Partiel de Géométrie différentielle

5 novembre 2025

Commentaires généraux :

— Certaines parties du sujet n'étaient pas faciles. Mais attention à bien traiter les questions de base.

— Méfiez-vous des « il est clair que » et de leurs variantes. Cela cache souvent une incapacité à trouver l'argument (souvent simple, il est vrai) remplaçant cette expression...

— Soyez vigilants sur les *sources* et les *buts* des applications manipulées.

— Si un énoncé demande de montrer qu'une propriété est vraie sur un certain sous-ensemble et ensuite traite à part d'autres sous-ensembles, c'est en général pour une bonne raison (cf. exo 4), même si l'on n'est jamais à l'abri d'une erreur d'énoncé (qu'il faut dans ce cas signaler dès qu'elle est repérée).

Exercice 1. 1. **Faux**. Notons $O = (0,0,0)$ et remarquons déjà que $C \setminus \{O\}$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. En effet, c'est (par exemple) le graphe de la fonction lisse (par composition) $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$. Si C était aussi une sous-variété lisse, elle serait donc nécessairement de dimension 2. Voici deux arguments possibles pour prouver que ce n'est pas le cas :

— Par la caractérisation "graphe" des sous-variétés : pour un voisinage quelconque V de O, $C \cap V$ n'est pas de la forme $\{(x,y,f(x,y)),(x,y) \in U\}$ avec f lisse (C est de cette forme avec $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ qui n'est pas lisse en $(0,0)$, et on ne peut être le graphe que d'une seule fonction en (x,y)). Cela suffit en théorie, mais comme nous n'avons pas démontré cette variante en cours, observons en outre que C n'est pas non plus de la forme $\{(x,g(x,z),z),(x,z) \in U\}$ (pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $(0,\varepsilon,\varepsilon)$ et $(0,-\varepsilon,\varepsilon)$ appartiennent à $C \cap V$, donc $(0,\varepsilon)$ aurait deux images par g), ni $\{(g(y,z),y,z),(y,z) \in U\}$ par un argument similaire. C n'est pas localement le graphe d'une fonction lisse de deux variables parmi x,y,z, donc ce n'est pas une sous-variété lisse de dimension 2.

— L'espace tangent à C en O, au sens du cours, est réduit au vecteur nul. En effet, si $\gamma : t \mapsto (x(t),y(t),z(t))$ est une courbe lisse à valeurs dans C centrée en O, $(x(t),y(t)) = t\vec{v} + o(t)$ au voisinage de 0 (où $\vec{v} = (x'(0),y'(0))$), donc $z(t) = \sqrt{x^2(t)+y^2(t)} = |t|\,\|\vec{v}\| + o(t)$, qui ne peut être lisse que si $\|\vec{v}\| = 0$, donc $\vec{v} = 0$, et le DL ci-dessus entraîne alors également $z'(0) = 0$. Ainsi, comme annoncé, $T_O C = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, ce qui est impossible pour une sous-variété lisse de dimension 2.

2. **Vrai**. Notons déjà que C est séparé et à base dénombrable comme sous-espace de $\mathbb{R}^3$. Puisque $C = \{(x,y,\sqrt{x^2+y^2}),(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$, l'application $\phi : (x,y,z) \in C \mapsto (x,y) \in \mathbb{R}^2$ est une bijection qui est continue comme restriction d'une application linéaire, et d'inverse $(x,y) \mapsto (x,y,\sqrt{x^2+y^2})$ continue. C'est donc un homéomorphisme entre C et $\mathbb{R}^2$, ou encore une carte de C de domaine C tout entier. Le singleton $\{(C,\phi)\}$ définit donc un atlas de C (une carte est compatible avec elle-même...), qui munit C d'une structure de variété lisse (difféomorphe à $\mathbb{R}^2$).

