On revient à des notions déjà vues pour les espaces métriques et qu'on généralise facilement ici :

Définition. Soit (E, τ) un espace topologique et $A \subset E$.

- L'*intérieur* de A (dans (E, τ)), noté $\overset{\circ}{A}$, est le plus grand ouvert de (E, τ) inclus dans A.
- L'*adhérence* de A (dans (E, τ)), notée $\overline{A}$, est le plus petit fermé de (E, τ) contenant A.
- La *frontière* de A (dans (E, τ)), notée ∂A, est le sous-ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ de E.

Définition. Une partie d'un espace topologique (E, τ) est *dense* si son adhérence est E tout entier, ou de façon équivalente si elle intersecte tout ouvert non vide de (E, τ).

Exercice : On a, comme dans les espaces métriques, $E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$, $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}}$, $\partial A = \partial(E \setminus A)$, les caractérisations de $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$ et ∂A en termes de voisinages, les caractérisations des ouverts et fermés en termes d'intérieur et d'adhérence, le comportement de l'intérieur, de l'adhérence et de la frontière vis-à-vis de l'inclusion, de la réunion et de l'intersection.

En revanche, il faut se méfier des critères séquentiels (cf. paragraphe suivant).

2 Convergence et continuité

2.A Convergence

Définition. Soit (E, τ) un espace topologique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $a \in E$ si

$$\forall V \in \mathcal{V}(a),\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad x_n \in V.$$

Proposition. *Si (E, τ) est séparé, un tel a, s'il existe, est unique, appelé* limite *de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et noté $\lim_{n \to \infty} x_n$.*

Exercice :

1. Prouver la proposition (revoir la preuve dans le cas métrique).
2. Dans un espace topologique non séparé, cet énoncé est faux en général. Notamment, vérifier que pour la topologie grossière, *toute* suite converge vers *tout* élément de E.
3. Vérifier que, pour la topologie discrète, une suite converge si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.
4. Montrer qu'on obtient une définition équivalente si l'on remplace "$\forall V \in \mathcal{V}(a)$" par "pour tout V dans une *base de voisinages de a*".
5. Vérifier que, si $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de voisinages décroissante de a et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in V_n$, alors $(x_n)_n$ converge vers a.

Définition. Soit (E, τ) un espace topologique et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. On appelle *valeur d'adhérence de u* tout $a \in E$ tel que

$$\forall V \in \mathcal{V}(a),\ \#\{n \in \mathbb{N} : u_n \in V\} = +\infty$$

Exercice : L'ensembles des valeurs d'adhérence d'une suite u est toujours $\cap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_k, k \geq n\}}$.

Voyons maintenant quelques subtilités concernant les critères séquentiels.

Proposition. *Soit (E, τ) un espace topologique et $A \subset E$.* Si *A est fermé* alors *A est stable par passage à la limite, i.e. : si une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ converge vers a dans (E, τ), alors $a \in A$.*

La réciproque est fausse en général (Exercice : $(\mathbb{R}, \tau_{\text{coden}})$ fournit un contre-exemple : les suites convergentes dans cet espace sont les suites stationnaires, donc tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est stable par passage à la limite dans ce cas). Si elle est vraie, i.e. si les fermés de (E, τ) sont exactement les sous-ensembles stables par passage à la limite, on dit que l'espace est *séquentiel*. On a vu que les espaces métriques étaient séquentiels. C'est le cas plus généralement des espaces à bases dénombrables de voisinages :

Proposition. *Soit (E, τ) un espace topologique à bases dénombrables de voisinages. Alors tout sous-ensemble de E stable par passage à la limite est fermé.*

Démonstration. Exercice : adapter la preuve dans les espaces métriques. □

Voyons maintenant ce que devient la caractérisation séquentielle de l'adhérence, valable dans les espaces métriques, dans le cas d'espaces topologiques quelconques :

Proposition. *Soit (E, τ) un espace topologique et $A \subset E$.*

1. Si $x \in E$ *est limite d'une suite convergente* $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$, alors $x \in \overline{A}$.
2. Si $x \in \overline{A}$ et si x *a une base dénombrable de voisinages,* alors x *est limite d'une suite convergente* $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$.

