6 Temps de vie des solutions

Les théorèmes d'existence de solution (Cauchy-Peano ou Cauchy-Lipschitz) ne donnent que l'existence de solution définies sur des petits intervalles de temps autour du temps t_0 de la condition initiale. On cherche maintenant à comprendre les solutions qui sont définies sur des grands intervalles de temps. L'idée principale est d'obtenir de grands intervalles de temps en recollant les solutions locales données par les théorèmes d'existence.

6.1 Solutions maximales

On se place sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz : f est une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ localement lipschitzienne en x. On fixe une condition initiale (t_0, x_0). Soit J la réunion de tous les intervalles I pour lesquels il existe $x : I \to \mathbb{R}^m$ qui est solution de l'ED $x' = f(t, x)$ avec $x(t_0) = x_0$.

Proposition 6.1. *Il existe une unique solution x vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$ et définie sur J. Toute autre solution vérifiant la même condition initiale est obtenue par restriction de x à un sous-intervalle I de J.*

La solution x fournie par cet énoncé s'appelle *solution maximale* pour la condition initiale (t_0, x_0). L'intervalle J est appelé *intervalle de vie* pour cette condition initiale.

Exemple. Partant de l'idée que le taux de reproduction est proportionnel au nombre de couples d'une population, on modélise l'évolution de cette population par l'ED $x' = x^2$.

Exercice 30.— Vérifier que la formule

$$x(t) = \frac{x_0}{x_0(t_0 - t) + 1}$$

est solution de l'ED avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$. En supposant $x_0 > 0$, donner son intervalle de définition $I(x_0)$. Quelle est la limite de $x(t)$ lorsque t tend vers la borne supérieure de cet intervalle ? En déduire que $I(x_0)$ est l'intervalle de vie, et en particulier qu'il n'existe pas de solution définie sur $\mathbb{R}$.

Preuve de la proposition. Viterbo, prop 4.1. □

Lemme. *(minoration locale du temps de vie) Pour toute condition initiale (t_0, x_0), il existe $\tau > 0$ tel que pour toute condition initiale (t_1, x_1) assez voisine de (t_0, x_0), la solution maximale est définie au moins sur $[t_1 - \tau, t_1 + \tau]$.*

Démonstration. Soient C un cylindre $[t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(x_0, r_0)$ inclus dans U, et M un majorant de $\|f\|$ sur C. Posons

$$\tau = \mathrm{Min}(\frac{T}{2}, \frac{r_0}{2M})$$

et considérons le voisinage $V =]t_0 - T/2, t_0 + T/2[\times B(x_0, r_0/2)$ de (t_0, x_0). Si (t_1, x_1) est une condition initiale dans V, alors le cylindre $C' = [t_1 - T/2, t_1 + T/2] \times$

$\bar{B}(x_1, r_0/2)$ est inclus dans C. Par suite la norme de f y est encore majorée par M, et comme $\tau \leq \min(T/2, r_0/2M)$, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous fournit une solution x vérifiant la condition initiale $x(t_1) = x_1$ et définie sur l'intervalle $[x_1 - \tau, x_1 + \tau]$. □

Corollaire 6.2. *(Phénomène d'explosion) L'obstruction à l'existence d'une solution globale est la sortie définitive de tout compact : .... En particulier, l'intervalle de vie est ouvert.*

(attention, deux sens pour "sortir de tout compact").

Démonstration. (Viterbo, 4.2). □

La preuve de la version faible est aussi intéressante (Demailly, chap V, 2.6).

6.2 Estimation de l'intervalle d'existence (I) : conditions géométriques

On considère ici une fonction $f : U \to \mathbb{R}^m$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^m$; on dit que cette fonction définit un *champs de vecteurs autonome*. Le champ est dit *complet* si toutes les solutions de l'ED $x' = f(x)$ sont définies sur $\mathbb{R}$. Commentaire : les dynamiciens étudient uniquement des champs complets. Le temps de vie intéresse plutôt ceux qui étudient des EDP (?)

Exercices : tout champs de vecteurs à support compact est complet. Un champs de vecteurs tangent aux sphères centrées en zéro ($X(x)$ orthogonal à x pour tout x) est complet : la fonction $\|x\|$ est constante le long du flot, ce qui empêche l'explosion. Généralisation : champs de vecteurs rentrant le long d'une hypersurface (Viterbo, prop 4.5, corollaire 4.6).