Exercice 2. 1. Soient (U,ϕ) et (V,ψ) des cartes en x et $f(x)$ respectivement. Sur l'ouvert $W = U \cap f^{-1}(V)$, $\tilde{f} := \psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est lisse et sa différentielle en $\phi(x)$, $d\psi_{f(x)} \circ df_x \circ d\phi^{-1}_{\phi(x)}$, est un isomorphisme linéaire comme composée d'isomorphismes. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale classique à $\tilde{f}$: il existe $\Omega \subset W$ ouvert contenant $\phi(x)$ tel que $\tilde{f}$ induit un difféomorphisme entre Ω et $\tilde{f}(\Omega)$. Mais alors $f = \psi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \phi$ définit, par composition, un difféomorphisme entre l'ouvert $\phi^{-1}(\Omega)$ de M contenant x et l'ouvert $\psi^{-1}(\tilde{f}(\Omega))$ de N contenant $f(x)$, ce qui conclut.

2. Étant donnée une application γ, on note D_γ son domaine de définition. Soient (U_1, ϕ_1) et (U_2, ϕ_2) des cartes de M_1 et M_2 en x_1 et x_2 respectivement, et soit $\phi = \phi_1 \times \phi_2$ (carte de $M_1 \times M_1$ en (x_1, x_2)). Avec les notations du cours, l'application

$$\begin{array}{rccc} I: & C_{x_1}(M_1) \times C_{x_2}(M_2) & \to & T_{(x_1,x_2)}(M_1 \times M_2) \\ & (\gamma_1, \gamma_2) & \mapsto & \left[\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)_{|D_{\gamma_1} \cap D_{\gamma_2}}\right] \end{array}$$

est bien définie et surjective, et $I(\gamma_1, \gamma_2) = I(\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2)$ si et seulement si $(\phi \circ (\gamma_1, \gamma_2))'(0) = (\phi \circ (\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2))'(0)$, ce qui équivaut à $(\phi_i \circ \gamma_i)'(0) = (\phi_i \circ \bar{\gamma}_i)'(0)$ pour $i = 1$ et 2. Ceci montre que I induit une bijection

$$\begin{array}{rccc} \bar{I}: & T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2 & \to & T_{(x_1,x_2)}(M_1 \times M_2) \\ & ([\gamma_1], [\gamma_2]) & \mapsto & \left[\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)_{|D_{\gamma_1} \cap D_{\gamma_2}}\right], \end{array}$$

qui est la composée des isomorphismes linéaires $(d\phi_1)_{x_1} \times (d\phi_2)_{x_2} : T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2 \to \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, $\iota : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ (identification naturelle) et $(d\phi_{(x_1,x_2)})^{-1} : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \to T_{(x_1,x_2)}(M_1 \times M_2)$. C'est l'isomorphisme canonique recherché (il ne dépend d'aucun choix même si la preuve que c'est un isomorphisme utilise des cartes).

Exercice 3. 1. $\mathcal{H} = \varphi(\mathbb{R}^2)$ avec $\varphi : (t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (t\cos\theta, t\sin\theta, \theta) \in \mathbb{R}^3$. Cette application est lisse (car elle l'est composante par composante). Pour tout $(t, \theta) \in \mathbb{R}^2$, la jacobienne de φ en (t, θ) est

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -t\sin\theta \\ \sin\theta & t\cos\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs colonnes sont *non nuls* et *non colinéaires* (à cause de la dernière composante) donc la matrice est de rang $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, donc φ est une immersion. Elle est injective : $\varphi(t, \theta) = \varphi(t', \theta')$ implique $\theta = \theta'$ puis $t(\cos\theta, \sin\theta) = t'(\cos\theta, \sin\theta)$ et donc $t = t'$ puisque $(\cos\theta, \sin\theta)$ est toujours non nul. Enfin, elle est propre : si K est un compact de $\mathbb{R}^3$ (i.e. fermé borné, disons inclus dans $B(0, R)$), $\psi^{-1}(K)$ est fermé par continuité et

$$(t, \theta) \in \psi^{-1}(K) \;\Rightarrow\; \|\varphi(t, \theta)\| < R \;\Leftrightarrow\; t^2 + \theta^2 < R^2$$

donc $\varphi^{-1}(K)$ est borné. Ainsi, φ est un plongement de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{H}$, image de ce plongement, est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$.

