ÉCOLE POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

Journal de l'École polytechnique
Mathématiques

Huayi Chen

Inégalité d'indice de Hodge en géométrie et arithmétique: une approche probabiliste

Tome 3 (2016), p. 231-262.

<http://jep.cedram.org/item?id=JEP_2016__3__231_0>

Journal de l'École polytechnique
Mathématiques
Tome 3, 2016, p. 231–262 DOI: 10.5802/jep.33

INÉGALITÉ D'INDICE DE HODGE EN GÉOMÉTRIE ET ARITHMÉTIQUE : UNE APPROCHE PROBABILISTE

par Huayi Chen

Résumé. — En utilisant l'approche probabiliste en géométrie arithmétique, nous donnons une nouvelle démonstration de l'inégalité d'indice de Hodge pour les $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques, et nous proposons une nouvelle voie pour sa généralisation au cas de dimension supérieure.

Abstract (Hodge index inequality in geometry and arithmetic : a probabilistic approach)
By using the probabilistic approach in arithmetic geometry, one gives a new proof of the Hodge index inequality for adelic $\mathbb{R}$-divisors, and proposes a new way of generalizing it to higher dimensional case.

Table des matières

Introduction

L'inégalité d'indice de Hodge, qui prédit la signature de la forme quadratique induite par le produit d'intersection sur le groupe de Picard d'une surface projective, est un résultat fondamental de la géométrie algébrique. L'analogue de ce théorème en géométrie arithmétique a été démontré par Faltings [15] et Hriljac [20], puis par Moriwaki [27] dans le cas de dimension supérieure, et adapté dans le cadre adélique par Yuan et Zhang [39]. La version arithmétique du résultat est étroitement liée à

Classification mathématique par sujets (2010). — 14G40, 11G30.
Mots-clefs. — Inégalité d'indice de Hodge, géométrie d'Arakelov, diviseur adélique, corps d'Okounkov, système linéaire gradué, $\mathbb{R}$-filtration.

Ce travail a été partiellement soutenu par les fonds de recherche ANR-14-CE25-0015 et NSFC11271021.

la conjecture standard arithmétique. On renvoie les lecteurs à [23, 27] pour plus de détails, voir aussi [4] pour une application de l'inégalité d'indice de Hodge aux théorèmes de Lefschetz arithmétiques sur une surface arithmétique. Dans la littérature, de nombreuses démonstrations du théorème d'indice de Hodge ont été proposées, dont la plupart font intervenir le théorème de Riemann-Roch. La version arithmétique du théorème à la Faltings et Hriljac utilise en outre le plongement de la surface arithmétique – qui est une courbe projective sur un corps de nombres – dans sa jacobienne, ainsi que la hauteur de Néron-Tate.

Les nombres d'intersection en géométrie algébrique sont analogues aux volumes mixes en géométrie convexe. En particulier, le théorème d'indice de Hodge peut être interprété comme une conséquence de l'inégalité de Brunn-Minkowski pour la fonction volume. Cette analogie est rendue encore plus claire par la théorie des corps d'Okounkov établie par plusieurs auteurs comme Okounkov [29], Lazarsfeld et Mustaţă [25], Kaveh et Khovanskii [22]. Dans le cadre de la géométrie d'Arakelov, deux analogues arithmétiques des corps d'Okounkov ont été proposés. L'approche de Yuan [37] repose sur la construction de corps d'Okounkov par rapport à la fibre de la variété au-dessus d'une place finie ; tandis que celle de [7, 5] utilise les $\mathbb{R}$-filtrations pour ramener le problème arithmétique à une famille de problèmes géométriques sur la fibre générique de la variété arithmétique.

