DM – Corrigé

Problème : Échanges de limites et d'intégrales

Préliminaires

1. Fonction Gamma d'Euler

a. Soit $x > 0$.

- $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est C^0 donc *localement* intégrable sur $]0, +\infty[$.

- $e^{-t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$ donc $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$; or $t \mapsto t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $1-x < 1$ (intégrales de Riemann), donc, par critère de comparaison, $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ l'est aussi.

- $e^{-t}t^{x+1} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ (croissances comparées), donc $e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$; or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann) donc par domination, $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ l'est aussi.

Finalement, $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ est donc bien défini pour tout $x \in]0, +\infty[$.

b. Soit $x > 0$. Alors $x + 1 > 0$ donc $\Gamma(x + 1)$ est bien défini et vaut $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt = \lim_{\substack{\epsilon\to 0\\ A\to+\infty}} \int_\epsilon^A e^{-t}t^x dt$. Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont C^1 sur $]0, +\infty[$, de dérivées respectives $t \mapsto xt^{x-1}$ et $t \mapsto e^{-t}$. On peut donc effectuer l'IPP suivante, pour tous $0 < \varepsilon \leq A \in \mathbb{R}$:

$$\int_\epsilon^A e^{-t}t^x dt = [-e^{-t}t^x]_\epsilon^A - \int_\epsilon^A (-e^{-t}xt^{x-1})dt = \underbrace{-e^{-A}A^x}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} 0} + \underbrace{e^{-\epsilon}\epsilon^x}_{\xrightarrow[\substack{\varepsilon\to 0\\ \text{car } x>0}]{} 0} + x\underbrace{\int_\epsilon^A e^{-t}t^{x-1}dt,}_{\xrightarrow[\substack{A\to+\infty\\ \epsilon\to 0}]{} \Gamma(x)}$$

et par identification des limites des membres de gauche et de droite, on obtient $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

En particulier, par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!\,\Gamma(1)$. Or

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{A\to+\infty} [-e^{-t}]_0^A = 1 - \lim_{A\to+\infty} e^{-A} = 1,$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

2. Fonction zêta de Riemann

a. Soit $x > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ donc pour tout $k \geq n$, pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leq \frac{1}{t^x}$$

et par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{(k+1)^x} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x}$$

ce qui entraîne, par sommation sur k allant de n à $N \geq n$:

$$\sum_{k=n}^N \frac{1}{(k+1)^x} \leq \sum_{k=n}^N \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \underset{\text{(Chasles)}}{=} \int_n^{N+1} \frac{dt}{t^x} = \left[\frac{1}{(1-x)t^{x-1}}\right]_n^{N+1} = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{(N+1)^{x-1}} - \frac{1}{n^{x-1}}\right)$$

d'où, par passage à la limite quand N tend vers $+\infty$:

$$R_n(x) \leq \frac{1}{(x-1)n^{x-1}} \quad \left(= \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \right).$$

b. On cherche une valeur de n pour laquelle $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} - \zeta(p)\right| = R_n(p) \leq \epsilon$. D'après la question précédente, il *suffit* pour cela que $\frac{1}{(p-1)n^{p-1}} \leq \epsilon$, c'est-à-dire que $n \geq \left(\frac{1}{(p-1)\epsilon}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ $(p \geq 2)$. Comme n doit en outre être entier, une valeur convenable pour n est $\left[\left(\frac{1}{(p-1)\epsilon}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right] + 1$, où $[\,.\,]$ désigne l'application *partie entière*.

c. D'après la question b. appliquée à $p = 7$ et $\epsilon = 9.10^{-7}$, pour $n = 8$ (calculatrice),

$$0 \leq \zeta(7) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^7} \leq 0,9 \times 10^{-6}.$$

Or $\sum_{k=1}^{8} \frac{1}{k^7} = 1.0083488$ à 10^{-7} près par défaut (calculatrice) donc

$$1.0083488 \leq \zeta(7) \leq 1.0083489 + 0,9 \times 10^{-6} = 1.0083498$$

donc $\zeta(7) \simeq 1.008349$ à 10^{-6} près.