(Plutôt que de parler du caractère propre, on pouvait exhiber l'inverse de la bijection $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{H}$, mais cela a souvent été fait maladroitement dans les copies).

2. φ induit alors un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{H}$ (on peut l'admettre ou préciser : c'est une application lisse par définition de la structure différentiable sur une sous-variété, bijective, et sa différentielle en tout point, application linéaire entre e.v. de dimension 2, est de rang 2 donc inversible, donc φ est un difféo local, et donc en fait global ; d'autres arguments sont possibles notamment si l'on a exhibé l'inverse dans la question précédente), donc sa réciproque est une carte de $\mathcal{H}$ ayant pour domaine $\mathcal{H}$ tout entier, *compatible avec la structure de variété obtenue grâce à la question précédente* (l'énoncé ne demandait pas explicitement cela, donc on pouvait se contenter d'un homéomorphisme...).

3. Vérifions déjà que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\rho_k : (x, y, z) \mapsto (x, y, z + k\pi)$ définit bien une application de $\mathcal{H}$ dans lui-même : si $(x, y, z) \in \mathcal{H}$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z) = \varphi(t, z)$, mais alors

$$\begin{aligned} (x, y, z + k\pi) &= (t\cos z, t\sin z, z + k\pi) \\ &= (t(-1)^k \cos(z + k\pi), t(-1)^k \sin(z + k\pi), z + k\pi) = \varphi((-1)^k t, z + k\pi) \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

De plus, il est immédiat que $\rho_k \circ \rho_l = \rho_{k+l}$. Enfin, ρ_k est lisse comme restriction à une sous-variété (à la source et au but) d'une application lisse (translation), et son inverse $(x, y, z) \mapsto (x, y, z - k\pi)$ est lisse pour les mêmes raisons, ce qui conclut.

4. Une translation de vecteur non nul n'a pas de point fixe, donc l'action est libre. Soient maintenant K et K' des sous-ensembles compacts de $\mathcal{H}$ (donc de $\mathbb{R}^3$). Ils sont en particulier bornés, donc il existe R tel que pour tout $(x,y,z) \in K \cup K'$, $|z| < R$. Alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|k| > 2R/\pi$, $\rho_k(B(0,R)) \cap B(0,R) = \varnothing$ donc $\rho_k(K) \cap K' = \varnothing$. Ainsi, l'ensemble $\{k \in \mathbb{Z}, \rho_k(K) \cap K' \neq \varnothing\}$ est fini. L'action est donc proprement discontinue.

5. Notons q l'application de passage au quotient $\mathcal{H} \to \mathcal{R}$. Pour la structure différentiable naturelle sur $\mathcal{R}$ en tant que variété quotient, si V est un ouvert de $\mathcal{H}$ tel que $\rho_k(V) \cap V = \varnothing$ pour tout $k \neq 0$ (i.e. tel que q est injective sur V), q induit un difféomorphisme entre V et $q(V)$. Les ouverts $V = \varphi(\mathbb{R}\times]0,\pi[)$ et $V' = \varphi(\mathbb{R}\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$ ont cette propriété, et leurs images par q recouvrent $\mathcal{R}$, donc $(q(V), \varphi^{-1} \circ (q_{|V})^{-1})$ et $(q(V'), \varphi^{-1} \circ (q_{|V'})^{-1})$ forment un atlas de $\mathcal{R}$.

6. Pour le passage au quotient, il s'agit simplement de remarquer que si $(x,y,z) \in \mathcal{H}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $P(\rho_k(x,y,z)) = z + k\pi\ [\pi\mathbb{Z}] = z\ [\pi\mathbb{Z}] = P(x,y,z)$. Si e_3^* désigne la forme linéaire $(x,y,z) \mapsto z$ et p_π la projection canonique $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, $P = p_\pi \circ (e_3^*)_{|\mathcal{H}}$ est lisse comme composée de deux applications lisses (la première (à droite) comme restriction à une sous-variété d'une application lisse (car linéaire) de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, la seconde par définition de la structure différentiable canonique sur $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$), et surjective comme composée de deux applications surjectives (immédiat). Le passage au quotient (de P a p) préserve naturellement la surjectivité, et la lissité par définition/propriété caractéristique de la structure différentiable quotient sur $\mathcal{R}$.