Dans la littérature, les résultats obtenus par les corps d'Okounkov arithmétiques, comme par exemple l'inégalité de Brunn-Minkowski et l'approximation de Fujita arithmétiques, présentent une forme similaire aux résultats classiques. Cependant, la structure relative (à une courbe arithmétique) des variétés arithmétiques fournit plus d'information géométrique et devrait conduire à des résultats plus fins. Le but de cet article est d'expliquer ce phénomène par une démonstration élémentaire d'une version relative du théorème d'indice de Hodge dans les cadres géométrique et arithmétique, dont la version arithmétique est équivalente au théorème de Faltings-Hriljac. On démontrera en fait une inégalité de nature probabiliste dans un cadre très général de systèmes linéaires gradués filtrés (cf. théorème 3.3). Cette inégalité est valable en toute dimension, et indique une nouvelle voie pour la généralisation de l'inégalité d'indice de Hodge au cas de dimension supérieure.

Pour rendre la présentation des résultats et de la méthode plus claire, on se place d'abord dans le cadre géométrique et de dimension relative 1, où on considère une surface projective S sur un corps de base k, munie d'un k-morphisme projectif et plat π vers une courbe projective régulière C sur $\operatorname{Spec} k$. Rappelons qu'une version classique de l'inégalité d'indice de Hodge prédit que, si L et M sont deux fibrés inversibles amples sur S, alors la relation

$$\deg(c_1(L)c_1(M))^2 \geqslant \deg(c_1(L)^2) \cdot \deg(c_1(M)^2), \tag{1}$$

est satisfaite. On peut réécrire cette inégalité sous la forme

$$\operatorname{vol}(L \otimes M) \geqslant (\operatorname{vol}(L)^{1/2} + \operatorname{vol}(M)^{1/2})^2, \tag{2}$$

où le *volume* d'un fibré inversible A sur S est défini par

$$\operatorname{vol}(A) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{rg}_k(H^0(S, A^{\otimes n}))}{n^2/2},$$

qui est égal au nombre d'auto-intersection $c_1(A)^2$ lorsque A est ample – c'est une conséquence du théorème de Riemann-Roch asymptotique et du théorème d'annihilation de Serre (voir [24, Cor. 1.4.41] pour une démonstration). La formule (2), qui est appelée *inégalité de Brunn-Minkowski*, est valable dans le cas plus général où les fibrés inversibles L et M sont *gros*, c'est-à-dire de volume strictement positif.

Remarquons que l'information du k-morphisme $\pi : S \to C$ n'est utilisée ni dans l'inégalité d'indice de Hodge (1) ni dans l'inégalité de Brunn-Minkowski (2). Avec cette structure supplémentaire, on établit dans cet article des inégalités plus fines que l'inégalité (1), qui prennent en compte de la structure relative de π. Plus précisément, on introduit un nouvel invariant $\operatorname{vol}_\chi^\pi(\cdot)$ relativement à π pour les fibrés inversibles dont les fibres génériques sont amples. Si L est un $\mathscr{O}_S$-module inversible, alors le faisceau image direct $\pi_*(L)$ est un fibré vectoriel sur C. Dans le cas où la restriction de L à la fibre générique de π est ample, on définit

$$\operatorname{vol}_\chi^\pi(L) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\chi(\pi_*(L^{\otimes n}))}{n^2/2}, \tag{3}$$

où $\chi(\cdot)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré, qui est définie sur l'ensemble des fibrés vectoriels sur C. La limite supérieure dans la définition est en fait une limite (cf. la proposition 4.4). C'est un invariant géométrique qui généralise naturellement le nombre d'auto-intersection des faisceaux inversibles amples (voir [38, § 8.2] pour l'avatar de cet invariant dans le cadre arithmétique). En effet, si L est un $\mathscr{O}_S$-module inversible ample, alors pour tout entier n suffisamment positif, $\pi_*(L^{\otimes n})$ est de pente minimale strictement positive. Cela peut être considéré comme un analogue dans le cadre des corps de fonctions d'un résultat de Zhang [40, Th. 4.2]. Le théorème de Riemann-Roch pour la courbe C conduit donc à la relation suivante