PREMIÈRE PARTIE : SUITES DE FONCTIONS

3. Théorème de convergence uniforme pour les suites de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ convergeant uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$. *Théorème : la limite uniforme sur un intervalle I d'une suite de fonctions continues sur I est elle aussi continue sur I.* f est donc elle aussi continue sur le *segment* $[a,b]$, donc l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est bien définie (finie). De plus, par convergence uniforme, pour tout n à partir d'un certain rang, $f - f_n$ est bornée sur $[a,b]$ (ceci est en fait vrai pour tout n car les fonctions $f - f_n$ sont continues sur le *compact* $[a,b]$ donc bornées sur $[a,b]$) et

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leq \int_a^b \|f - f_n\|_\infty dx = \|f - f_n\|_\infty (b-a) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

(par convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f). La suite de réels $\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers le réel $\int_a^b f(x)dx$.

4. Exemples et contre-exemples

a. Pour tout entier $n \geq 2$, définissons $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ n^2(\frac{2}{n} - x) & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[\quad \text{(et en fait si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]) \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

(plus simplement, il s'agit de la fonction croissant de 0 à n sur $[0, \frac{1}{n}]$, décroissant de n à 0 sur $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ et identiquement nulle sur $[\frac{2}{n}, 1]$).

- f_n est bien affine par morceaux.

- La *restriction* de f_n à $[0, \frac{1}{n}]$, $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ et $[\frac{2}{n}, 1]$ respectivement est continue car affine. La continuité de f_n sur $[0, 1]$ en découle (en tout point de $[0, 1]$, les limites de f_n à gauche et à droite existent et coïncident avec la valeur de f en ce point) .

- $(f_n)_{n\geq 2}$ converge simplement vers la fonction f identiquement nulle sur $[0, 1]$. En effet, pour tout $x \in [0, 1]$, soit $x = 0$, et alors $f_n(x) = f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 2$, soit $x > 0$ et alors il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < x$ et donc $f_n(x) = 0$.

- En revanche, $(f_n)_{n\geq 2}$ ne converge pas uniformément vers f car pour tout $n \geq 2$, $\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = n \nrightarrow 0$.

- Pour tout $n \geq 2$, $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ (aire du triangle isocèle de base $\frac{2}{n}$ et de hauteur n), donc $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\geq 2}$ ne converge pas vers $\int_0^1 f(x)dx = 0$.

b. On peut considérer les fonctions continues $f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$. Pour tout $x \in [0, 1[$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers 0, et pour $x = 1$, elle est constante égale à 1. La suite $(f_n)_n$ converge donc simplement vers la fonction f nulle sur $[0, 1[$ et valant 1 en 1. Cette fonction étant discontinue, la convergence ne peut être uniforme. Néanmoins, on a

$$\int_0^1 f_n = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = \int_0^1 f.$$

5. Cas d'un intervalle quelconque

a. Pour tout $n \geq 1$, $f_n : x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ est positive, dérivable sur $[0, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}}{n!} = \frac{x^{n-1}e^{-x}(n-x)}{n!} \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \in [0, n] \\ \leq 0 & \text{si } x \in [n, +\infty[\end{cases}$$

Ainsi, $\|f_n\|_\infty = f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ d'après la formule de Stirling, donc $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, ce qui signifie que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers la fonction nulle. En revanche, d'après les préliminaires, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1 \nrightarrow 0 = \int_0^{+\infty} 0dx.$$

Le **TH 1** n'est donc pas vrai si on remplace $[a, b]$ par un intervalle I non borné.

b.i. La suite (f_n) convergeant uniformément vers f sur I, il existe p tel que pour tout $n \geq p$, (et en particulier pour $n = p$), $f_n - f$ est bornée sur I et

$$\sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| < 1 \quad \text{et a fortiori} \quad \forall x \in I,\ |f(x)| - |f_n(x)| < 1, \text{ i.e. } |f(x)| < |f_n(x)| + 1.$$

f, qui est continue sur I comme limite uniforme de fonctions continues sur I, est donc en outre majorée (en valeur absolue) par la fonction $x \mapsto 1+|f_p(x)|$ qui est intégrable sur I comme somme de fonctions intégrables sur I ($|f_p|$ est intégrable sur I par hypothèse, et $x \mapsto 1$ est intégrable sur I car I est borné, d'intégrale $l(I)$). f est donc intégrable sur I.

b.ii. La preuve est identique à celle du **3**, en remplaçant $[a, b]$ par I et $b - a$ par $l(I)$.

6. Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions

a. Les fonctions f_n étant continues par morceaux sur I, leur intégrabilité sur I découle par théorème de comparaison de leur majoration (en valeur absolue) par la fonction φ intégrable sur I. Il en est de même pour f. En effet, pour tout $x \in I$,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leq \varphi(x) \quad \text{donc} \quad |f(x)| = |\lim_{n\to+\infty} f_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} |f_n(x)| \leq \varphi(x).$$

b.i. On peut reprendre l'exemple **4.b**. On a vu que la suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait simplement mais pas uniformément vers la fonction f nulle sur $[0,1[$ et valant 1 en 1, qui est continue par morceaux. On a montré par le calcul que la suite de réels $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait néanmoins vers $0 = \int_0^1 f(x)dx$. On aurait également pu déduire ce fait du **TH 2**, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| \leq 1$, et la fonction $x \mapsto 1$ est intégrable sur le segment $[0,1]$.

b.ii. Soit $I = [0,+\infty[$, $f_n(x) = \frac{e^{\sin(\frac{x}{n})}}{1+x^2}$ pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times I$, $\varphi : x \in I \mapsto \frac{e}{1+x^2}$ et $f : x \in I \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur I (par opérations élémentaires et non annulation de $x \mapsto 1+x^2$ sur I) ;
- f_n converge simplement vers f (qui est elle aussi continue) sur I car pour tout $x \in I$, $\frac{x}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ donc par continuité de sin en 0, $\sin(\frac{x}{n}) \underset{n\to\infty}{\to} \sin(0) = 0$ et par continuité de exp en 0, $e^{\sin(\frac{x}{n})} \underset{n\to\infty}{\to} e^0 = 1$, donc $f_n(x) = \frac{e^{\sin(\frac{x}{n})}}{1+x^2} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{1+x^2} = f(x)$;
- φ est continue, positive et intégrable sur I (d'intégrale $e \times [\arctan]_0^{+\infty} = e\frac{\pi}{2}$) ;
- $\forall x \in I$, $|\sin(\frac{x}{n})| \leq 1$ donc par croissance de exp, $|f_n(x)| \leq \frac{e}{1+x^2} = \varphi(x)$.

Alors d'après le **TH 2**, f est intégrable sur I (on le savait déjà) et $\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(\frac{x}{n})}}{1+x^2}dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Deuxième partie : séries de fonctions

7. Théorème de convergence uniforme pour les séries de fonctions

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions continues sur le segment $[a,b]$ qui converge uniformément sur $[a,b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons S_n la fonction $\sum_{k=0}^n f_k$, continue sur $[a,b]$ comme somme (finie) de fonctions continues. Par hypothèse, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$. On note S sa limite, qui est continue sur $[a,b]$ comme limite uniforme de fonctions continues. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément donc a fortiori simplement vers S, donc pour tout $x \in [a,b]$, $S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n f_k(x)$. Autrement dit pour tout $x \in [a,b]$, la série (numérique) $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$ converge, et $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = S(x)$.

Ainsi, la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait bien les hypothèses du **TH 1**, donc $(\int_a^b S_n(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b S(x)dx$. Or par linéarité de l'intégrale (de fonctions continues sur un segment), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^n f_k(x)\right) dx = \sum_{k=0}^n \left(\int_a^b f_k(x)dx\right)$. Donc la série $\sum_{n\geq 0} \int_a^b f_n(x)dx$ converge et sa somme vérifie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx\right) = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx.$$

8. Applications : séries trigonométriques et séries de Fourier

La manipulation de séries entières et trigonométriques est l'occasion de nombreux abus de notations (y compris dans les manuels et les sujets) dont le plus fréquent consiste à utiliser la même notation pour la série numérique $\sum_n a_n x^n$ (resp. $\sum_n (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$) pour un x fixé et la série de fonctions $\sum_n (x \mapsto a_n x^n)$ (resp. $\sum_n (x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$), ce que l'on n'écrit jamais... Pour y remédier (la disctinction entre ces deux objets étant cruciale dans ce sujet), nous noterons dorénavant e_n (resp. c_n, s_n), pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n$ (resp. $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \sin(nx)$) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Si une série trigonométrique $\frac{a_0}{2}c_0+\sum_{n\geq 1} a_nc_n+b_ns_n$ (à coefficients réels) est la série de Fourier d'une fonction f à valeurs réelles (sous-entendu par l'énoncé je pense) continue par morceaux et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ alors d'après le théorème de Parseval, la série numérique $\sum_{n\geq 1}(a_n^2+b_n^2)$ converge et

