i\geq 1} \frac{a_i}{3^i}$ converge dans $[0, 1]$. Or pour toute telle suite $(a_i)_i$, $0 \leq \frac{a_i}{3^i} \leq \frac{2}{3^i}$, terme général d'une série géométrique de raison $1/3 \in]-1, 1[$ donc convergente et de limite $\frac{2}{3} \times \frac{1}{1-1/3} = 1$. On conclut par comparaison de séries *à termes positifs*.

6.b. Soit $a = (a_i)_i \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(a) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i} \in [\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}]$ (calcul du même type que ci-dessus), donc $\varphi(a) \in \mathcal{T}^n(I)$. Ainsi, l'image de φ est incluse dans I_∞.

Réciproquement, soit $x \in I_\infty$. Pour chaque n, x appartient à une unique composante connexe de $\mathcal{T}^n(I)$. Si pour un n donné, cette composante est $[\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}]$, au rang $n+1$, la composante de $\mathcal{T}^{n+1}(I)$ à laquelle x appartient est l'une des deux composantes de $\mathcal{T}^{n+1}(I)$ rencontrant (et en fait incluses dans) le segment ci-dessus, à savoir $(T_{a_1} \circ \cdots \circ T_{a_n} \circ T_0)(I)$ ou $(T_{a_1} \circ \cdots \circ T_{a_n} \circ T_2)(I)$ (attention à l'ordre de composition !). On a ainsi une suite $(a_i)_{i\geq 1} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}]$. Or les suites $(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i})_n$ et $(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n})_n$ sont adjacentes et convergent toutes deux vers $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}$, donc $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i} = \varphi((a_i)_i)$, ce qui conclut.

6.c. Étant donné $a = (a_i)_i \in \{0,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$,

$$\text{si } a_1 = 0,\ \varphi(a) = \tfrac{1}{3}\varphi((a_2, a_3, \dots)) = T_0(\varphi((a_2, a_3, \dots))) \in \mathcal{T}(\mathrm{Im}(\varphi) = I_\infty)$$

$$\text{et si } a_1 = 2,\ \varphi(a) = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\varphi((a_2, a_3, \dots)) = T_2(\varphi((a_2, a_3, \dots))) \in \mathcal{T}(\mathrm{Im}(\varphi) = I_\infty).$$

Ainsi, $I_\infty \subset \mathcal{T}(I_\infty)$, ce qui donne l'égalité avec 3.

6.d. On a déjà vu que φ était surjective sur I_∞. L'injectivité provient de l'unicité du développement *propre* d'un nombre en base 3, et du fait que si un développement impropre et un développement propre donnent le même nombre, le développement propre doit comporter un 1, ce qui n'est pas le cas pour les éléments de I_∞.

On a vu en cours que $\{0,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ est non dénombrable, donc par bijection, c'est aussi le cas de I_∞.

6.e. La topologie discrète est métrisable, donc il suffit de vérifier que toute suite de $\{0,2\}$ admet une sous-suite convergente. C'est immédiat car $\{0,2\}$ est fini donc toute suite admet même une sous-suite stationnaire. (Si on veut utiliser Borel-Lebesgue, ne pas oublier de dire que cet espace est *séparé*).

6.f. La topologie produit sur $\{0,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ admet pour base

$$\left\{U_1 \times \cdots \times U_p \times \{0,2\}^{[\![p+1,+\infty[\![} \mid p \in \mathbb{N}^*, U_1, \dots, U_p \text{ ouverts de } \{0,2\}\right\},$$

or pour tout i, $\{a_i\}$ est un ouvert de $\{0,2\}$ pour la topologie discrète, donc $V_n = \{a_1\} \times \cdots \times \{a_n\} \times \{0,2\}^{[\![n+1,+\infty[\![}$ est bien un ouvert de $\{0,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$.

6.g. Soit $a \in \{0,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons V_n l'ensemble des $b \in \{0,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ tels que $b_i = a_i$ pour tout i entre 1 et n, comme dans la question précédente. Si $b \in V_n$, $|\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{2}{3^i} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Or V_n est un voisinage de a pour la topologie produit. On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de a tel que pour tout $b \in V$, $|\varphi(a) - \varphi(b)| < \varepsilon$, ce qui montre la continuité de φ en a, et ce pour tout a.

D'après (e) et le théorème de Tychonoff, $\{0,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ muni de la topologie produit est compact comme produit d'espaces compacts, et une bijection continue d'un compact dans un espace séparé est toujours un homéomorphisme, ce qui conclut.

6.h. Une composante connexe d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est nécessairement un intervalle. Or I_∞ ne contient aucun intervalle de longueur non nulle car entre deux éléments de I_∞ il y a toujours un réel dont l'écriture en base 3 comporte des 1, et qui donc n'appartient pas à I_∞. Les composantes connexes de I_∞ sont donc des intervalles de longueur 0, c'est-à-dire des singletons.