$$\operatorname{vol}_\chi^\pi(L) = \operatorname{vol}(L) = c_1(L)^2, \tag{4}$$

en utilisant [9, Lem. 2.2] pour comparer le degré et la dimension de l'espace des sections globales d'un fibré vectoriel sur C sous la condition que la pente minimale du fibré vectoriel est strictement positive. En outre, si L est un fibré inversible sur S, on désigne par $d_\pi(L)$ le degré du tiré en arrière de L sur la normalisation de la fibre générique de S relativement au morphisme π. L'entier $d_\pi(L)$ est appelé le *degré générique* de L relativement au morphisme π. L'application $d_\pi(\cdot)$ définit en fait un morphisme de groupes de $\operatorname{Pic}(S)$ vers $\mathbb{Z}$. Dans le cas où $d_\pi(L) > 0$, la restriction de L à la fibre générique est ample, et on a $d_\pi(L) = \deg(c_1(L|_{S_\eta})) = \operatorname{vol}(L|_{S_\eta})$, où η désigne le point générique de C. On établira dans cet article le résultat suivant (voir le théorème 4.7 *infra*).

Théorème 0.1. — *Soient k un corps et $\pi : S \to C$ un k-morphisme projectif et plat d'une surface S sur k vers une courbe projective régulière C sur k. Si L et M sont* *deux fibrés inversibles sur S dont les degrés génériques sont strictement positif, alors on a*

$$\frac{\mathrm{vol}_\chi^\pi(L\otimes M)}{d_\pi(L)+d_\pi(M)} \geqslant \frac{\mathrm{vol}_\chi^\pi(L)}{d_\pi(L)}+\frac{\mathrm{vol}_\chi^\pi(M)}{d_\pi(M)}. \tag{5}$$

En utilisant la relation (4), on déduit du théorème 0.1 le résultat suivant, qui implique l'inégalité d'indice de Hodge (1) via l'inégalité arithmético-géométrique.

Corollaire 0.2. — *Avec les notations du théorème* 0.1*, si L et M sont deux fibrés inversibles amples sur S, alors on a*

$$2\deg(c_1(L)c_1(M)) \geqslant \frac{d_\pi(M)}{d_\pi(L)}\deg(c_1(L)^2)+\frac{d_\pi(L)}{d_\pi(M)}\deg(c_1(M)^2). \tag{6}$$

Pour tout fibré inversible gros L sur S, on définit $d_\pi^+(L)$ comme la borne supérieure des $d_\pi(A)$, où A est un élément du groupe de Picard à coefficients dans $\mathbb{Q}$ d'une modification birationnelle S' de S tel que A soit ample et que $\nu^*(L)-A$ soit effectif, où $\nu : S'\to S$ désigne le morphisme structurel, qui est projectif et birationnel. On obtient alors du théorème précédent, en utilisant le théorème d'approximation de Fujita [16, 34], le résultat suivant.

Corollaire 0.3. — *Avec les notations du théorème* 0.1*, si L et M sont deux fibrés inversibles gros sur S, alors on a*

$$\frac{\mathrm{vol}(L\otimes M)}{d_\pi^+(L)+d_\pi^+(M)} \geqslant \frac{\mathrm{vol}(L)}{d_\pi^+(L)}+\frac{\mathrm{vol}(M)}{d_\pi^+(M)}. \tag{7}$$

Une fois encore on peut déduire facilement de (7) l'inégalité de Brunn-Minkowski. De façon similaire, l'inégalité (6) conduit à une forme forte d'inégalité isopérimétrique sous la forme d'une minoration du produit d'intersection positif.

L'inégalité (6) peut être démontrée directement en utilisant un analogue dans le cadre de la géométrie arithmétique sur les corps de fonctions du théorème de Faltings-Hriljac (cf. la remarque 4.10). La méthode de démonstration adoptée ici, qui fait intervenir la corrélation de variables aléatoires à valeurs dans des corps convexes, fait partie des nouveautés introduites dans cet article. Elle donne aussi de nouvelles idées pour généraliser l'inégalité (5) au cas de dimension supérieure. En effet, en utilisant l'approche probabiliste en géométrie arithmétique développée dans [8], à tout fibré inversible L sur S tel que $d_\pi(L)>0$, on peut attacher une fonction continue $G_L^\pi(\cdot)$ sur le corps d'Okounkov $\Delta(L_\eta)$ de la fibre générique de L (qui est égale à $[0,d_\pi(L)]$ puisque S_η est une courbe). Le quotient $\mathrm{vol}_\chi^\pi(L)/d_\pi(L)$ peut alors être interprété comme une espérance $\mathbb{E}[G_L^\pi(Z_L^\pi)]$, où Z_L^π est une variable aléatoire à valeurs dans $\Delta(L_\eta)=[0,d_\pi(L)]$, qui est uniformément distribuée. Il s'avère que la relation de sur-additivité

