Examen de Topologie, Parcours A, Janvier 2018

(durée : 4h)

Les problèmes sont indépendants. S'il est conseillé, au sein d'un problème, de traiter les questions dans l'ordre, il est également possible de passer des questions et d'admettre leurs résultats dans les questions suivantes. Le symbole $*$ signale les questions plus difficiles ou plus longues. Les questions de type "cours" ne servent pas nécessairement à résoudre les questions qu'elles précèdent, et ne sont pas nécessairement plus courtes ou plus faciles que les autres questions.

La clarté de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Problème 1

On note E l'espace vectoriel $C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ (on admet que celle-ci définit bien une norme sur E).

1. *Questions de cours.*
   (a) Rappeler la définition d'un espace métrique complet et d'un espace de Banach.
   (b) Montrer que $(E,\|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach (on pourra commencer par montrer que toute suite de Cauchy de E converge *simplement* vers une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, que la convergence est uniforme, et enfin que la limite est continue. On admet la complétude de $(\mathbb{R},|\cdot|)$).
2. Soit F le sous-espace de E formé des fonctions C^1 sur $[0,1]$.
   (a) Rappeler la définition d'une partie dense d'un espace topologique.
   (b) F est-il dense dans E ? Fermé dans E ? (On pourra utiliser un théorème de la fin du cours).
   (c) Rappeler la (une) définition de l'intérieur d'une partie d'un espace topologique. Montrer que F est d'intérieur vide dans $(E,\|\cdot\|_\infty)$.
   (d) Pour tout $f\in F$, on note $\|f\|_{C^1}=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$. Montrer que $\|\cdot\|_{C^1}$ définit une norme sur F.
   (e) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(F,\|\cdot\|_{C^1})$. Montrer que $(f_n)_n$ et $(f_n')_n$ convergent uniformément vers des fonctions continues f et g. En remarquant que
   $$\forall x\in[0,1],\quad f_n(x)=f_n(0)+\int_0^x f_n'(t)dt,$$
   montrer que $f'=g$. Qu'en déduit-on sur l'espace vectoriel normé $(F,\|\cdot\|_{C^1})$?
   (f) Montrer que l'application $D : f\mapsto f'$ est continue de $(F,\|\cdot\|_{C^1})$ dans $(E,\|\cdot\|_\infty)$. Déterminer sa norme $|||D|||$ subordonnée aux normes $\|\cdot\|_{C^1}$ et $\|\cdot\|_\infty$.
   (g) Montrer que l'application D n'est pas continue de $(F,\|\cdot\|_\infty)$ dans $(E,\|\cdot\|_\infty)$.
   (h) Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_{C^1}$ sur F sont-elles équivalentes ?

3. (a) L'une des questions ci-dessus a pour corollaire immédiat que les fonctions continues non C^1 forment un sous-ensemble dense de $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Laquelle ? Cet ensemble est-il ouvert ?

On se propose maintenant de montrer que les fonctions continues *dérivables nulle part* forment également un sous-ensemble dense de $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Pour cela, on introduit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \left\{ f \in C^0([0,1], \mathbb{R}) \,\middle|\, \forall x \in [0,1],\ \exists y \neq x,\ |x-y| < \frac{1}{n} \text{ tel que } \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| > n \right\}.$$

(b)* Décrire ${}^cU_n$ à l'aide de quantificateurs comme U_n, puis montrer que ${}^cU_n$ est un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$. (On pourra considérer une suite $(f_k)_k$ de U_n convergeant dans E et utiliser la compacité de $[0,1]$).

(c)** Montrer que U_n est dense dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. On pourra pour cela introduire, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction v_p qui, pour tout $k \in [\![0, 2p-1]\!]$, est affine sur $[\frac{k}{2p}, \frac{k+1}{2p}]$, et vaut 0 (resp. 1) en $\frac{k}{2p}$ si k est pair (resp. impair), et utiliser le théorème de Heine.

(d) Montrer que les éléments de $\cap_{n\in\mathbb{N}^*} U_n$ sont nulle part dérivables.

(e) Énoncer le théorème de Baire. Conclure.

Problème 2 : Distance de Hausdorff et ensembles fractals

Le but de ce problème est de définir la *distance de Hausdorff* d_H sur l'ensemble X des compacts non vides du plan $\mathbb{R}^2$, lui-même muni de la distance euclidienne d, et de démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $T_1, \ldots, T_N$ des applications contractantes du plan $\mathbb{R}^2$ dans lui-même et $\mathcal{T} : X \to X$ l'application $K \mapsto T_1(K) \cup \cdots \cup T_N(K)$. Alors il existe un unique ensemble $K_\infty \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\mathcal{T}(K_\infty) = K_\infty$. De plus, quel que soit le compact $K_0 \subset \mathbb{R}^2$, la suite d'ensembles $(\mathcal{T}^n(K_0))_{n\in\mathbb{N}}$ obtenus en itérant la transformation $\mathcal{T}$ converge vers K_∞ dans l'espace métrique (X, d_H).*

La partie I étudie un exemple d'ensemble K_∞ obtenu de cette façon, l'ensemble triadique de Cantor. Le théorème général est démontré dans les parties II et III, qui peuvent être traitées indépendamment de la partie I.

