Examen de Géométrie différentielle

9 janvier 2026, durée : 3h

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. La qualité de la rédaction sera prise en compte. Le sujet est composé de deux pages. Il est long, le barème en tiendra compte. Les questions sont dans une large mesure indépendantes. Les exercices valent essentiellement tous le même nombre de points.

Exercice 1. Étant donnée une variété différentiable M et un difféomorphisme $\varphi : M \to M$, on note M_φ le quotient de $M \times \mathbb{R}$ par l'action de $\mathbb{Z}$ définie par l'application

$$(k, (p, t)) \in \mathbb{Z} \times (M \times \mathbb{R}) \mapsto (\varphi^k(p), t + k) \in M \times \mathbb{R}$$

où $\varphi^k = \varphi \circ \cdots \circ \varphi$ (k fois) si $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^0 = \mathrm{Id}_M$ et $\varphi^k = (\varphi^{|k|})^{-1}$ si $k < 0$. Ce quotient est appelé *suspension de* φ, et muni de la topologie quotient. On note $\pi : M \times \mathbb{R} \to M_\varphi$ la projection canonique. Pour tout $(p, t) \in M \times \mathbb{R}$, $T_{(p,t)}(M \times \mathbb{R})$ s'identifie canoniquement à $T_pM \times \mathbb{R}$ et on note $\frac{\partial}{\partial t}$ le champ de vecteurs sur $M \times \mathbb{R}$ "constant" égal à $(0, 1)$ via cette identification. Enfin, on rappelle que $\mathbb{T}^1$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de réels modulo 1, muni de sa structure usuelle de variété (difféomorphe au cercle).

1. Donner deux exemples de telles suspensions présents dans le cours, l'un difféomorphe à $M \times \mathbb{T}^1$, l'autre non (on ne demande pas de justification).
2. Justifier que M_φ possède une unique structure de variété différentiable induite par celle de $M \times \mathbb{R}$ au sens où π est un difféomorphisme local en tout point. On munit dorénavant M_φ de cette structure.
3. Justifier que π induit un difféomorphisme π_n de $U_n = M \times]\frac{n}{2}, 1 + \frac{n}{2}[$ vers $\pi(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que l'application $p \in M \mapsto \pi(p, 0) \in M_\varphi$ induit un plongement de M dans M_φ. On note M_0 son image. À quoi est difféomorphe $M_\varphi \setminus M_0$?
5. Montrer que la projection canonique $M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ induit une submersion lisse de M_φ dans $\mathbb{T}^1$.
6. Montrer qu'il existe un champ de vecteurs partout non nul sur M_φ, égal à $(\pi_n)_* \frac{\partial}{\partial t}$ sur $\pi(U_n)$ pour $n = 0$ et 1.
7. En utilisant la question précédente, donner un exemple de variété non difféomorphe à une suspension.
8. On suppose M_φ orientée.
   (a) Montrer que $M \times \mathbb{R}$ admet une orientation telle que π préserve l'orientation (au sens où $d\pi_q$ envoie base directe de $T_q(M \times \mathbb{R})$ sur base directe de $T_{\pi(q)}M_\varphi$ pour tout $q \in M \times \mathbb{R}$).
   (b) Montrer que $M \simeq M \times \{0\}$ est orientable (on pourra utiliser le champ $\frac{\partial}{\partial t}$).
   (c) Montrer que φ préserve l'orientation de M (quelle que soit l'orientation choisie).
   (d) En utilisant ce qui précède, donner, en toute dimension, un exemple de variété non orientable.

Exercice 2. Sur $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées cartésiennes (x, y, z), on considère la 1-forme différentielle $\eta = dz - ydx$.

