MAT303 (2016-2017)
Examen de janvier 2017
Durée : 2h
(Sans calculatrice, sans document)
Le barème est donné à titre indicatif

Questions de cours[3 points]
1) On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $||.||$.
1a) Donner la définition de la boule ouverte de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $R > 0$.
1b) Donner la définition d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
1c) Démontrer qu'une réunion quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

2) On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $||.||$.
2a) Donner la définition d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui est K-lipschitzienne.
2b) Donner la définition d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui est uniformément continue.
2c) Démontrer qu'une fonction K-lipschitzienne $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est uniformément continue.

Exercice 1 (4 points). *Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = 2\max(|x|, 2|y|)$.*
1) Rappeler les axiomes que doit vérifier une norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$ puis montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2) Donner la définition de la boule B de centre $(0, 0)$ et de rayon 4 pour la norme N. Tracer B (On précisera d'abord les inéquations que doivent vérifier x et y si $(x, y) \in B$).
3) Rappeler la définition de la norme $||.||_\infty$ puis montrer que les normes N et $||.||_\infty$ sont équivalentes (on pourra montrer que $2||(x, y)||_\infty \leq N(x, y) \leq 4||(x, y)||_\infty$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$).

Exercice 2 (6 points). *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.*
1a) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
1b) Montrer que f est continue en $(0, 0)$.

2) Calculer les dérivées partielles de f pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$.

3a) Donner la définition de la dérivée de f en (x_0, y_0) suivant la direction $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ puis calculer la dérivée de f en $(0, 0)$ suivant la direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3b) Montrer que f a des dérivées partielles en $(0, 0)$.

4a) Les dérivées partielles de f sont-elles continues en $(0, 0)$?
4b) En déduire que f est différentiable en $(0, 0)$ (On énoncera avec soin le théorème du cours utilisé).

Exercice 3 (3 points)**.** *Soit la fonction* $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x^3$ *définie sur* $\mathbb{R}^2$.
1) Montrer que les points $(0,0)$ *et* $(-1/2,-1/4)$ *sont des points critiques de* f. **On admet qu'il n'y en a pas d'autres**.
2) Déterminer les extremas locaux de f.
3) La fonction f *a-t-elle des extremas globaux ?*

Exercice 4 (4 points)**.** *On munit* $\mathbb{R}$ *de la valeur absolue et soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue.*
1) Montrer que $F = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \geq 0\}$ *est un fermé (On donnera précisément la caractérisation des fermés utilisée). Quelle propriété doit avoir en plus l'ensemble* F *pour être compact (On précisera la caractérisation des compacts utilisée) ?*
2) On commence par étudier deux exemples instructifs.
2a) On pose $f(x) = e^x - 1$. *Déterminer explicitement* F *puis conclure que* F *est un compact ou non.*
2b) On pose $f(x) = x(1-x)$. *Déterminer explicitement* F *puis conclure que* F *est un compact ou non.*
3) On suppose dans cette question que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. *Montrer que* F *n'est pas compact.*
4) On suppose dans cette question que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. *Montrer que* F *est compact.*