3 Fabriquer de nouvelles topologies

3.A Topologie produit

Définition. Soient (E_1, τ_1),...,(E_n, τ_n) des espaces topologiques. La *topologie produit* sur $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ associée à $\tau_1, \ldots, \tau_n$, est la topologie engrendrée par la famille des *rectangles ouverts* :

$$\mathcal{F} = \{U_1 \times \cdots \times U_n : U_1 \in \tau_1, \ldots, U_n \in \tau_n\}$$

(cette famille étant stable par intersection finie, elle forme en fait une *base*).

Exercice : Si τ_1,..., τ_n sont associées à des distances d_1,..., d_n, la topologie produit τ est la topologie τ_d associée à la distance produit d. Cette dernière ayant pour base l'ensemble $\mathcal{B}_d$ des boules

$$B_d(a = (a_1, \ldots, a_n), r) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in E : d(x, a) < r\} = B_{d_1}(a_1, r) \times \cdots \times B_{d_n}(a_n, r),$$

inclus dans la famille $\mathcal{F}$ de la définition ci-dessus, il suffit de montrer que tout élément de $\mathcal{F}$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}_d$.

On donne ci-dessous deux *caractérisations* de la topologie produit (qui pourraient donc servir de définition) :

Proposition. *Soient (E_1, τ_1),...,(E_n, τ_n) des espaces topologiques et τ une topologie sur $E = E_1 \times \cdots \times E_1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *τ est la topologie produit associée à $\tau_1, \ldots, \tau_n$;*
2. *τ est la topologie la moins fine telle que les projections $\pi_i : E = E_1 \times \cdots \times E_n \to E_i$ soient continues de (E, τ) dans (E_i, τ_i) ;*
3. *pour tout espace topologique (X, τ_X) et toute application $\phi : X \to E$, ϕ est continue de (X, τ_X) dans (E, τ) si et seulement si $\pi_i \circ \phi$ est continue de (X, τ_X) dans (E_i, τ_i). Pour montrer*

Ceci fait de la topologie produit un cas particulier de topologie *initiale* (cf. compléments).

Démonstration. ($1 \Leftrightarrow 2$) La topologie produit $\tau_\times$ rend les projections continues : pour tout U_i ouvert de (E_i, τ_i), $\pi_i^{-1}(U_i) = E_1 \times \cdots \times U_i \times \cdots \times E_n$ appartient à la famille $\mathcal{F}$ des rectangles ouverts donc à $\tau_\times$. Or toute autre topologie τ qui rend les projections continues contient tous les sous-ensembles de la forme ci-dessus, et leurs intersections finies, or tout élément de $\mathcal{F}$ est une telle intersection, donc τ contient $\mathcal{F}$, donc $\tau_\times$. La topologie produit est donc bien la topologie la moins fine (la plus petite) qui rende les projections continues.

($1 \Leftrightarrow 3$) Il s'agit de montrer que (i) la topologie produit a cette propriété, et que (ii) c'est la seule.

(i) soit (X, τ_X) et $\phi : X \to E$. Si ϕ est continue de (X, τ_X) dans (E, τ) alors par composition et d'après 2, $\pi_i \circ \phi$ est continue de (X, τ_X) dans (E_i, τ_i). Réciproquement, supposons que $\pi_i \circ \phi$ est continue de (X, τ_X) dans (E_i, τ_i). Il suffit de montrer que $\phi^{-1}(U)$ est un ouvert pour tout élément U d'une base de la topologie produit, i.e. pour tout rectangle ouvert $U_1 \times \cdots \times U_n$. Mais pour un tel U, $\phi^{-1}(U) = \cap_i (\pi_i \circ \phi)^{-1}(U_i)$, qui est ouvert comme intersection finie d'ouverts.

(ii) Exercice : vérifier que si τ vérifie 3, τ rend les projections continues (prendre $\phi = \mathrm{id}_E$), puis que si τ et τ' vérifient 3, id_E est continue de (E, τ) dans (E, τ') et réciproquement. (cf. notes manuscrites). □

Remarque. Exercice : Une suite $x : \mathbb{N} \to E = E_1 \times \cdots \times E_1$ converge pour la topologie produit si et seulement si ses composantes $\pi_i \circ x : \mathbb{N} \to E_i$ convergent pour τ_i.

Dans le cas d'un produit infini $E = \prod_{i\in I} E_i$, on *définit* la topologie produit par les propriétés caractéristiques ci-dessus. Attention, dans ce cas, elle a pour base non plus l'ensemble des *rectangles* ouverts mais l'ensemble des *cylindres* ouverts, i.e. l'ensemble des parties de E de la forme $\prod_{i\in I} U_i$ avec $U_i \in \tau_i$ toujours, mais $U_i = E_i$ sauf pour un nombre fini de i (Exercice).