7. (Infinité de rédactions possibles... mais doit apparaître quelque part le point clef, ici en rouge) Pour tout $z \in \mathbb{R}$, notons D_z la droite horizontale $\mathcal{H} \cap (\mathbb{R}^2 \times \{z\})$, qui s'identifie naturellement à $\mathbb{R}$ par $\iota_z : t \in \mathbb{R} \mapsto (t\cos z, t \sin z, z)$. Soit maintenant $\omega \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ un représentant de ω. Alors $P^{-1}(\{\omega\})$ est l'union des droites $D_{\theta+k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, et la projection canonique $q : \mathcal{H} \to \mathcal{R}$ envoie chacune de ces droites bijectivement sur $p^{-1}(\{\omega\})$. Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, $j_k := q \circ \iota_{\theta+k\pi}$ fournit donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $p^{-1}(\{\omega\})$, et donc une potentielle structure vectorielle. Il s'agit de vérifier que celle-ci ne dépend en fait pas de k, et ceci vient de ce que $(j_{k'})^{-1} \circ j_k = (-1)^{k-k'} \operatorname{Id}_{\mathbb{R}}$, qui est un isomorphisme linéaire. Toutes les structures données par les j_k coïncident donc (attention, pas les identifications à $\mathbb{R}$, mais le sens donné à 0, à la somme de deux éléments et au produit par un scalaire), ce qui munit $p^{-1}(\{\omega\})$ d'une structure naturelle d'e.v. de dimension 1. On peut vérifier que les cartes de la question 5, composées avec la projection naturelle $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, fournissent alors des trivialisations compatibles.

Plus concrètement, pour tout point a de $q(\mathcal{H}\cap\mathbb{R}^2\times]0,\pi[)$ (resp. $q(\mathcal{H}\cap\mathbb{R}^2\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$), il existe une unique paire $(t,\theta) \in \mathbb{R}\times]0,\pi[$ (resp. $\mathbb{R}\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$) telle que $a = [(t\cos\theta, t\sin\theta, \theta)]$, et une première (resp. seconde) trivialisation locale associe à a le couple $([\theta], t) \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. On peut vérifier que le changement de trivialisation est $\operatorname{Id}_{\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}} \times \operatorname{Id}_{\mathbb{R}}$ sur $p_\pi(]0,\frac{\pi}{2}[) \times \mathbb{R}$ et $\operatorname{Id}_{\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}} \times (-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}})$ sur $p_\pi(]\frac{\pi}{2},\pi[) \times \mathbb{R}$.

8. On peut par exemple remarquer que $\mathcal{R}$ est difféomorphe au ruban de Möbius (topologiquement, on obtient $\mathcal{R}$ à partir d'une bande $\mathbb{R} \times [0,\pi]$ « twistée en hélicoïde en recollant $\mathbb{R}\times\{0\}$ et $\mathbb{R}\times\{\pi\}$ après un demi-twist »), qui n'est lui-même pas difféomorphe à l'espace total du fibré trivial $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. (On peut construire explicitement le difféomorphisme entre $\mathcal{R}$ et le ruban de Möbius "standard" $\mathcal{M}$, quotient de $\mathbb{R}^2$ par l'action de $\mathbb{Z}$ définie par $(k,(t,\theta)) \mapsto ((-t)^k, \theta+k)$ ou $(k,(t,\theta)) \mapsto ((-t)^k, \theta+k\pi)$, ce qui ne change essentiellement rien. En effet, remarquons que le difféomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{H}$ passe précisément au quotient en une application de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{R}$ qui est bijective, lisse et d'inverse lisse (application induite par φ^{-1}).