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

Or la série trigonométrique considérée a pour coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(0)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}=(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$, pour lesquels $(a_n^2+b_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}=(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable (série harmonique), donc cette série trigonométrique ne peut être la série de Fourier d'une fonction f continue par morceaux et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $\frac{a_0}{2}c_0+\sum_{n\geq 1} a_nc_n+b_ns_n$ une série trigonométrique convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$. Notons f sa limite. f est continue sur $\mathbb{R}$ comme limite uniforme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique comme limite simple (car uniforme) de la suite de fonctions 2π-périodiques $\left(\frac{a_0}{2}c_0+\sum_{k=1}^n a_kc_k+b_ks_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Vérifions que $\frac{a_0}{2}c_0+\sum_{n\geq 1}a_nc_n+b_ns_n$ est la série de Fourier de f, c'est-à-dire que

$$\forall p\in\mathbb{N},\ a_p=a_p(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos(pt)dt\quad\text{et}\quad\forall p\in\mathbb{N}^*,\ b_p=b_p(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin(pt)dt.$$

Soit $p\in\mathbb{N}$. Par définition de f,

$$\begin{aligned}a_p(f)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos(pt)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right)\cos(pt)dt\\&=\frac{a_0}{2\pi}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos(pt)dt}_{2\pi\delta_{0,p}}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left[c_p\times(a_nc_n+b_ns_n)\right](t)\right)dt\quad\text{(linéarité de l'intégrale)}\end{aligned}$$

La fonction c_p étant *bornée* sur $\mathbb{R}$, la convergence uniforme de la suite de fonctions $\left(\sum_{k=1}^n(a_kc_k+b_kc_k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$ entraîne celle de $\left(c_p\sum_{k=1}^n(a_kc_k+b_kc_k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}=\left(\sum_{k=1}^n c_p(a_kc_k+b_kc_k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, i.e celle de la série de fonctions $\sum_n[c_p(a_nc_n+b_ns_n)]$. On peut donc appliquer à cette série le **TH 3**, qui affirme que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\int_0^{2\pi}\left[c_p(a_nc_n+b_ns_n)\right](t)dt\right)$ converge vers $\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left[c_p(a_nc_n+b_ns_n)\right](t)\right)dt$, d'où

$$a_p(f)=a_0\delta_{0,p}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left[c_p(a_nc_n+b_ns_n)\right](t)dt,\quad\text{et par linéarité de l'intégrale}$$

$$\begin{aligned}a_p(f)&=a_0\delta_{0,p}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(pt)\cos(nt)dt}_{=\delta_{n,p}\text{ d'après l'énoncé}}+b_n\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(pt)\sin(nt)dt}_{=0\text{ d'après l'énoncé}}\right)\\&=a_p.\end{aligned}$$

On montre de même que pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $b_p=b_p(f)$, ce qui prouve que la série trigonométrique initiale est bien la série de Fourier d'une fonction continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$: f.

9. Intégration terme à terme d'une série de fonctions

a. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n$ est absolument convergente donc la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, et est en particulier bornée. Notons M un majorant de cette suite. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|a_n\frac{x^n}{n!}\right|\leq M\frac{|x|^n}{n!}$, terme général d'une série absolument convergente (de somme $Me^{|x|}$). Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{a_nx^n}{n!}$ est donc $+\infty$. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{a_n}{n!}e_n$ converge donc simplement (et même uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$) vers une fonction f C^0 (et même C^∞) sur $\mathbb{R}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons f_n la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par $f_n(x) = \frac{a_n}{n!} x^n e^{-x}$. D'après les préliminaires, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \frac{|a_n|}{n!} \Gamma(n+1) = |a_n| \quad \left(\text{de même, } \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = a_n \right).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \ ;$$