Trajectoires périodiques Soit x une solution non constante. Lorsqu'il existe $T > 0$ tel que $x(t_0 + T) = x(t_0)$, on dit que la trajectoire $t \mapsto x(t)$ est périodique. Le corollaire "phénomène d'explosion" implique :

Lemme 6.3. *Toute solution périodique est définie sur $\mathbb{R}$.*

L'ensemble des réels T satisfaisant $x(t_0 + T) = x(t_0)$ est alors un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$, si la solution n'est pas constante il est de la forme $T_0.\mathbb{Z}$ avec$T_0 > 0$, qui est appelé *période* de la solution.

Proposition 6.4. *(reparamétrage) Pour tout champ de vecteur autonome sur un ouvert U, il existe une fonction $f > 0$ telle que le champ $Y = f.X$ soit complet.*

Exercice : en utilisant le corollaire "phénomène d'explosion", montrer que les courbes intégrales (non périodiques) de $f.X$ sont des reparamétrage bijectifs de celles de X.

Exercice 31.—Preuve de la proposition L'idée de la preuve est de choisir f qui décroit assez vite lorsque x tend vers le bord de U, de façon à ce qu'une solution "mette un temps infini à atteindre le bord".

1. Montrer que si $X : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ est borné, alors les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$. Indication : combien de temps faut-il au minimum à une solution vérifiant $x(0) = 0$ pour s'échapper de la boule de rayon R ?

On suppose maintenant que Y est un champ de vecteurs autonomes.

2. Soit x une courbe intégrale qui n'est pas définie pour tout temps > 0. Montrer qu'il existe une suite de temps (t_n) telle que a) la suite $(x(t_n))$ tend vers un point x_∞ du bord de U, ou b) la suite $(\|x(t_n)\|)$ tend vers l'infini.

3. On suppose que le champ Y vérifie la condition de décroissance au bord suivante : pour tout x dans U,

$$\|Y(x)\| < \frac{1}{2}d(x, \partial U).$$

On considère une courbe intégrale x et une suite de temps (t_n) vérifiant la propriété (a). Montrer qu'il existe une autre suite de temps $(t'_n)_{n\geq n_0}$ telle que

1. $d(x(t'_n), \partial U) = \frac{1}{2^n}$,
2. $d(x(t), \partial U) \leq \frac{1}{2^n}$ pour tout $t \geq t'_n$.

Montrer que $t'_{n+1} \geq t'_n + 1$. Conclure que la solution est définie pour tout temps positif.

4. Terminer la preuve de la proposition.

Exercice 32.— Soit X un champ de vecteurs autonomes défini sur un ouvert U. Pour chaque $x_0 \in U$, on note $\tau^\pm(x_0)$ les temps de vie : la solution maximale vérifiant $x(0) = x_0$ est définie sur $]\tau^-(x_0), \tau^+(x_0)[$. Montrer que l'application $x \mapsto \tau^+(x)$ est semi-continue.

6.3 Estimation de l'intervalle d'existence (II) : conditions analytiques

Théorème 6.5. *(non explosion quand $X(x)$ croît au plus linéairement en x) Soit $X : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ vérifiant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz. On suppose, pour tout (t, x),*

$$\|X(t, x)\| \leq A \|x\| + B.$$

Alors les solutions maximales sont définies sur I.

On retrouve ainsi le fait que les solutions des EDO linéaires sont définies globalement. Typiquement, pas $x' = x^2$!

Corollaire 6.6. *Pour une EDO linéaire $x' = A(t)x + B(t)$, avec A, B définies et continues sur un intervalle I, on a existence et unicité, et les solutions maximales sont définies sur I tout entier.*

Démonstration. Une EDO linéaire satisfait automatiquement la condition de Lipschitz, et la condition de croissance au plus linéaire. □

Exercice 33.—(Preuve du théorème) On suppose dans un premier temps que $\|.\|$ est la norme euclidienne, et que x est une solution maximale telle que, pour tout $t \geq t_0$, $x(t) \neq 0$. On note $]a, b[$ l'intervalle de vie de cette solution.

1. Montrer que l'application $m : t \mapsto \|x(t)\|$ est dérivable sur $]t_0, b[$, et que $m'(t) \leq \|x'(t)\|$ pour tout t dans cet intervalle.

2. Montrer que sur l'intervalle $]t_0, b[$, la fonction m est majorée par la solution u de l'ED $u' = Au + B$. On pourra utiliser la première version du lemme des "sous-solutions" (voir la preuve du lemme de Gronwall).

3. En déduire que b est aussi la borne supérieure de l'intervalle I.

4. Démontrer le théorème dans le cas général.

Autres conditions analytiques : Queffelec-Zuily.