Concernant l'atlas, non : si c'était le cas, l'unique carte enverrait $\mathcal{R}$ tout entier sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et la section nulle du fibré vectoriel sur un lacet dans $\mathbb{R}^2$ qui diviserait nécessairement U en deux composantes connexes, alors que ce n'est pas le cas pour la section nulle dans $\mathcal{R}$.

9. Notons $q_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{C}$ la projection canonique. L'application $\psi : (t,\theta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto q_2(\varphi(t,\theta)) \in \mathcal{C}$ passe au quotient en une application $\bar{\psi} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathcal{C}$ (l'analogue de cette affirmation était faux pour $\mathcal{R}$, essentiellement car cos et sin sont 2π et non π-périodiques). Affirmation : ψ^{-1} est la trivialisation recherchée.

10. Oui car c'est le cas de la variété difféomorphe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\simeq\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}\simeq\{v\in\mathbb{R}^2\,;1<\|v\|<2\}$.

Exercice 4. 1. En coordonnées réelles, f est la restriction à $\mathbb{S}^3$ de $F:(x_1,y_1,x_2,y_2)\mapsto x_1^2+y_1^2$ qui est polynomiale donc lisse, donc f est lisse par restriction. En outre, si $z=(x_1,y_1,x_2,y_2)\in f^{-1}(]0,1[)$, df_z est la restriction à $T_z\mathbb{S}^3$ de $DF_z:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$, $(u_1,v_1,u_2,v_2)\mapsto 2x_1u_1+2y_1v_1$, dont le noyau est $(x_1,y_1)^\perp\times\mathbb{R}^2$, tandis que $T_z\mathbb{S}^3=(x_1,y_1,x_2,y_2)^\perp$. Il suffit de montrer que le second n'est pas inclus dans le premier (car alors Df_z sera de rang ≥ 1 et donc surjective vers $\mathbb{R}$). L'hypothèse $z\in f^{-1}(]0,1[)$ assure que (x_1,y_1) et (x_2,y_2) diffèrent de $(0,0)$. SPDG, supposons que $x_1\neq 0$ et $x_2\neq 0$. Alors $(x_1,0,-\frac{x_1^2}{x_2},0)\in T_z\mathbb{S}^2\setminus\ker Df_z$, comme souhaité.

2. Le niveau $f^{-1}(\{0\})=\{(0,z_2)\in\mathbb{C}^2\,;|z_2|^2=1\}$ est un cercle dans $\mathbb{R}^4$, donc une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^4$, et donc de $\mathbb{S}^3$. Il en est de même pour $f^{-1}(\{1\})$.

3. Soit $c\in]0,1[$ (si $c\notin[0,1]$, $f^{-1}(\{c\})=\varnothing$ et si $c\in\{0,1\}$, la réponse précédente montre que c est une valeur singulière, sinon le niveau correspondant serait une sous-variété de $\mathbb{S}^3$ de dimension $3-1=2$). On peut par exemple vérifier que $f^{-1}(\{c\})=\{(\sqrt{c}\,\omega_1,\sqrt{1-c}\,\omega_2),(\omega_1,\omega_2)\in\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1\}$, ce qui conclut.

Erreurs courantes

1.1. a) (Erreur logique) Ce n'est pas parce qu'une application n'est pas submersive en un point que le niveau auquel appartient ce point n'est pas une sous-variété lisse. Le résultat du cours affirme qu'un niveau régulier est une sous-variété, mais pas qu'un niveau singulier n'en est pas une ! Il y a beaucoup de contre-exemples à cela.

b) Attention, l'espace tangent à C en $(0,0,0)$ (au sens du cours) est réduit à $\{0\}$, il ne contient pas 3 vecteurs linéairement indépendants comme dans le cas du cône "complet" $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,x^2+y^2-z^2=0\}$. On peut contester l'adéquation de la définition avec l'intuition, mais c'est comme ça...

1.2. Même type d'erreur logique qu'en 1.1 : le cours affirme qu'une sous-variété lisse admet une structure naturelle de variété lisse, mais il ne dit absolument pas que quelque chose qui n'est pas une sous-variété lisse n'admet pas de structure différentiable.

