DM : Partiel 2016

Correction

Exercice 4.1) Soit $x \in \mathrm{Int}(A)$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$. Mais $x \in B(x,r)$ donc $x \in A$. Ainsi, $\mathrm{Int}(A) \subset A$.

2a) Pour tout $x \in]0,1[$, comme $]0,1[$ est un intervalle ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_{|\cdot|}(x,r) =]x-r, x+r[\subset]0,1[\subset [0,1[$. Donc $x \in \mathrm{Int}(A)$. Donc $]0,1[\subset \mathrm{Int}(A)$.

De plus, d'après la question précédente, $\mathrm{Int}(A) \subset [0,1[$. Et $0 \notin \mathrm{Int}(A)$ car pour tout $r > 0$, $B_{|\cdot|}(0,r) =]-r,r[$ contient $-r/2$ qui n'appartient pas $[0,1[$. Donc finalement $\mathrm{Int}(A) \subset [0,1[\setminus \{0\} =]0,1[$.

Ainsi, par double inclusion, $\mathrm{Int}(A) =]0,1[$.

2b) Comme ci-dessus, comme A est ouvert, $A \subset \mathrm{Int}(A)$, et d'aprs 1), $\mathrm{Int}(A) \subset A$, donc $\mathrm{Int}(A) = A$.

3) Soit $x \in \mathrm{Int}(A)$. Il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$. Montrons que $B(x,r) \subset \mathrm{Int}(A)$. Soit $y \in B(x,r)$. Comme $B(x,r)$ est ouvert, il existe $r' > 0$ tel que $B(y,r') \subset B(x,r) \subset A$, donc $y \in \mathrm{Int}(A)$. Donc $B(x,r) \subset \mathrm{Int}(A)$. Donc $\mathrm{Int}(A)$ est ouvert.