Examen de Géométrie différentielle

Corrigé

Commentaires / erreurs répandues

(Pour un corrigé complet, voir ci-après)

Exercice 1.
1. Même sans justification, il aurait été utile de préciser la variété M et le difféomorphisme φ dans les exemples fournis. Cela aurait évité des erreurs.
2. Il y avait trois choses à vérifier pour appliquer le théorème du cours, cf. corrigé.
3. Des choses très compliquées et incorrectes, cf. corrigé.
4. Idem.
5. Beaucoup ne justifient pas que l'application passe au quotient, et se compliquent la vie ensuite.
6. Le point clef est que l'action préserve le champ $\frac{\partial}{\partial t}$. Si cela n'apparaît pas (d'une façon ou d'une autre), la réponse est forcément incorrecte.
7. Attention à la confusion parallélisable / coiffable.

Exercice 2.
1. $d\eta \wedge d\eta$ n'est pas toujours nul pour une 1-forme η (ne pas confondre avec une 0-forme).
2. Beaucoup de réponses trop longues (qui sont parfois utiles plus tard cependant) : le noyau d'une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^3$ est de dimension 2, pas besoin de chercher une base.

6.c. Une surface dans $\mathbb{R}^3$ n'est pas forcément le graphe d'une fonction de (x, y). Or les coordonnées ne jouaient pas le même rôle dans l'expression de η.

7.b. On ne demandait pas quelque chose sur $j^*(\alpha \wedge d\alpha)$, mais bien sur $\alpha \wedge d\alpha$.

Exercice 3.
1. Traitée avec très peu de soin (on parle d'application réciproque sans avoir précisé le domaine, étudié l'injectivité, la surjectivité (ce n'était pas indispensable mais alors il fallait rédiger autrement), on ne vérifie pas que l'application donnée envoie bien $\mathbb{S}^1\times]-1,1[$ dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$, on ne fait pas la différence entre application lisse entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ et entre variétés...).
2. Souvent mal traitée. L'énoncé avait volontairement utilisé des coordonnées différentes pour la source $(\mathbb{S}^1\times]-1,1[\subset \mathbb{R}^2\times]-1,1[, (x_1, x_2, t))$ et le but $(\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \subset \mathbb{R}^3, (x, y, z))$. Respecter ces notations aurait évité de nombreuses erreurs.
4. L'énoncé précisait bien σ, ν et ω, pas juste σ et ω. La lecture des questions suivantes aurait pu mettre sur la bonne voie...
5. Il y avait une coquille dans l'énoncé mais l'autopersuasion a amené plusieurs à modifier leur résultat (correct) pour coller à l'énoncé... L'égalité donnée n'était valable qu'en restriction à $\mathbb{S}^1\times]-1,1[$, sinon il y avait un terme en $dx_1 \wedge dx_2$ supplémentaire.

Corrigé complet

Exercice 1.
1. Si φ est l'identité, on voit facilement que M_φ est difféomorphe à $M \times \mathbb{T}^1$ (on peut dire qu'on a vu en cours le cas où M est un point). Si $M = \mathbb{R}$ et $\varphi = -\mathrm{Id}$, M_φ est le ruban de Möbius, non difféomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^1$ (par exemple : car non orientable).
2. D'après le cours, il suffit de vérifier que l'action est lisse, libre et proprement discontinue. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'action $\rho_k : (p, t) \mapsto k \cdot (p, t)$ de k sur $M \times \mathbb{R}$ est de la forme $\varphi^k \times T_k$, où T_k désigne la translation de k sur $\mathbb{R}$. Comme φ^k et T_k sont des difféomorphismes de M et $\mathbb{R}$ respectivement, $\varphi^k \times T_k$ est un difféomorphisme de $M \times \mathbb{R}$.

   L'action est clairement libre car tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ agit par translation non triviale sur le facteur $\mathbb{R}$ du produit $M \times \mathbb{R}$.