2.2. Nombreux sont ceux qui ont pris comme définition de T_xM l'ensemble

$$\{c'(0);c:]-\varepsilon,\varepsilon[\to M \text{ lisse},\varepsilon>0,c(0)=x\},$$

ou alors (plus hybride) : $C_x(M)/_\sim$ où $c\sim\bar{c}\Leftrightarrow c'(0)=\bar{c}'(0)$. Je pense que cela venait d'une confusion avec le cas des sous-variétés (ici, l'énoncé parlait de *variétés*), mais il est vrai que T_xM est égal au premier ensemble. Cependant cela ne peut pas être pris comme définition puisque, par définition justement, $c'(0):=dc_0(1)$, ce qui requiert la définition de dc_0, qui est une application... entre espaces tangents, qui doivent donc avoir été définis au préalable ! Plus ennuyeux : le raisonnement de ceux qui ont pris cette « définition » aboutit essentiellement à écrire que, si $c=(c_1,c_2)$ est un chemin lisse à valeurs dans $M_1\times M_2$, $c'(0)=(c_1'(0),c_2'(0))$, qui est une égalité entre deux objets qui appartiennent à deux espaces différents, $T_{(x_1,x_2)}(M_1\times M_2)$ d'une part et $T_{x_1}M_1\times T_{x_2}M_2$ d'autre part, dont on cherche justement à exhiber l'identification...

3.1. a) Trop de personnes pensent que l'image de $\mathbb{R}^2$ par une simple immersion est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$.

b) Une immersion est *toujours localement* un plongement (voir le théorème de forme normale des immersions par exemple). Pour montrer qu'une immersion définit *globalement* un plongement, on ne peut pas avoir recours à des arguments locaux (en réduisant son ensemble de définition).

3.3. Beaucoup d'oublis dans cette question. Peu ont pensé à vérifier que l'application donnée définissait bien une action *sur* $\mathcal{H}$, c'est-à-dire que le translaté par $(0,0,k\pi)$ d'un point de

l'hélicoïde était bien dans l'hélicoïde (avec $\pi/2$ cela n'aurait pas marché par exemple...). Beaucoup se sont concentrés sur « difféomorphismes » et n'ont pas montré que c'était une action de groupes.

3.5. Attention, trop de personnes ont écrit (quelque chose d'analogue au fait) que le changement de carte entre les cartes fournies dans le corrigé ci-dessus était l'identité. Les domaines de ces deux cartes s'intersectent en deux ouverts disjoints, $(q \circ \varphi)(\mathbb{R}\times]0, \frac{\pi}{2}[)$ et $(q \circ \varphi)(\mathbb{R}\times]\frac{\pi}{2}, \pi[) = (q\circ\varphi)(\mathbb{R}\times]-\frac{\pi}{2}, 0[)$. Pour le premier, le changement de cartes est effectivement l'identité. Pour le second, c'est la translation $(t, \theta) \in \mathbb{R}\times]-\frac{\pi}{2}, 0[\mapsto (t, \theta+\pi) \in \mathbb{R}\times]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Attention, $(q_{|V'})^{-1} \circ q_{|V}$ n'est pas l'identité partout !

3.7. Beaucoup d'abus confondant classe d'équivalence et représentant, menant à passer à côté de l'essentiel.

4.1. La restriction à une sous-variété d'une submersion n'est pas nécessairement une submersion. La restriction à un sev d'une application surjective n'est plus nécessairement surjective ! Penser à l'application $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto z$ restreinte à $\mathbb{S}^2$. L'application est extrémale en $p_\pm = (0, 0, \pm 1)$ donc sa différentielle s'y annule nécessairement... (en d'autres termes, $\ker df_{p_\pm} = \mathbb{R}^2 \times \{0\} = T_{p_\pm}\mathbb{S}^2$).

L'énoncé devait vous mettre la puce à l'oreille : pourquoi parlerait-il de $f^{-1}(]0, 1[)$ et pas de $f^{-1}(\mathbb{R}^*)$? Pourquoi ferait-il traiter conjointement $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ dans la question suivante ?