Partie I. Un exemple en dimension 1

On se place ici dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. On note I le segment $[0,1]$, $T_0 : x \mapsto \frac{x}{3}$ et $T_2 : x \mapsto \frac{2+x}{3}$ les homothéties de $\mathbb{R}$ de rapport $\frac{1}{3}$ et de centres respectifs 0 et 1, et Y l'ensemble des parties compactes non vides de $\mathbb{R}$.

1. Justifier que $\mathcal{T} : K \mapsto T_0(K) \cup T_2(K)$ définit bien une application de Y dans lui-même.
2. On observe que $\mathcal{T}(I) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Représenter $\mathcal{T}^n(I) = (\mathcal{T} \circ \cdots \circ \mathcal{T})(I)$ pour $n = 0$ à 3.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}^{n+1}(I) \subset \mathcal{T}^n(I)$. On note $I_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}^n(I)$. Justifier que I_∞ est un compact non vide de $\mathbb{R}$ et que $\mathcal{T}(I_\infty) \subset I_\infty$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étant donné $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,2\}^n$, montrer que $(T_{a_1} \circ \cdots \circ T_{a_n})(I) = [\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n}]$.
5. Montrer que les 2^n intervalles ainsi définis sont disjoints. Déterminer les composantes connexes de $\mathcal{T}^n(I)$.

6. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \{0,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}} & \to & [0,1] \\ & (a_i)_i & \mapsto & \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{3^i}. \end{array}$$

   (a) Justifier que φ est bien définie.

   (b)* Montrer que l'image de φ est I_∞.

   (c) En déduire que $\mathcal{T}(I_\infty) = I_\infty$.

   (d) Montrer que φ induit une bijection de $\{0,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ dans I_∞. I_∞ est-il dénombrable ? (On pourra invoquer le cours).

   (e) On munit $\{0,2\}$ de la topologie discrète. Justifier que cet espace est compact.

   (f) On munit $\{0,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ de la topologie produit correspondante. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,2\}^n$, justifier que

$$V_n = \{(b_i)_i \in \{0,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}} \mid \forall i \in [\![1,n]\!], b_i = a_i\}$$

   est un ouvert pour cette topologie.

   (g) On munit I_∞ de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$. Montrer que la bijection de (d) est continue, puis que c'est un homéomorphisme (on pourra utiliser le théorème de Tychonoff).

   (h) Montrer que les composantes connexes de I_∞ sont les singletons. Quelles sont celles de $\{0,2\}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$?

Partie II. Distance de Hausdorff

Étant donnée une partie A du plan $\mathbb{R}^2$ et un réel $r > 0$, on définit le r-voisinage de A par :

$$V_r(A) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists y \in A, d(x,y) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{dist}(x,A) < r\}.$$

Maintenant, étant données deux parties A et B de $\mathbb{R}^2$, on définit la “distance” de Hausdorff entre A et B par :

$$d_H(A,B) = \inf\{r > 0 \mid A \subset V_r(B) \text{ et } B \subset V_r(A)\} \in [0,+\infty]$$

(on rappelle que par convention, $\inf \varnothing = +\infty$). *Attention !* Ne pas confondre $d_H(A,B)$ avec $\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{d(x,y) \mid (x,y) \in A \times B\}$.

On désigne maintenant par I le segment horizontal $[0,1] \times \{0\}$, et par O l'origine $(0,0)$.

1. Déterminer $\mathrm{dist}(\{O\}, I)$ et $d_H(\{O\}, I)$.
2. Montrer que si A et B sont bornés, $d_H(A,B)$ est fini.
3. Montrer que pour tout $A \subset \mathbb{R}^2$, $d_H(A, \bar{A}) = 0$, où $\bar{A}$ désigne l'adhérence de A dans $\mathbb{R}^2$. L'application d_H définit-elle une distance sur l'ensemble des parties bornées non vides de $\mathbb{R}^2$?
4. On restreint dorénavant d_H à $X \times X$, où X désigne l'ensemble des parties compactes non vides de $\mathbb{R}^2$. Soient A et $B \in X$ tels que $d_H(A,B) = 0$. Soit $x \in A$. Construire une suite de points de B convergeant vers x. En déduire que d_H vérifie l'axiome de séparation.

5. On veut maintenant démontrer l'inégalité triangulaire. Soient A, B, $C \in X$. On note $d_{AB} = d_H(A,B)$ et $d_{BC} = d_H(B,C)$. Soit $\varepsilon > 0$. Étant donné $x \in A$, montrer qu'il existe $z \in C$ tel que $d(x,z) < d_{AB} + d_{BC} + 2\varepsilon$. Interpréter cela en termes de r-voisinages, où $r = d_{AB} + d_{BC} + 2\varepsilon$. En déduire que $d_H(A,C) \leq r$ et conclure.
6. Conclure que d_H définit une distance sur X.

On admet que l'espace métrique (X, d_H) est *complet*.

Partie III. Application aux fractales

On se place sous les hypothèses du théorème du début du problème.

1. Justifier que l'application $\mathcal{T}$ est bien définie.
2. Montrer qu'elle est contractante pour la distance de Hausdorff.
3. Conclure la preuve du théorème.
4. Dessiner les quatre premiers termes de la suite $(\mathcal{T}^n(K))_n$ dans le cas de trois homothéties T_1, T_2, T_3 de rapport $1/2$ et de centres respectifs $O = (0,0)$, $I = (1,0)$ et $J = (0,1)$, en prenant pour K le singleton $\{O\}$, puis le triangle OIJ (intérieur et bord compris).