Partiel de Géométrie différentielle

5 novembre 2025, 18h15 – 20h15.

Le sujet comporte deux pages.

Aucun document ni dispositif électronique n'est autorisé.

La qualité de la rédaction sera déterminante dans le résultat de l'évaluation. Les réponses doivent être claires (phrases, notations introduites, etc.) et justifiées (ex : si l'énoncé demande de fournir une carte, il ne suffit pas de la fournir ; on doit justifier, même succinctement, que l'application fournie est bien une carte. Si l'on affirme qu'une application est une immersion, on doit le justifier, etc.) N'oubliez pas la moitié d'une question donnée. Par exemple la question 6 de l'exercice 3 attend trois justifications (passe au quotient / surjection / lisse).

Si vous savez comment il faudrait procéder en théorie pour répondre à une question mais que vous n'y arrivez pas dans la pratique, écrivez la théorie, c'est déjà une preuve de connaissance !

Exercice 1. Vrai/Faux. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier soigneusement votre réponse. On note $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty[\,; z^2 = x^2 + y^2\}$, et on le munit de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^3$.

1. C est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$.
2. C peut être muni d'une structure de variété différentiable.

Exercice 2. Autour du cours.

1. On admet le théorème d'inversion locale "classique" entre ouverts de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Démontrer soigneusement la version générale suivante :

   Théorème. *Soient M et N deux variétés lisses, $f : M \to N$ une application C^∞ et $x \in M$ tel que l'application tangente $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ est bijective. Alors f est un difféomorphisme local au voisinage de x : il existe un ouvert U de M contenant x et un ouvert V de N contenant $f(x)$ tels que f induit un difféomorphisme de U vers V.*

2. Soient M_1 et M_2 deux variétés lisses et $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$. Décrire l'isomorphisme canonique entre $T_{(x_1,x_2)}(M_1 \times M_2)$ et $T_{x_1}M_1 \times T_{x_2}M_2$. (On pourra commencer par rappeler la définition de l'espace tangent à une variété en l'un de ses points.)

Exercice 3. Quotient(s) de l'hélicoïde. On note $\mathcal{H} := \{(t\cos\theta, t\sin\theta, \theta), (t, \theta) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$.

On suppose dorénavant $\mathcal{H}$ munie de la structure de variété lisse naturelle correspondante.

2. Donner une carte de $\mathcal{H}$ dont le domaine est $\mathcal{H}$ tout entier.
3. Vérifier que l'application $(k, (x, y, z)) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{H} \mapsto (x, y, z + k\pi)$ définit une action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{H}$ par difféomorphismes.
4. Vérifier que cette action est libre et proprement discontinue. Ceci munit l'espace quotient, noté $\mathcal{R}$, d'une structure de variété lisse.
5. Donner un atlas simple de cette variété, constitué de deux cartes.
6. Montrer que l'application $P : (x, y, z) \in \mathcal{H} \mapsto z \mod \pi \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ passe au quotient en une surjection lisse $p : \mathcal{R} \to \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.
   ($\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ désigne le quotient de $\mathbb{R}$ par l'action de $\mathbb{Z}$ définie par $(k, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \mapsto z + k\pi \in \mathbb{R}$, muni de la structure de variété naturelle correspondante, et $z \mod \pi$ désigne la classe d'équivalence / l'orbite d'un réel z par cette action.)
7. Expliquer succinctement comment munir $p^{-1}(\{\omega\})$, pour tout $\omega \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, d'une structure d'espace vectoriel de dimension 1 naturelle, de sorte que le triplet $(\mathcal{R}, \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}, p)$ constitue un fibré vectoriel de rang 1.
8. Ce fibré est-il trivialisable ? La variété $\mathcal{R}$ possède-t-elle un atlas à une seule carte ? (on se contentera d'arguments intuitifs).

Questions Bonus.

9. On reprend le travail précédent avec l'action définie cette fois-ci par $(k,(x,y,z)) \in \mathbb{Z}\times\mathcal{H} \mapsto (x,y,z+2k\pi)$, et on note $\mathcal{C}$ l'espace quotient et $p_2 : \mathcal{C} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ l'application induite par passage au quotient de $P_2 : (x,y,z) \mapsto z \mod 2\pi$. Montrer que le fibré obtenu est trivialisable. (On pourra se contenter de fournir une trivialisation sans tout détailler.)
10. La variété $\mathcal{C}$ possède-t-elle un atlas à une seule carte ?

Exercice 4. Décomposition de l'hypersphère. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{S}^n$ la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de son produit scalaire standard. On peut voir la sphère $\mathbb{S}^3$ comme le sous-ensemble $\{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1|^2+|z_2|^2=1\}$ de $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$. On considère l'application $f : (z_1,z_2) \in \mathbb{S}^3 \mapsto |z_1|^2 \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que f est lisse et est une submersion en tout point de $f^{-1}(]0,1[)$.
2. Les niveaux $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ sont-ils des sous-variétés lisses de $\mathbb{S}^3$?
3. Montrer que les niveaux réguliers non vides de f sont tous difféomorphes à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.