MAT303 (2016-2017)
Examen de juin 2017
Durée : 2h
(Sans calculatrice, sans document)
Le barème est donné à titre indicatif

Questions de cours (3 points)
1) On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $||.||$.
1a) Donner la définition de la boule ouverte de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $R > 0$.
1b) Donner la définition d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
1c) Démontrer qu'une intersection FINIE d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
1d) Donner un exemple d'intersection non finie d'ouverts qui n'est pas ouverte.

2) On se place dans $\mathbb{R}^2$.
2a) Donner la définition des normes $||.||_\infty$ et $||.||_1$.
2b) Tracer les boules de centre $(0,0)$ et de rayon 1 pour les deux normes précédentes.
2c) Montrer que les deux normes sont équivalentes.

Exercice 1 (4 points). *Les 3 questions sont indépendantes.*

1) On considère la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x+y}$. *Montrer que* f *n'a pas de limite quand* (x,y) *tend vers* $(0,0)$ *(On pourra considérer les points de la forme* $(x,0)$ *puis de la forme* $(x, -x+x^2)$*).*

2) Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{2(x^2+y^2)}$ *si* $(x,y) \neq (0,0)$ *et* $f(0,0) = 0$.
2a) Montrer que f *est continue en* $(0,0)$.
2b) Déterminer les dérivées partielles de f *en* $(x,y) \neq (0,0)$.
2c) Montrer que f *a des dérivées partielles en* $(0,0)$.
2d) Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *n'est pas continue en* $(0,0)$ *(On pourra considérer les points de la forme* $(x,0)$ *puis de la forme* (x,x)*).*

3) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x,y) = (y^3 + 3xy, -x^2y)$. *Calculer la matrice jacobienne de* f *en tout point* (x,y) *de* $\mathbb{R}^2$ *et exprimer la différentielle* $df_{(1,1)}$ *de* f *en* $(1,1)$.

4) Calculer les dérivées partielles secondes de $f(x,y) = \sin(x^2y)$.

Exercice 2 (3 points). *Soit* $f(x,y) = 6x^2 + 2y^2 + 4x^3$.
1) Déterminer les points critiques de f.
2) La fonction f *a-t-elle des extremas locaux sur* $\mathbb{R}^2$ *?*
3)) La fonction f *a-t-elle des extremas globaux sur* $\mathbb{R}^2$ *?*

Exercice 3 (4 points). *Toute réponse non justifiée sera considérée comme fausse. On précisera en particulier la propriété du cours (caractérisation des ouverts, fermés ou compacts) utilisée.*

1) On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $||.||$. Le singleton $A = \{v\}$ où v est un vecteur fixé de $\mathbb{R}^n$ est-il ouvert ? fermé ? compact ?

2) On munit $\mathbb{R}$ de la valeur absolue. L'ensemble $B = \{2^{-n}; n \in \mathbb{N}\}$ est-il borné ? fermé ? compact ?

3) On munit $\mathbb{R}^2$ d'une norme $||.||$. Montrer que l'ensemble $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 7xy^3 + 3y^2x^5 < 1\}$ est ouvert (penser aux images réciproques). Pourquoi ce résultat ne dépend pas de la norme considérée sur $\mathbb{R}^2$?