Comme I_∞ et $\{0,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ sont homéomorphes, les composantes connexes de $\{0,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ sont également ses singletons.

Partie II. Distance de Hausdorff

1. $\{O\} \cap I \neq \varnothing$ donc $\mathrm{dist}(\{O\}, I) = 0$. Montrons maintenant que $d_H(\{O\}, I) = 1$. I n'est pas inclus dans le 1-voisinage ouvert de $\{O\}$, donc $d_H(\{O\}, I) \geq 1$. En revanche, pour tout $r > 1$, $I \subset V_r(\{O\})$ et bien sûr $\{O\} \subset I \subset V_r(I)$ donc $d_H(\{O\}, I) \leq r$ et ce pour tout $r > 1$, donc finalement $d_H(\{O\}, I) = 1$.

2. Supposons A et B bornés. Notons d_A et d_B leurs diamètres, et $d_{AB} = \mathrm{dist}(A, B)$. Alors pour tout $r > d_{AB} + d_A$, $A \subset V_r(B)$. En effet, comme $r - d_A > d_{AB}$, il existe $(a, b) \in A \times B$ tels que $d(a, b) < r - d_A$, et alors pour tout $x \in A$, $d(x, b) \leq d(x, a) + d(a, b) < r$ donc $x \in V_r(B)$. De la même façon, pour tout $r > d_{AB} + d_B$, $B \subset V_r(A)$. On en déduit que $d_H(A, B)$ est finie et inférieure à $d_{AB} + \max(d_A, d_B)$.

3. Bien sûr, $A \subset \bar{A} \subset V_r(\bar{A})$ pour tout $r > 0$. Réciproquement, tout point adhérent à A appartient au r-voisinage de A pour tout $r > 0$ par définition ! Ainsi on a bien $d_H(A, \bar{A}) = 0$. d_H ne satisfait donc pas l'axiome de séparation sur $\mathcal{B}$, puisqu'il existe des ensembles bornés qui ne sont pas fermés, et donc des ensembles distincts (un tel ensemble et son adhérence), qui sont à distance de Hausdorff nulle.

4. $x \in A$ et par définition de la distance de Hausdorff, $A \subset V_{1/n}(B)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in B$ tel que $d(x, x_n) < 1/n$. La suite $(x_n)_n$ converge donc vers x. Mais B est compact donc fermé, donc $x \in B$. Ainsi $A \subset B$. De la même façon, $B \subset A$, et finalement $A = B$. Ceci montre précisément que d_H vérifie l'axiome de séparation.

5. Par définition de d_{AB}, il existe $y \in B$ tel que $d(x, y) < d_{AB} + \varepsilon$. Par définition de d_{BC}, il existe $z \in C$ tel que $d(y, z) < d_{BC} + \varepsilon$. Par inégalité triangulaire, on a bien le résultat demandé. Cela signifie que $A \subset V_r(C)$. On démontre de la même façon que $C \subset V_r(A)$, donc $d_H(A, C) \leq r$. Ceci étant vrai pour tout $r > d_{AB} + d_{BC}$, on obtient bien que $d_H(A, C) \leq d_{AB} + d_{BC}$, c'est-à-dire l'inégalité triangulaire.

6. On a déjà vu que d_H était bien définie sur $X \times X$ (2.), positive par définition, satisfaisait l'axiome de séparation (4.) et l'inégalité triangulaire (5.). La symétrie étant immédiate, cela fait de d_H une distance sur X.

Partie III. Application aux fractales

1. Même qu'en I.1, une application contractante étant lipschitzienne donc continue.

2. Comme les applications T_i sont contractantes et en nombre fini, il existe $k < 1$ tel que ces applications soient toutes k-lipschitziennes. Soient $A, B \in X$. On veut montrer que $d_H(\mathcal{T}(A), \mathcal{T}(B)) \leq k d_H(A, B)$, c'est-à-dire que pour tout $r > k d_H(A, B)$, $\mathcal{T}(A) \subset V_r(\mathcal{T}(B))$ et $\mathcal{T}(B) \subset V_r(\mathcal{T}(A))$. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout i, $T_i(A) \subset V_r(T_i(B))$ et réciproquement. Soit donc un tel r. Comme $r/k > d_H(A, B)$, $A \subset V_{r/k}(B)$ et réciproquement. Et comme pour chaque i, T_i est une contraction de rapport k, ceci entraîne facilement les inclusions voulues. $\mathcal{T}$ est donc bien une transformation contractante de (X, d).

3. $\mathcal{T}$ est une transformation contractante de l'espace métrique complet (X, d) donc d'après le théorème du point fixe de Banach-Picard, elle admet un unique point fixe K_∞, et toute orbite de $\mathcal{T}$ converge vers ce point fixe, ce qui démontre précisément le théorème.

4.