   Elle est proprement discontinue car pour tout compact K de $M \times \mathbb{R}$, si $|k| > 2 \max_{(p,t)\in K} |t|$ (existe et fini), $k \cdot K \cap K = \varnothing$, donc $\#\{k \in \mathbb{Z}\,;\, k \cdot K \cap K \neq \varnothing\} < +\infty$.

3. On a vu que π était un difféomorphisme local. Il suffit donc de remarquer que π est injective sur l'ouvert U_n (les coordonnées du facteur $\mathbb{R}$ de deux représentants distincts d'un élément de M_φ diffèrent d'au moins 1), et donc définit une bijection de U_n vers $\pi(U_n)$.
4. L'application $p \mapsto \pi(p,0)$ est la composée de $p \in M \mapsto (p,0) \in U_{-1}$ et de π_{-1}. La première est clairement un plongement, et la seconde est un difféomorphisme, donc la composée est un plongement. $M_\varphi \setminus M_0 = \pi_0(U_0)$ et est donc difféomorphe à $U_0 = M\times]0,1[$.
5. On note $[t]$ la classe modulo $\mathbb{Z}$ d'un réel t. Si $\pi(p,t) = \pi(p',t')$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(p',t') = (\varphi^k(p), t+k)$, donc en particulier $[t] = [t']$, donc l'application induite $\pi(p,t) \in M_\varphi \mapsto [t]$ est bien définie. Elle est lisse par propriété caractéristique de la structure différentiable quotient. Enfin, comme la projection $M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une submersion et que π et la projection $\mathbb{R} \to \mathbb{T}^1$ sont des difféomorphismes locaux, l'application induite est aussi une submersion.
6. Il s'agit de vérifier que $(\pi_0)_*\frac{\partial}{\partial t} = (\pi_1)_*\frac{\partial}{\partial t}$ sur $\pi(U_0)\cap\pi(U_1) = \pi(M\times]0,\frac12[) \sqcup \pi(M\times]\frac12,1[)$, ou encore que $(\pi_1^{-1}\circ\pi_0)_*\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}$ sur $\pi_1^{-1}(\pi(M\times]0,\frac12[) \sqcup \pi(M\times]\frac12,1[) = (M\times]1,\frac32[) \sqcup (M\times]\frac12,1[)$. Or sur les deux ouverts, $\pi_1^{-1}\circ\pi_0$ est une translation dans la coordonnée t, (de -1 et de 0 respectivement), et $\frac{\partial}{\partial t}$ est invariant par une telle transformation. Le champ défini sur M_φ par $(\pi_n)_*\frac{\partial}{\partial t}$ sur $\pi(U_n)$ est donc bien défini (notons que les $\pi(U_n)$ recouvrent M_φ), et non nul en tout point car $\frac{\partial}{\partial t}$ l'est.
7. Il suffit de donner un exemple de variété ne possédant pas de champ de vecteurs partout non nul, comme la sphère $\mathbb{S}^2$ (théorème de la boule chevelue).
8. (a) On n'a pas le choix : pour tout $q \in T_q(M\times\mathbb{R})$, on décrète qu'une base est directe ssi elle est envoyée sur une base directe de $T_{\pi(q)}M_\varphi$ par $d\pi_q$ (qui est un isomorphisme linéaire). Reste à justifier que ces orientations des espaces tangents forment une famille d'orientations localement constante, ce qui est quasiment tautologique.
   (b) On décrète qu'une base de T_pM est directe si, quand on la complète par $\frac{\partial}{\partial t}_{(p,0)}$, on obtient une base directe de $T_{(p,0)}(M\times\mathbb{R})$ (principe de la coorientation, cf. cours).
   (c) $\pi_1^{-1}\circ\pi_{-1}$ doit préserver l'orientation de $M\times\mathbb{R}$, or, si B est une base directe de T_pM, la différentielle de cette application envoie $(B, \frac{\partial}{\partial t}_{(p,0)})$ sur $(D\varphi_q(B), \frac{\partial}{\partial t}_{(p,1)})$ donc $D\varphi_q(B)$ doit être une base directe de T_pM.
   (d) Pour $d \geq 2$, il suffit de prendre M_φ avec $M = \mathbb{R}^{d-1}$ et $\varphi(x,y) = (-x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-2} \simeq \mathbb{R}^{d-1}$.