1. Calculer $d\eta$, $\eta \wedge d\eta$, $\eta \wedge d\eta \wedge d\eta$.
2. Étant donné $p \in \mathbb{R}^3$, quelle est la dimension de $\ker \eta_p$?
3. Vérifier que les champs de vecteurs $X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ satisfont : pour tout $p \in \mathbb{R}^3$, $X(p)$, $Y(p) \in \ker \eta_p$.
4. Déterminer les flots de ces deux champs de vecteurs (on pourra remarquer que X est constant dans chaque plan affine $\{y = cte\}$ et tangent à ces plans). Ces flots commutent-ils ? (i.e. a-t-on $\phi_X^{-t} \circ \phi_Y^s \circ \phi_X^t = \phi_Y^s$ pour tous $(s, t) \in \mathbb{R}^2$?)
5. Déterminer le champ de vecteurs $[X, Y]$.

On se propose de démontrer par deux méthodes qu'il n'existe pas de surface lisse de $\mathbb{R}^3$ qui soit tangente en chacun de ses points à $\ker \eta$ (cf. ci-dessous).

6. (Méthode 1)

(a) Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction lisse sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et

$$G = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$$

son graphe. Donner une base de T_pG en tout $p \in G$.

(b) On suppose G tangent à $\ker \eta$ en chacun de ses points, i.e. $T_pG = \ker \eta_p$ pour tout $p \in G$. En déduire l'expression des dérivées partielles de f en coordonnées, et aboutir à une contradiction.

(c) Montrer plus généralement qu'il n'existe pas de surface de $\mathbb{R}^3$ qui soit tangente à $\ker \eta$ en chacun de ses points.

7. (Méthode 2, plus générale) On considère une 1-forme α partout non nulle sur $\mathbb{R}^3$ (quelconque) et on suppose qu'il existe une surface S tangente à $\ker \alpha$ en chacun de ses points. On note $j : S \to \mathbb{R}^3$ l'inclusion.

(a) Justifier que $j^*\alpha$ est identiquement nulle. Que vaut $j^*d\alpha$?

(b) En déduire que pour tout $p \in S$, $(\alpha \wedge d\alpha)_p = 0$ (on pourra commencer par l'évaluer sur une base bien choisie). Conclure.

Exercice 3. On note respectivement t, (x_1, x_2) et (x, y, z) les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. On rappelle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{S}^n$ désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ et, dans le cas $n = 2$, on note $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$ les "pôles Nord et Sud". On considère sur $\mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs radial $\nu = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$ et la forme volume $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$.

1. Vérifier que l'application $\Phi : \mathbb{R}^2 \times]-1, 1[\to \mathbb{R}^3$, $((x_1, x_2), t) \mapsto (x_1\sqrt{1-t^2}, x_2\sqrt{1-t^2}, t)$ induit un difféomorphisme ϕ de $\mathbb{S}^1 \times]-1, 1[$ vers $\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\}$ (on pourra exprimer son inverse, et on justifiera soigneusement la régularité des applications considérées).
2. Écrire $\phi_* \frac{\partial}{\partial t}$ dans les coordonnées x, y, z (ici, on voit $\frac{\partial}{\partial t}$ comme un champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^1 \times]-1, 1[$, défini comme dans l'exercice 1). Ce champ s'étend-il en un champ lisse sur la sphère tout entière ?
3. Vérifier que le champ radial ν induit une normale unitaire lisse sur $\mathbb{S}^2$.
4. Quel est le lien entre $\sigma := xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$, ν et ω ?
5. Vérifier que $\Phi^*\sigma = (-x_2 dx_1 + x_1 dx_2) \wedge dt$. On note σ' cette dernière forme.
6. Écrire σ' comme $\iota_X(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dt)$ avec X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ induisant une normale unitaire lisse sur $\mathbb{S}^1 \times]-1, 1[$.
7. Étant donné un ouvert U de $\mathbb{S}^1 \times]-1, 1[\subset \mathbb{R}^3$, comment s'exprime l'aire (euclidienne classique) de U en termes de σ' ?
8. Montrer que ϕ préserve l'aire au sens où, pour tout ouvert U de $\mathbb{S}^1 \times]-1, 1[$, U et $\phi(U)$ ont la même aire.
9. ϕ préserve-t-elle les longueurs ?