$$\forall\,(x,y)\in\Delta(L_\eta)\times\Delta(M_\eta),\quad G_{L\otimes M}^\pi(x+y)\geqslant G_L^\pi(x)+G_M^\pi(y)$$

est satisfaite. Le point clé de la démonstration du théorème 0.1 consiste à construire une structure de corrélation entre les variables aléatoires Z_L^π et Z_M^π, de telle sorte que $Z_L^\pi + Z_M^\pi$ soit uniformément distribuée (cela est toujours possible dans le cas de dimension 1, cf. la proposition 2.5). Ainsi $Z_L^\pi + Z_M^\pi$ a la même loi que $Z_{L\otimes M}^\pi$. L'inégalité (5) résulte donc de la relation

$$\mathbb{E}[G_{L\otimes M}^\pi(Z_L^\pi + Z_M^\pi)] \geqslant \mathbb{E}[G_L^\pi(Z_L^\pi) + G_M^\pi(Z_M^\pi)] = \mathbb{E}[G_L^\pi(Z_L^\pi)] + \mathbb{E}[G_M^\pi(Z_M^\pi)].$$

En s'appuyant sur cette idée, on introduit un cadre probabiliste pour les corps convexes et on établit un théorème d'indice de Hodge abstrait dans la deuxième section (voir le théorème 2.3 *infra*).

Théorème 0.4. — *Soient Δ_1 et Δ_2 deux corps convexes dans $\mathbb{R}^d$, G_1, G_2 et G trois fonctions mesurables sur Δ_1, Δ_2 et $\Delta_1+\Delta_2$ respectivement, qui sont bornées supérieurement. On suppose que la fonction G est positive et que, pour tout $(x,y)\in\Delta_1\times\Delta_2$, l'inégalité $G(x+y)\geqslant G_1(x)+G_2(y)$ est satisfaite. Alors on a*

$$\frac{\int_{\Delta_1+\Delta_2} G(x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{vol}_d(\Delta_1+\Delta_2)} \geqslant \rho(\Delta_1,\Delta_2)^{-1}\left(\frac{\int_{\Delta_1} G_1(x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{vol}_d(\Delta_1)} + \frac{\int_{\Delta_2} G_2(x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{vol}_d(\Delta_2)}\right), \tag{8}$$

où $\rho(\Delta_1,\Delta_2)$ est l'indice de corrélation défini au paragraphe 2.1, *et vol_d désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.*

Dans le théorème, la constante $\rho(\Delta_1,\Delta_2)$ mesure la différence minimale entre la loi de la somme de deux variables aléatoires uniformément distribuées dans Δ_1 et Δ_2 respectivement, et la loi uniforme sur la somme de Minkowski $\Delta_1+\Delta_2$.

Dans la troisième section, on applique le théorème 0.4 aux systèmes linéaires gradués filtrés pour obtenir une version géométrique de l'inégalité (8) (voir le théorème 3.3 *infra*). C'est dans la quatrième et dernière section que l'on établit l'inégalité d'indice de Hodge arithmétique pour les $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques et une généralisation au cas de dimension supérieure (cf. les théorèmes 4.12 et 4.16).