Exercice 2. 1. $d\eta = -dy\wedge dx = dx\wedge dy$, $\eta\wedge d\eta = dz\wedge dx\wedge dy = dx\wedge dy\wedge dz$, et $\eta\wedge d\eta\wedge d\eta$ est une 5-forme sur une variété de dimension $3<5$ donc elle est nulle.
2. η_p est une forme linéaire non nulle (le coeff devant dz est non nul) sur un ev de dimension 3, donc son noyau est de dimension 2.
3. Si Z^1, Z^2 Z^3 sont les composantes d'un champ de vecteurs Z, en p, $\eta_p(Z_p) = Z_p^3 - y(p)Z_p^1$. Pour $Z=X$, cela donne $y(p) - y(p)\times 1 = 0$, et pour $Z=Y$, cela donne $0 - y(p)\times 0 = 0$, ce qui donne le résultat souhaité.
4. Pour le second, c'est facile : $\phi_Y^t(x,y,z) = (x,y+t,z)$ (champ de vecteurs constant). Pour le premier, observons que, comme le champ n'a pas de composante en $\frac{\partial}{\partial y}$, l'orbite issue d'un point (x,y,z) reste dans le plan $\mathbb{R}\times\{y\}\times\mathbb{R}$, où le champ est constant égal à $(1,0,y)$, donc $\phi_X^t(x,y,z) = (x+t,y,z+ty)$ (on peut aussi évidemment poser l'équation différentielle, etc.). Pour tous $(s,t,x,y,z) \in \mathbb{R}^5$, on a donc

$$\begin{aligned}(\phi_X^{-t}\circ\phi_Y^s\circ\phi_X^t)(x,y,z) &= (\phi_X^{-t}\circ\phi_Y^s)(x+t,y,z+ty)\\ &= \phi_X^{-t}(x+t,y+s,z+ty)\\ &= (x,y+s,(z+ty)-t(y+s)) = (x,y+s,z-ts) \neq \phi_Y^s(x,y,z)\end{aligned}$$

   dès que $s,t \in \mathbb{R}^*$.
5. Si on se rappelle de la formule adéquate (cf. TD), on peut directement déduire de la formule précédente que $[X,Y] = -\frac{\partial}{\partial z}$.

6. (a) D'après le cours, si $p = (x, y, f(x, y)) \in G$, $T_pG = \mathrm{Im}(Df_{(x,y)}) = \mathrm{Vect}((1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)), (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y))$.

   (b) Notons u et v les deux vecteurs ci-dessus. On a $\eta_p(u) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \times 1 = 0$ et $\eta_p(v) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y \times 0 = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, et donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, ce qui contredit le Théorème de Schwarz sur la commutativité des dérivées partielles.

   (c) Supposons qu'il existe une surface S tangente à $\ker \eta$ en chacun de ses points. Soit p l'un de ces points. Comme $T_pS = \ker \eta_p$ n'est pas vertical, S est localement le graphe d'une fonction de (x, y), et l'on peut appliquer ce qui précède pour aboutir à une contradiction.

7. (a) Notons que $j^*\alpha$ est une 1-forme sur S. Pour tout $p \in S$, pour tout $v \in T_pS = \ker \alpha_p$, $(j^*\alpha)_p(v) = \alpha_p(v) = 0$, ce qui signifie bien que $j^*\alpha$ est identiquement nulle. La différentielle extérieure commute avec le tiré en arrière, donc $j^*d\alpha = d(j^*\alpha)$ est elle aussi identiquement nulle.