Proposition. *Dans le cas d'un produit* dénombrable $E = \prod_{i\in\mathbb{N}} E_i$*, si les E_i sont métrisables, i.e. les τ_i sont associées à des distances d_i, la topologie produit l'est aussi, associée à la distance d définie par :*

$$\forall x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}, y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E = \prod_{i\in\mathbb{N}} E_i, \quad d(x,y) = \sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-i} \frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)}.$$

Démonstration. Exercice :

1. Vérifier que d définit bien une distance.
2. $\tau \subset \tau_d$: soit V un ouvert pour la topologie produit. On veut montrer qu'il est ouvert pour la distance d. Il suffit de prendre pour V un élément de la base, i.e. un cylindre, de la forme $U_1 \times \cdots \times U_n \times E_{n+1} \times \ldots$. *Indication :* Étant donné $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in E$ et $r \in]0, 2^{-n}[$,
$$B_d(x,r) \subset B_{d_0}(x_0, \tfrac{r}{1-r}) \times B_{d_1}(x_1, \tfrac{2r}{1-2r}) \times \cdots \times B_{d_1}(x_1, \tfrac{2^n r}{1-2^n r}) \times E_{n+1} \times \cdots .$$
3. Montrer que toute boule est un ouvert de la topologie produit.

(pour plus de détails, cf. notes manuscrites). □

Dans le cas d'un produit non dénombrable en revanche, même si chaque facteur est métrisable, la topologie produit ne l'est pas forcément. Contre-exemple : sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la topologie produit est celle de la convergence simple. Elle n'est pas à base dénombrable de voisinages, donc pas métrisable (cf. TD ou notes manuscrites).

En revanche, un produit (quelconque) d'espaces séparés est séparé (et inversement, si un produit est séparé, chaque facteur l'est). Exercice, ou notes manuscrites.

3.B Topologie quotient

But : Beaucoup d'espaces intéressants sont obtenus comme quotients d'autres espaces par une relation d'équivalence (appartenir à la même orbite d'une action de groupe par exemple ; c'est le cas du cercle, du tore, du ruban de Möbius, des espaces projectifs...). Étant donné un espace topologique (E, τ_E) et une relation $\mathcal{R}$ sur E, on peut penser l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ (ensemble des classes d'équivalences) comme l'ensemble E dont on aurait identifié entre eux tous les éléments d'une même classe, et on veut le munir d'une topologie qui formalise l'idée de "recoller (les éléments équivalents) sans déchirer". On note $\pi_{\mathcal{R}} : E \to E/\mathcal{R}$ la *projection canonique* qui à un élément de E associe sa classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$.

Commençons par un exemple : $E = [-1,1]$ (muni de la topologie usuelle) et $\mathcal{R}$ la plus petite relation d'équivalence telle que $-1\mathcal{R}1$. $E/\mathcal{R}$ est donc un segment dont on identifie les extrémités (et rien d'autre). Intuitivement, cela donne "un cercle". Précisons cette intuition : l'application $\varphi : x \in [-1,1] \mapsto e^{i\pi x} \in \mathbb{S}^1$ est surjective et passe au quotient en une application (toujours surjective) $\bar{x} \in [-1,1]/\mathcal{R} \mapsto e^{i\pi x} \in \mathbb{S}^1$ bien définie ($e^{i\pi x}$ ne dépend que de la classe déquivalence de x) et maintenant injective (Exercice), donc bijective. La *topologie quotient* sur $[-1,1]/\mathcal{R}$ fait en outre de cette bijection un *homéomorphisme*.

Définition. Soit (E, τ_E) un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation sur E. On définit la *topologie quotient* $\tau_{\mathcal{R}}$ sur $E/\mathcal{R}$ par
$$\tau_{\mathcal{R}} := \{U \subset E/\mathcal{R} : \pi_{\mathcal{R}}^{-1}(U) \in \tau_E\}.$$

Exercice : C'est une topologie.

Là encore, on a des *caractérisations* de cette topologie, qui peuvent a posteriori servir de définition :

Proposition. *Soit (E, τ_E) un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation sur E et τ une topologie sur $E/\mathcal{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *τ est la topologie quotient ;*
2. *τ est la topologie la plus fine telle que $\pi_{\mathcal{R}} : (E, \tau_E) \to (E/\mathcal{R}, \tau)$ soit continue ;*
3. *pour tout espace topologique (X, τ_X) et toute application $\bar{\varphi} : E/\mathcal{R} \to X$, $\bar{\varphi}$ est continue de $(E/\mathcal{R}, \tau) \to (X, \tau_X)$ si et seulement si $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi_{\mathcal{R}}$ est continue de $(E, \tau_E) \to (X, \tau_X)$ (autrement dit : une application du quotient dans un e.t. est continue si et seulement si elle est issue (par passage au quotient) d'une application continue de (E, τ_E)).*

Tout ceci fait de la topologie quotient un cas particulier de *topologie image* (cf. compléments).