Théorème 0.5. — *Soient K un corps de nombres et X un schéma projectif et intègre sur* $\operatorname{Spec} K$. *Soient $\overline{D}$ et $\overline{E}$ deux $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques sur X tels que D et E soient des $\mathbb{R}$-diviseurs gros.*

(1) *On suppose que X est une courbe ou les classes d'équivalence linéaire de D et E sont colinéaires. Alors*

$$\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{D}+\overline{E})}{\mathrm{vol}(D+E)} \geqslant \frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{D})}{\mathrm{vol}(D)} + \frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{E})}{\mathrm{vol}(E)}.$$

(2) *On suppose que $\overline{D}$ et $\overline{E}$ sont gros. Alors on a*

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{D}+\overline{E}) \geqslant \frac{d!\,\mathrm{vol}_d(\Delta_+(\overline{D})+\Delta_+(\overline{E}))}{\rho(\Delta_+(\overline{D}),\Delta_+(\overline{E}))}\Big(\frac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{D})}{\mathrm{vol}_+(\overline{D})} + \frac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{E})}{\mathrm{vol}_+(\overline{E})}\Big).$$

Dans l'énoncé du théorème, $\widehat{\mathrm{vol}}$ et $\widehat{\mathrm{vol}}_\chi$ sont respectivement les fonctions de volume et χ-volume arithmétiques, et Δ_+ désigne l'opérateur de corps d'Okounkov pour la partie positive de $\mathbb{R}$-diviseur adélique (cf. §4.4 pour ces notations).

Comme conséquence, on obtient le résultat suivant, dont le deuxième énoncé est le théorème de Faltings-Hriljac.

Corollaire 0.6. — *Soient K un corps de nombres et X un schéma projectif et intègre sur* $\operatorname{Spec} K$*. Soit $\overline{P}$ un $\mathbb{R}$-diviseur adélique intégrable sur X.*

(1) *On suppose que P est un $\mathbb{R}$-diviseur principal. Si $\overline{E}$ est un $\mathbb{R}$-diviseur adélique sur X tel que $\overline{E}$ et $\overline{E}+\overline{P}$ soient tous relativement numériquement effectifs, alors on a*

$$\sum_{i=2}^{d+1}\binom{d+1}{i}\widehat{\deg}(\overline{P}^i\cdot\overline{E}^{d+1-i})\leqslant 0,$$

où d est la dimension du schéma X.

(2) *On suppose que X est une courbe. Si $\overline{P}$ est relativement numériquement effectif et si* $\deg(P)=0$*, alors on a* $\widehat{\deg}(\overline{P}^2)\leqslant 0$.

Ces résultats indiquent une nouvelle voie dans l'étude des invariants arithmétiques et ouvrent des perspectives de recherche résumées à la fin de l'article.

Remerciements. — Je voudrais remercier Omid Amini, Jean-Benoît Bost, Sébastien Boucksom, Walter Gubler, June Huh, Klaus Künnemann, Raphaël Rossignol, David Witt Nyström pour des échanges scientifiques sur le sujet discuté dans cet article. Une partie du travail de rédaction a été faite pendant ma visite à Beijing International Center for Mathematical Research. Je suis reconnaissant au centre pour son hospitalité. Enfin, je tiens à remercier les rapporteurs pour leur lecture soigneuse du manuscrit et pour leurs nombreuses suggestions qui m'ont aidé à améliorer la rédaction de l'article.

1. Notions et rappels

1.1. Corps convexes. — Soit $d\geqslant 1$ un entier. Par *corps convexe* dans $\mathbb{R}^d$, on entend un sous-ensemble convexe et compact Δ de $\mathbb{R}^d$ dont l'intérieur est non vide. Si Δ_1 et Δ_2 sont deux corps convexes dans $\mathbb{R}^d$, leur *somme de Minkowski* est définie comme le sous-ensemble

$$\Delta_1+\Delta_2=\{x+y\,:\,x\in\Delta_1,\ y\in\Delta_2\}$$

de $\mathbb{R}^d$. C'est aussi un corps convexe dans $\mathbb{R}^d$. On désigne par $\mathscr{C}_d$ l'ensemble des corps convexes dans $\mathbb{R}^d$.

