Licence de mathématiques (2016-2017)
Partiel "Topologie" (MAT303)
Novembre 2016
Durée : 2h

Sans calculatrice, ni document.
Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (6 points). *1) On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $||.||$.*
1a) Donner la définition d'un ouvert.
1b) Démontrer qu'une réunion quelconque d'ouverts $(O_i)_{i\in I}$ est ouverte.

2) On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme notée $||.||$.
2a) Donner la définition (avec des suites) d'un compact.
2b) Donner la définition d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ borné.
2c) Démontrer qu'un compact est borné.

3a) Donner la définition des normes usuelles $||.||_\infty$ et $||.||_2$ dans $\mathbb{R}^n$.
3b) Rappeler les propriétés d'une norme puis démontrer que $||.||_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
3c) Démontrer que les normes $||.||_\infty$ et $||.||_2$ dans $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes (on commencera par rappeler ce que cela signifie).

Exercice 2 (6 points). *On considère l'application linéaire f sur $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) est $A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*
1) Montrer que les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Cette base est-elle orthogonale ?
2) On note P la matrice de passsage de (e_1, e_2) à (v_1, v_2). Exprimer P puis calculer P^{-1}.
3) Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale notée D. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4) On pose $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = DU_n$. La suite (U_n) est-elle convergente dans $\mathbb{R}^2$? On pourra poser $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ où (x_n) et (y_n) sont des suites de réels.

Exercice 3 (4 points). *Les ensembles suivants sont-ils ouverts, fermés, compacts ? L'espace ambiant et la norme considérée sont précisés dans chaque cas.*

1) $A = \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue (Indication : Montrer que si une suite (u_n) d'entiers naturels converge dans $\mathbb{R}$, elle est constante à partir d'un certain rang).
2) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < y < 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $||.||_2$ (On pourra s'aider d'un dessin).

Exercice 4 (4 points)**.** *On munit* $\mathbb{R}^n$ *d'une norme* $||.||$*. On note* $B(x, R)$ *la boule ouverte de centre* x *et de rayon* R *pour la norme* $||.||$*. Si* A *est un sous ensemble de* $\mathbb{R}^n$*, on dit que* $x \in \mathbb{R}^n$ *est un point intérieur de* A *s'il existe* $R > 0$ *tel que* $B(x, R) \subset A$*. L'ensemble des points intérieurs de* A *s'appelle l'intérieur de* A *et se note* $Int(A)$*.*

1) Justifier que $Int(A) \subset A$*.*

2) On étudie dans cette partie deux exemples.
2a) Soit $\mathbb{R}$ *muni de la valeur absolue. Si* $A = [0, 1[$*, démontrer que* $int(A) =]0, 1[$*.*
2b) Soit $A = B(0, 1)$ *(la boule ouverte de centre* 0 *et de rayon* 1 *pour* $||.||$*). Démontrer que* $Int(A) = A$*.*

3) Démontrer que $Int(A)$ *est ouvert (On pourra s'inspirer de la question 2b).*