Démonstration. (1 $\Leftrightarrow$ 2) La topologie quotient rend clairement $\pi_{\mathcal{R}}$ continue : pour tout ouvert $U \in \tau_{\mathcal{R}}$, $\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(U)$ est un ouvert de τ_E, par définition. Et si τ est une topologie qui rend $\pi_{\mathcal{R}}$ continue, tout ouvert U de τ doit satisfaire $\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(U) \in \tau_E$, i.e. appartenir à $\tau_{\mathcal{R}}$, donc $\tau \subset \tau_{\mathcal{R}}$, i.e. $\tau_{\mathcal{R}}$ est plus fine que τ.

(2 $\Leftrightarrow$ 3) Il s'agit de vérifier que (i) la topologie produit a cette propriété, et que (ii) c'est la seule.

(i) soit (X, τ_X) et $\bar{\phi} : E/\mathcal{R} \to X$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

— ϕ est continue de $(E/\mathcal{R}, \tau_{\mathcal{R}})$ dans (X, τ_X) ;

— pour tout $U \in \tau_X$, $\bar{\phi}^{-1}(U) \in \tau_{\mathcal{R}}$;

— pour tout $U \in \tau_X$, $\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(\bar{\phi}^{-1}(U)) \in \tau_E$;

— pour tout $U \in \tau_X$, $(\bar{\phi} \circ \pi_{\mathcal{R}})^{-1}(U) \in \tau_E$;

— $\bar{\phi} \circ \pi_{\mathcal{R}}$ est continue de $(E/\mathcal{R}, \tau) \to (X, \tau_X)$.

(ii) Exercice(similaire à la topologie produit).

□

Revenons à notre exemple : l'application $\varphi : x \in [-1, 1] \mapsto e^{i\pi x} \in \mathbb{S}^1$ est continue (pour les topologies usuelles) donc l'application induite $\bar{\varphi}$ est elle aussi continue. Reste à montrer que sa réciproque est continue, ce qui revient à montrer que l'image directe de tout ouvert U de $E/\mathcal{R}$ par $\bar{\varphi}$ est un ouvert de $\mathbb{S}^1$ (on dit que l'application $\bar{\varphi}$ est *ouverte*). Soit U un tel ouvert. Comme $\bar{\varphi}(U) = \varphi(\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(U))$ et que $\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathcal{R}$, il suffit de montrer que φ elle-même est ouverte, ce qu'on peut faire à la main.

Tout ceci est toutefois un peu pénible et il y a en fait des outils bien plus efficaces pour démontrer ce genre de choses. Notamment, on pourra montrer d'ici peu que $(E/\mathcal{R}, \tau_{\mathcal{R}})$ est compact, et que, dans le cadre des espaces topologiques encore, une bijection continue d'un espace compact dans un espace séparé est automatiquement un homéomorphisme.

On peut montrer de la même façon que si $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur la boule unité fermée euclidienne de $\mathbb{R}^n$ (munie de la topologie usuelle) ayant pour classes d'équivalence le bord de la boule d'une part et les singletons $\{x\}$, pour x appartenant à la boule unité ouverte d'autre part, l'espace quotient est homéomorphe à la sphère unité $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Dans le cas ci-dessus, le quotient est séparé. Mais ce n'est pas toujours le cas, même si l'espace de départ l'est. Nous allons en voir un exemple parmi les *quotients d'espaces topologiques par une action de groupe* : étant donné un e.t. (E, τ_E) et une action d'un groupe G sur E, on peut voir l'ensemble des orbites E/G de l'action comme l'ensemble $E/\mathcal{R}$ des classes d'équivalences de la relation $\mathcal{R}$ définie sur E par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists g \in G, y = g \cdot x,$$

et donc le munir de la topologie quotient associée. On s'intéresse en particulier aux actions *par homéomorphismes* au sens où pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto g \cdot x$ est un homéomorphisme de (X, τ_X). La projection dans ce cas est automatiquement ouverte. Mais il y a des actions plus "gentilles" que d'autres (on parle d'applications *propres*).

Une action "gentille" : l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ par translation : $k \cdot x = x + k$. L'espace quotient, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ensemble des classes de réels modulo $\mathbb{Z}$, est séparé. Mieux, on peut montrer, de façon similaire à notre premier exemple, qu'il est homéomorphe au cercle.

Une action "méchante" : l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ engendrée par une rotation "irrationnelle" :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{U} & \to & \mathbb{U} \\ (k, z) & \mapsto & R_{k\alpha}(z) = e^{ik\alpha} z \end{array}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Q}$. On peut montrer que l'ensemble $\mathbb{U}/\mathbb{Z}$ est non dénombrable et que la topologie quotient est la topologie grossière.

Il se produit des choses similaires (et plus variées) quand on regarde l'espace des orbites d'un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ par exemple.