1.2. Systèmes linéaires gradués. — Soient K un corps et X un schéma projectif et intègre sur $\operatorname{Spec} K$. Soit $K(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X. On entend par *système linéaire* de X tout sous-espace K-vectoriel de rang fini de $K(X)$. Par exemple, si D est un diviseur de Cartier sur X (ou plus généralement un $\mathbb{Q}$-diviseur ou un $\mathbb{R}$-diviseur sur X), alors l'espace vectoriel $H^0(D)$ défini par

$$H^0(D):=\{f\in K(X)^{\times}\mid D+\operatorname{div}(f)\geqslant 0\}\cup\{0\}$$

est un système linéaire de X.

On appelle *système linéaire gradué* de X toute sous-K-algèbre graduée $V_\bullet$ de $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}K(X)$ (vue comme une algèbre de polynôme à coefficients dans $K(X)$) telle que V_n soit un système linéaire de X pour tout $n\in\mathbb{N}$. On dit qu'un système linéaire gradué $V_\bullet$ de X est *de type fini* s'il est une K-algèbre de type fini. En particulier, si D est un diviseur de Cartier (resp. $\mathbb{Q}$-diviseur, $\mathbb{R}$-diviseur) sur X, alors

$$V_\bullet(D) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^0(nD)$$

est un système linéaire gradué de X, appelé le *système linéaire gradué total* de D. Il est de type fini lorsque D est un diviseur de Cartier ample.

Soit $V_\bullet$ un système linéaire gradué de X. On appelle *sous-système linéaire gradué* de $V_\bullet$ toute sous-K-algèbre graduée de $V_\bullet$. On dit qu'un système linéaire gradué $V_\bullet$ de X *contient un $\mathbb{Q}$-diviseur ample* s'il existe un $\mathbb{Q}$-diviseur ample A tel que $H^0(nA) \subset V_n$ pour n suffisamment positif. Cela revient à dire que $V_n \neq \{0\}$ pour n suffisamment positif et il existe un diviseur de Cartier ample A et un entier $p \geqslant 1$ tels que $H^0(nA) \subset V_{pn}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ (cf. [25, Déf. 2.9]).

On renvoie les lecteurs au livre de Lazarsfeld [24] pour une présentation détaillée sur les diviseurs et leurs systèmes linéaires (gradués).

1.3. Fonction volume. — Soient $d \geqslant 1$ un entier et X un schéma projectif et intègre de dimension d sur un corps K. Si $V_\bullet$ est un système linéaire gradué de X, on définit le *volume* de $V_\bullet$ par

$$\mathrm{vol}(V_\bullet) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{rg}_K(V_n)}{n^d/d!} \in [0, +\infty].$$

Si $V_\bullet$ est le système linéaire gradué total d'un diviseur de Cartier (resp. $\mathbb{Q}$-diviseur, $\mathbb{R}$-diviseur) D, son volume est noté $\mathrm{vol}(D)$, et D est dit *gros* lorsque $\mathrm{vol}(D) > 0$. La fonction $D \mapsto \mathrm{vol}(D)$ est invariante sous l'équivalence numérique et induit une fonction sur l'espace vectoriel de Néron-Severi $N^1(X)_\mathbb{R}$ (cf. [24, Cor. 2.2.45]). En outre, si D est numériquement effectif, alors $\mathrm{vol}(D)$ est égal au nombre d'auto-intersection $\deg(D^d)$ (cf. [24, Cor. 1.4.41]). En particulier, si $V_\bullet$ contient un $\mathbb{Q}$-diviseur ample, alors on a $\mathrm{vol}(V_\bullet) > 0$; si $V_\bullet$ est un sous-système linéaire gradué d'un système linéaire gradué de type fini, alors on a $\mathrm{vol}(V_\bullet) < +\infty$. Enfin, si D est gros, alors son système linéaire gradué total $V_\bullet(D)$ contient un $\mathbb{Q}$-diviseur ample.