On retrouve le fait que, dans les espaces métriques,

$$\overline{A} = \{\lim_{n\to\infty} x_n, (x_n) \in A^{\mathbb{N}} \text{ convergente}\}.$$

Exercice : Trouver un exemple où cette égalité n'est pas satisfaite dans $(\mathbb{R}, \tau_{\text{coden}})$.

Enfin, on a le même genre de subtilité avec les valeurs d'adhérence : étant donnée une suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace topologique (E, τ), si $a \in E$ est limite d'une sous-suite de x alors a est une valeur d'adhérence de x, mais la réciproque est fausse en général. Elle est vraie si a possède une base dénombrable de voisinages.

2.B Continuité

Définition. Soit $f : (E, \tau_E) \to (F, \tau_F)$ une application entre deux espaces topologiques.

1. f est *continue en* $a \in E$ si $\forall V \in \mathcal{V}(f(a))$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$.
2. f est *continue* si f est continue en tout point de E ou, de façon équivalente, si

$$\forall U \in \tau_F, \quad f^{-1}(U) \in \tau_E.$$

La preuve de l'équivalence dans 2. est la même que pour les espaces métriques. Notons que, comme $f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$ pour tout $A \subset F$, il est équivalent de demander que l'image réciproque de tout fermé est fermé.

Exercice :

1. Montrer que, si $f : (E, \tau_E) \to (F, \tau_F)$ est continue, pour tout $A \subset F$, $(\overset{\circ}{f^{-1}(A)}) \supset f^{-1}(\overset{\circ}{A})$ et $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$, et trouver des exemples où les inclusions sont strictes.
2. Montrer que si τ_E est la topologie discrète sur E ou si τ_F est la topologie grossière sur F alors toute application $f : (E, \tau_E) \to (F, \tau_F)$ est continue.
3. Montrer que si τ_E est la topologie grossière et si (F, τ_F) est séparé, les seules applications continues de (E, τ_E) dans (F, τ_F) sont les applications constantes.
4. Montrer que si τ_F est la topologie discrète, les applications continues de (E, τ_E) dans (F, τ_F) sont localement constantes.

5. Montrer qu'on peut remplacer, dans 1., $\forall V \in \mathcal{V}(f(a))$ par $\forall V \in$ une base de voisinages de $f(a)$ et dans 2. $\forall U \in \tau_F$ par $\forall U \in$ une base de la topologie τ_F.

Proposition. *Soit $f : (E, \tau_E) \to (F, \tau_F)$ une application, $A \subset E$ et τ_A la topologie induite par τ_E sur A. Si f est continue en tout point de A, alors l'application induite $f_{|A} : (A, \tau_A) \to (F, \tau_F)$ est continue. La réciproque est vraie si A est ouvert (mais pas en général).*

Pour un contre exemple, prendre simplement $E = F = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, $A = \mathbb{R}_+$ et f la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+$.

Ici encore, il faut prendre garde au critère séquentiel :

Proposition. *Si $f : (E, \tau_E) \to (F, \tau_F)$ est continue, alors elle est séquentiellement continue au sens où : pour tout $a \in E$, pour toute suite $(x_n)_n$ de E convergeant vers a, $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.*

La réciproque est vraie lorsque (E, τ_E) est à base dénombrable de voisinages.

La réciproque est fausse par exemple pour $(E, \tau_E) = (\mathbb{R}, \tau_{\text{coden}})$. En effet, toute application de $(\mathbb{R}, \tau_{\text{coden}})$ dans n'importe quoi est séquentiellement continue (Exercice), mais l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ par exemple n'est pas continue (Exercice).

Démonstration. Pour le sens direct, adapter la preuve de $\mathbb{R}$. Pour la réciproque, procédons par contraposée. Supposons que f n'est pas continue en un point $a \in E$. Alors il existe $V \in \mathcal{V}(f(a))$ tel que $f^{-1}(V) \notin \mathcal{V}(a)$, donc ne contient aucun V_n d'une base dénombrable décroissante $\{V_n\}_n$ de voisinages de a. Ainsi, pour tout n, il existe $u_n \in V_n \cap {}^c(f^{-1}(V))$. La suite ainsi construite converge vers a (cf. exo antérieur), mais quelque soit n, $f(u_n) \notin V$, donc $(f(u_n))_n$ ne converge pas vers $f(a)$, donc f n'est pas séquentiellement continue. $\square$