autrement dit, la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto f(x) e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Enfin, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ est convergente par hypothèse, donc le **TH 4** s'applique : $x \mapsto f(x) e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \right)$ converge et

$$\int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

10. Cas où les théorèmes TH 3 et TH 4 ne s'appliquent pas

a. Pour tout $x \in [0, 1[$, la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$ est convergente (série géométrique) et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k x^k \right| = \left| \frac{(-1)^n x^n}{1+x} \right| \underset{x \to 1^-}{\to} \frac{1}{2}$$

donc

$$\sup_{x \in [0,1[} \left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k x^k \right| \geq \frac{1}{2} \underset{n \to \infty}{\nrightarrow} 0$$

donc la série de fonctions considérée converge simplement mais pas uniformément sur $[0, 1[$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons f_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = (-1)^n x^n$. f_n est continue donc intégrable sur le segment $[0, 1]$, et $\int_0^1 |f_n(x)| dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, terme général d'une série *divergente*, donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ ne vérifie pas toutes les hypothèses du **TH 4**.

c. Néanmoins, $\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 (-1)^n x^n dx = \frac{(-1)^n}{n+1}$ est le terme général d'une série semi-convergente d'après le critère spécial des séries alternées ($(\frac{1}{n+1})_{n \geq 1}$ est décroissante et tend vers 0). Donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\int_0^1 f_n(x) dx \right)$ converge. D'autre part, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} (x \mapsto (-1)^n x^n)$ converge simplement sur $[0, 1[$ vers $x \mapsto \frac{1}{x+1}$, qui est intégrable sur $[0, 1[$ (car restriction à $[0, 1[$ d'une fonction continue sur $[0, 1]$). Maintenant, il est un peu dommage d'écrire :

$$\text{“} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(x) dx \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2) \quad \text{(classique)}$$

$$\text{et} \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)$$

$$\text{donc} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 f_n(x) dx \right) = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right) dx \quad \text{”}$$

car l'une des façons de démontrer que la somme de la série harmonique alternée est $\ln(2)$ est justement d'établir l'égalité ci-dessus *sans connaître la valeur du membre de gauche* ! C'est ce que nous faisons donc maintenant.

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)\right)dx-\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1 f_k(x)dx\right)\right| &= \left|\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx-\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right)dx\right| \quad \text{(lin. de l'int.)}\\
&= \left|\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}\right)dx\right| \text{ (idem + série géom.)}\\
&\leq \int_0^1\left|\frac{(-x)^{n+1}}{1+x}\right|dx \leq \int_0^1 x^{n+1}dx=\frac{1}{n+2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.
\end{aligned}$$

11. Théorème de convergence monotone

- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur I comme sommes finies de fonctions continues sur I,
- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I,
- pour tout $(n,x)\in\mathbb{N}\times I$,

$$\begin{aligned}
|S_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| &= \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \quad \text{car } f_k(x)\geq 0\ \forall k\in[\![0,n]\!].\\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)=f(x) \quad \text{car } f_k(x)\geq 0\ \forall k\in[\![n+1,+\infty[\![,
\end{aligned}$$

  et f est intégrable sur I.

La suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc bien toutes les hypothèses du **TH 2**, qui affirme alors que $\left(\int_I S_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_I f(x)dx=\int_I\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)dx$. Or pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\int_I S_n(x)dx=\int_I\left(\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)dx=\sum_{k=0}^{n}\left(\int_I f_k(x)dx\right)$ par linéarité de l'intégrale, donc finalement, $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\int_I f_n(x)dx\right)$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_I f_n(x)dx\right)=\int_I\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)dx.$$

12. Application à la physique

a. On commence par établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{t^3}{e^t-1}dt$.

- La fonction $f: t\mapsto\frac{t^3}{e^t-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle y est donc localement intégrable.
- Au voisinage de 0, $e^t-1\sim t$ donc $\frac{t^3}{e^t-1}\sim\frac{t^3}{t}=t^2$. f se prolonge donc par continuité en 0, et est donc intégrable sur $]0,1]$.
- $f(t)\underset{+\infty}{=}o(\frac{1}{t^2})$ (croissances comparées), et $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc f l'est aussi.