Soient L un $\mathscr{O}_X$-module inversible, s_0 une section rationnelle non nulle de L, et $D = \mathrm{div}(s_0)$ le diviseur de Cartier associé à s_0. Alors l'application de $H^0(D)$ vers $H^0(X, L)$ qui envoie $f \in H^0(D)$ sur fs_0 est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur K. En outre, on a un isomorphisme de K-algèbres graduées de $V_\bullet(D)$ vers $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^0(X, L^{\otimes n})$ qui envoie $f \in H^0(nD)$ sur $fs_0^{\otimes n}$. On définit le *volume* de L par

$$\mathrm{vol}(L) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{rg}_K(H^0(X, L^{\otimes n}))}{n^d/d!},$$

qui est égal au volume de D. Le $\mathscr{O}_X$-module inversible L est dit *gros* si $\mathrm{vol}(L) > 0$.

1.4. Corps d'Okounkov. — Soient $d \geqslant 1$ un entier et X un schéma projectif et intègre sur un corps K. On désigne par $\mathscr{S}(X)$ l'ensemble des systèmes linéaires gradués $V_\bullet$ de X qui sont des sous-systèmes linéaires gradués d'un système linéaire gradué de type fini (cela revient à dire que $V_\bullet$ est un système linéaire gradué d'un diviseur de Cartier), et qui contiennent un $\mathbb{Q}$-diviseur ample. On peut montrer que, si $V_\bullet$ et $W_\bullet$ sont deux systèmes linéaires gradués dans $\mathscr{S}(X)$, alors $V_\bullet \cdot W_\bullet := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n \cdot W_n$ appartient à $\mathscr{S}(X)$ aussi, où $V_n \cdot W_n$ désigne le sous-espace k-vectoriel de $K(X)$ engendré par les fonctions rationnelles de la forme fg avec $f \in V_n$ et $g \in W_n$.

La construction des corps d'Okounkov consiste en une application Δ de l'ensemble $\mathscr{S}(X)$ vers l'ensemble $\mathscr{C}_d$ des corps convexes dans $\mathbb{R}^d$, qui satisfait aux propriétés suivantes :

(a) pour tout système linéaire gradué $V_\bullet \in \mathscr{S}(X)$, $\mathrm{vol}(V_\bullet) = d!\,\mathrm{vol}_d(\Delta(V_\bullet))$, où vol_d désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$;

(b) si $V_\bullet$ est un système linéaire gradué de X et si m est un entier, $m \geqslant 1$, alors on a $\Delta(V_\bullet^{(m)}) = m\Delta(V_\bullet)$, où $V_\bullet^{(m)} := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_{nm}$;

(c) si $V_\bullet$ et $W_\bullet$ sont deux systèmes linéaires gradués dans $\mathscr{S}(X)$ tels que $V_\bullet$ soit un sous-système linéaire gradué de $W_\bullet$, alors on a $\Delta(V_\bullet) \subset \Delta(W_\bullet)$;

(d) si $V_\bullet$ et $W_\bullet$ sont deux systèmes linéaires gradués dans $\mathscr{S}(X)$, alors on a $\Delta(V_\bullet) + \Delta(W_\bullet) \subset \Delta(V_\bullet \cdot W_\bullet)$.

L'existence d'une telle application Δ a été démontrée par Kaveh et Khovanskii [22], et Lazarsfeld et Mustaţă [25] respectivement. Elle n'est cependant pas unique et sa définition dépend de différents choix non intrinsèques selon les auteurs. Par exemple, la construction de Lazarsfeld et Mustaţă dépend du choix d'un drapeau de sous-schémas fermés intègres passant par un point régulier, dont les idéaux forment une suite régulière de l'anneau local de X en ce point régulier ; celle de Kaveh et Khovanskii repose sur le choix d'une relation d'ordre monomiale sur $\mathbb{N}^d$ et d'une valuation de $K(X)$ à valeurs dans $\mathbb{N}^d$. Ces choix imposent au k-schéma d'être géométriquement intègre. Cette condition peut cependant être omise, en utilisant des techniques de multiplicités locales. On renvoie les lecteurs à [11] pour les détails.

1.5. Langage probabiliste. — Dans cet article, on utilise le langage de la théorie des probabilités (variable aléatoire, espérance etc.). On fixe un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$ et on suppose que toutes les variables aléatoires dans l'article sont définies sur cet espace de probabilité. On s'intéresse surtout aux lois des variables aléatoires à valeurs dans des corps convexes ou, de façon équivalente, à des mesures de probabilités boréliennes sur des corps convexes. L'utilisation du langage probabiliste sert à simplifier les arguments et à rendre les démonstrations plus claires.