   (b) Soit $p \in S$ et $B = (u_1, u_2, u_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que (u_1, u_2) soit une base de T_pS. Alors $(\alpha \wedge d\alpha)_p(u_1, u_2, u_3)$ est une somme alternée de termes de la forme $\alpha_p(u_i)(d\alpha)_p(u_j, u_k)$. Si $i = 1$ ou 2, $u_i \in \ker \alpha_p$ donc le terme en question est nul, et si $i = 3$, $(d\alpha)_p(u_j, u_k) = 0$ d'après la question précédente, donc le terme s'annule également. Ainsi, $(\alpha \wedge d\alpha)_p(u_1, u_2, u_3) = 0$. Mais pour tout triplet (u, v, w) de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $(\alpha \wedge d\alpha)_p(u, v, w) = (\alpha \wedge d\alpha)_p(u_1, u_2, u_3) \times \det_B(u, v, w) = 0$.

   On vient donc de montrer que, pour qu'une surface soit tangente à $\ker \alpha$, il faut que $\alpha \wedge d\alpha$ soit nul en tout point de cette surface. Or $\eta \wedge d\eta = dx \wedge dy \wedge dz$ ne s'annule nulle part, donc on retrouve bien qu'il ne peut exister de surface tangente à $\ker \eta$.

Exercice 3. 1. Tout d'abord, Φ est lisse de $\mathbb{R}^2 \times]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}^3$ (par opérations usuelles) et, pour tout $((x_1, x_2), t) \in \mathbb{S}^1 \times]-1, 1[$, $\|\Phi((x_1, x_2), t)\|^2 = (x_1^2 + x_2^2)(1 - t^2) + t^2 = 1$ et $t \neq \pm 1$ donc cette expression induit, par restriction à la source et au but (sous-variétés lisses), une application lisse de $\mathbb{S}^1 \times]-1, 1[$ dans $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$, que l'on note ϕ. On vérifie facilement que l'application $\psi : (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \mapsto (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, z)$ est bien définie (si $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$, $x^2+y^2 = 1-z^2 > 0$), à valeurs dans $\mathbb{S}^1 \times]-1, 1[$ et satisfait $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^2 \setminus \{N,S\}}$ et $\psi \circ \phi = \mathrm{Id}_{\mathbb{S}^1 \times]-1,1[}$, donc ϕ est bijective et ψ est sa bijection réciproque. Enfin ψ est la restriction à la source et au but de l'application de $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$ dans $\mathbb{R}^3$ ayant la même expression, qui est lisse par opérations usuelles.

2. Notons $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$. Par définition, pour $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$,

$$(\phi_* \tfrac{\partial}{\partial t})_p = D\phi_{\phi^{-1}(p)} \cdot \tfrac{\partial}{\partial t}_{\phi^{-1}(p)} = \begin{pmatrix} \partial_t \Phi_1 \\ \partial_t \Phi_2 \\ \partial_t \Phi_3 \end{pmatrix} (\phi^{-1}(p)) = \begin{pmatrix} \frac{-2tx_1}{\sqrt{1-t^2}} \\ \frac{-2tx_1}{\sqrt{1-t^2}} \\ 1 \end{pmatrix} (\phi^{-1}(p))$$

   donc si $p = (x, y, z)$,

$$(\phi_* \tfrac{\partial}{\partial t})_p = \begin{pmatrix} \frac{-zx}{x^2+y^2} \\ \frac{-zy}{x^2+y^2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

   ce qui s'écrit aussi : $\phi_* \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{zx}{x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{zy}{x^2+y^2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$. Ce champ ne peut pas s'étendre ne serait-ce que continûment à $\mathbb{S}^2$ car sinon, au point $(0, 0, 1)$, sa troisième coordonnée serait 1, or le plan tangent à $\mathbb{S}^2$ en ce point est horizontal.

3. Le champ ν est lisse sur $\mathbb{R}^3$. En outre, pour tout $p = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$, $\|\nu(p)\|^2 = x^2+y^2+z^2 = 1$ ($\rightarrow$ *unitaire*) et il a été vu en cours que $T_p\mathbb{S}^2 = \nu(p)^\perp$ (car $T_p\mathbb{S}^2 = \ker df_p$ où $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-1$ a pour niveau 0 (régulier) la sphère $\mathbb{S}^2$) $\rightarrow$ *normale*.

