Licence de mathématiques (2017-2018)
Partiel "Topologie" (MAT303)
Octobre 2017
Durée : 2h
Sans calculatrice, ni document.
Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1. *(Questions de cours)[6 points]*
1) On se place dans $\mathbb{R}^2$. On notera (x, y) un vecteur de $\mathbb{R}^2$.
1a) Donner les définitions des normes $||.||_\infty$ et $||.||_1$.
1b) Démontrer que ces normes sont équivalentes (on commencera par rappeler ce que signifie que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$).
1c) On note B_∞ la boule ouverte de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 pour la norme $||.||_\infty$ et B_1 la boule ouverte de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 pour la norme $||.||_1$. Donner la définition des ensembles B_∞ et B_1, puis représenter ces deux boules sur un même dessin. Donner l'inclusion entre ces deux boules et la démontrer.

2) On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme N.
2a) Donner la caractérisation avec des suites d'un fermé de $\mathbb{R}^n$ muni de N.
2b) Donner la caractérisation avec des suites d'un compact de $\mathbb{R}^n$ muni de N.
2c) Déduire des questions précédentes qu'un compact de $\mathbb{R}^n$ est fermé (pour N).

Exercice 2 (6 points)**.** *Les ensembles suivant sont-ils ouverts, fermés, compacts ? On précisera avec soin les propriétés du cours utilisées.*

1) *$A = \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue.*

2) *$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; e^{x+y} > 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $||.||_\infty$.*

Exercice 3 (4 points)**.** *1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{3xy}{x^2 + 4y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.*
2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \dfrac{4xy^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Montrer que f est continue en $(0, 0)$.

Exercice 4 (4 points)**.** *Une distance d sur $\mathbb{R}^n$ est une application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui vérifie :*

(D1) *Pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$, $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.*

(D2) *Pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$, $d(x, y) = d(y, x)$.*

(D3) *Pour tous x, y, z dans $\mathbb{R}^n$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.*

1) Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. On pose $d_N(x, y) = N(x - y)$.
1a) Rappeler la définition d'une norme N sur $\mathbb{R}^n$.
1b) Démontrer que d_N est une distance sur $\mathbb{R}^n$ (c'est à dire vérifie (D1), (D2), (D3) en s'aidant de la question 1a).

2) On pose pour x, $y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, y) = 0$ sinon.
2a) Démontrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^n$ (c'est à dire vérifie (D1), (D2), (D3)).
2b) Montrer que cette distance d n'est pas associée à une norme N comme l'exemple de la question 1 (on pourra raisonner par l'absurde en supposant que $d = d_N$ et estimer $N(\lambda.x)$)