Ainsi, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Pour tout $t\in]0,+\infty[$,

$$f(t)=\frac{t^3}{e^t-1}=t^3e^{-t}\frac{1}{1-\underbrace{e^{-t}}_{\in]-1,1[}}=t^3e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-t})^n=\sum_{n=0}^{+\infty}t^3e^{-(n+1)t}.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons f_n la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(t)=t^3e^{-(n+1)t}$.

- Les f_n sont continues donc localement intégrables sur $[0,+\infty[$, et sont intégrables sur $[0,+\infty[$ car $f_n(t) \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$.

- $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction f continue et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Ainsi, d'après le théorème de convergence monotone, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_0^{+\infty} f_n(t)dt\right)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(t)dt\right) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right) dt.$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f_n(t)dt &= \int_0^{+\infty} t^3 e^{-(n+1)t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n+1}\right)^3 e^{-u} \frac{du}{n+1} \quad \text{(changement de variable linéaire “}u=(n+1)t\text{”)} \\
&= \frac{1}{(n+1)^4} \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} du = \frac{1}{(n+1)^4}\Gamma(4),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t-1} dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\right) dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(t)dt\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^4}\Gamma(4) = \underbrace{\zeta(4)}_{=\frac{\pi^4}{90}} \underbrace{\Gamma(4)}_{=3!} = \frac{\pi^4}{15}.
\end{aligned}$$

b. Notons C la constante $\frac{hc}{k_B T}$. Soit φ l'application C^1 de $]0,+\infty[$ dans lui-même définie par $\varphi(t) = \frac{C}{t}$ pour tout $t \in]0,+\infty[$. Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $\varphi'(t) = -\frac{C}{t^2} < 0$, donc φ est un C^1 difféomorphisme de $]0,+\infty[$ dans $]\lim_{t\to+\infty} \varphi(t), \lim_{t\to 0^+} \varphi(t)[=]0,+\infty[$. L'application $g : \lambda \in]0,+\infty[\mapsto \frac{1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{C}{\lambda}}-1}$ est donc intégrable sur $\varphi(]0,+\infty[) =]0,+\infty[$ si et seulement si $g\circ\varphi\times\varphi'$ l'est sur $]0,+\infty[$, et si tel est le cas,

$$\int_0^{+\infty} g(\lambda)d\lambda = \int_{+\infty}^0 g(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Or

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ g(\varphi(t))\varphi'(t) = \frac{1}{\varphi(t)^5}\frac{1}{e^{\frac{C}{\varphi(t)}}-1}\left(-\frac{C}{t^2}\right) = -\frac{1}{C^4}\frac{t^3}{e^t-1},$$

donc $g\circ\varphi\times\varphi'$ est bien intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après **a**, et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{C}{\lambda}}-1} d\lambda = \int_{+\infty}^0 -\frac{1}{C^4}\frac{t^3}{e^t-1}dt = \frac{\pi^4}{15C^4} \quad \text{d'après } \mathbf{a}.$$

Par suite, $\lambda \mapsto u_\lambda$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et

$$u = \int_0^{+\infty} u_\lambda d\lambda = 8\pi hc \int_0^{+\infty} g(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc\pi^4}{15\left(\frac{hc}{k_B T}\right)^4} = \frac{8\pi^5 (k_B T)^4}{15h^4c^3}$$

et enfin

$$M = \frac{c}{4}u = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3c^2}T^4 = \sigma T^4.$$

13. Généralisation

a. On procède exactement comme en **12.a.** en remplaçant t^3 par t^{x-1}, et on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt = \zeta(x)\Gamma(x).$$

b. En particulier, pour $x = 2$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \zeta(2)\Gamma(2) = \frac{\pi^2}{6} \times 1! = \frac{\pi^2}{6},$$

et pour $x = 7$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{e^t - 1} dt = \zeta(7)\Gamma(7) = \zeta(7) \times 7! = 5040\,\zeta(7).$$

Or d'après les préliminaires, $\zeta(7) \simeq 1,008349$ à 10^{-6} près donc $\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{e^t-1} dt \simeq 5082,07896$ à 5040.10^{-6} près :

$$5082,07392 = 5082,07896 - 5040.10^{-6} \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^6}{e^t - 1} dt \leq 5082,07896 + 5040.10^{-6} = 5082,07896.$$

Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{e^t-1} dt \simeq 5082,07$ à 10^{-2} près par défaut.