4. $\sigma = \iota_\nu \omega$.

5. Coquille dans l'énoncé. Il fallait montrer l'égalité de ces formes *en restriction à* $\mathbb{S}^1 \times]-1, 1[$, i.e., si i désigne l'inclusion de $\mathbb{S}^1 \times]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, l'égalité entre $i^*\Phi^*\sigma$ et $i^*\sigma'$. Tout d'abord,

$d\Phi_1 = \sqrt{1-t^2}dx_1 - \frac{tx_1}{\sqrt{1-t^2}}dt$, $d\Phi_2 = \sqrt{1-t^2}dx_2 - \frac{tx_2}{\sqrt{1-t^2}}dt$ et $d\Phi_3 = dt$ donc

$$\begin{aligned}\Phi^*\sigma &= \Phi_1 d\Phi_2 \wedge d\Phi_3 - \phi_2 d\Phi_1 \wedge d\Phi_3 + \Phi_3 d\Phi_1 \wedge d\Phi_2 \\ &= x_1(1-t^2)dx_2 \wedge dt - x_2(1-t^2)dx_1 \wedge dt + t((1-t^2)dx_1 \wedge dx_2 - tx_2 dx_1 \wedge dt - tx_1 dt \wedge dx_2)\end{aligned}$$

(les termes en $dt \wedge dt$ disparaissent), ce qui donne, en utilisant la distributivité et l'antisymétrie de $\wedge$ et en regroupant les termes en dx_1 et en dx_2 :

$$\begin{aligned}\Phi^*\sigma &= ((x_1(1-t^2) + x_1 t^2)dx_2 + (-x_2(1-t^2) - t^2 x_2)dx_1) \wedge dt + t(1-t^2)dx_1 \wedge dx_2 \\ &= (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) \wedge dt + t(1-t^2)dx_1 \wedge dx_2.\end{aligned}$$

Reste donc à prouver que le tiré en arrière par i de la forme en rouge est identiquement nul, soit encore que $(dx_1 \wedge dx_2)_p(u,v) = 0$ pour tout $(u,v) \in (T_p(\mathbb{S}^1 \times]-1,1[))^2$, or ceci équivaut au fait que les projections dans $\mathbb{R}^2$ de ces deux vecteurs de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ sont colinéaires (cet espace tangent est engendré par un vecteur horizontal et un vecteur vertical).

6. $\sigma' = \iota_X(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dt)$ avec $X = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ $(+0 \cdot \frac{\partial}{\partial t})$, qui est bien unitaire en restriction à $\mathbb{S}^1 \times]-1,1[$, et $T_p(\mathbb{S}^1 \times]-1,1[) = \ker df_p$ avec $f : (x_1,x_2,t) \in \mathbb{R}^2 \times]-1,1[\mapsto x_1^2 + x_2^2 - 1 \in \mathbb{R}$ puisque $\mathbb{S}^1 \times]-1,1[$ est le niveau 0 (régulier) de f, et $\ker df_p$ coïncide bien avec $X(p)^\perp$.
7. D'après la question précédente, $i^*\sigma'$ est une forme d'aire sur $\mathbb{S}^1 \times]-1,1[$ donc $\mathrm{Aire}(U) = |\int_U i^*\sigma'|$ (où l'on a choisi une orientation de $\mathbb{S}^1 \times]-1,1[$, qui en induit une de U).
8. Par la question 5. et la formule du changement de variable, si j désigne l'inclusion de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^3$,
$$\int_U i^*\sigma' = \int_U i^*\Phi^*\sigma = \int_U (\Phi \circ i)^*\sigma = \int_U (j \circ \phi)^*\sigma = \int_U \phi^*(j^*\sigma) = \pm \int_{\phi(U)} j^*\sigma$$
et cette dernière quantité est $\pm\mathrm{Aire}(\phi(U))$.
9. Non, un segment vertical de longueur ℓ sur le cylindre est envoyé sur un morceau de méridien de longueur $\ell\frac{\pi}{2}$.