Soit $d \geqslant 0$ un entier. On rappelle qu'une *variable aléatoire* à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est par définition une application mesurable de Ω vers $\mathbb{R}^d$, où on considère la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$. Étant donnée une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, sa *loi de probabilité* ν_Z est définie comme l'image directe de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ par Z. En d'autres termes, pour toute fonction borélienne bornée f sur $\mathbb{R}^d$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\nu_Z(dx) = \mathbb{E}[f(Z)].$$

On dit aussi que Z *suit la loi de probabilité* ν_Z. Si la mesure ν_Z est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue vol_d, on dit que la loi de probabilité de Z *admet une densité*. La dérivée de Radon-Nikodym de ν_Z par rapport à vol_d est appelée la *densité* de Z.

Soit $Z = (Z_1, Z_2)$ un couple de variables aléatoires qui sont toutes deux à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Les lois de probabilités de Z_1 et Z_2 sont appelées *lois marginales* de Z. Si on considère Z comme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^{2d}$, sa loi de probabilité est appelée la *loi jointe* du couple (Z_1, Z_2).

On suppose que l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{G}, \mathbb{P})$ est assez grand pour modéliser toutes les mesures de probabilité boréliennes sur les espaces vectoriels de rang fini. Autrement dit, on suppose que, pour tout entier $d \geqslant 1$ et toute mesure de probabilité borélienne ν sur $\mathbb{R}^d$, il existe une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ dont la loi de probabilité s'identifie à ν. En particulier, si μ et ν sont des mesures de probabilités boréliennes sur $\mathbb{R}^d$, pour toute mesure de probabilité borélienne λ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ dont les deux projections sont μ et ν respectivement, il existe un couples de variables aléatoires $Z = (Z_1, Z_2)$ dont la loi jointe est λ (les deux lois marginales du couple Z sont donc μ et ν respectivement).

Soient $d \geqslant 1$ un entier et Δ un corps convexe dans $\mathbb{R}^d$. On appelle *loi uniforme* sur Δ la mesure de probabilité borélienne

$$\frac{\mathbb{1}_\Delta}{\mathrm{vol}_d(\Delta)}\,\mathrm{vol}_d,$$

où vol_d est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Si Z est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur Δ, on dit que Z est *uniformément distribuée* dans Δ. Dans ce cas-là, Z est presque sûrement égale à une variable aléatoire à valeurs dans Δ.

2. INDICE DE CORRÉLATION DE CORPS CONVEXES

Dans ce paragraphe, on considère deux corps convexes Δ_1 et Δ_2 dans un espace euclidien $\mathbb{R}^d$, où $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 1$. On se pose la question suivante. Étant données deux variables aléatoires Z_1 et Z_2 qui sont uniformément distribuées dans Δ_1 et Δ_2 respectivement, la somme $Z_1 + Z_2$ peut-elle être uniformément distribuée dans la somme de Minkowski $\Delta_1 + \Delta_2$? Si ce n'est pas le cas, quelle est la structure de corrélation optimale entre les variables aléatoires Z_1 et Z_2 de sorte que la somme $Z_1 + Z_2$ soit la plus uniforme possible ? Pour mieux comprendre ce problème, on introduit un invariant numérique pour le couple (Δ_1, Δ_2), appelé *indice de corrélation* entre les corps convexes Δ_1 et Δ_2.

2.1. DÉFINITION DE L'INDICE DE CORRÉLATION. — Soit (Δ_1, Δ_2) un couple de corps convexes dans $\mathbb{R}^d$. On désigne par $\mathscr{A}(\Delta_1, \Delta_2)$ la collection des mesures de probabilité boréliennes sur $\Delta_1 \times \Delta_2$ dont les images directes par les deux projections $\Delta_1 \times \Delta_2 \to \Delta_1$ et $\Delta_1 \times \Delta_2 \to \Delta_2$ sont les lois uniformes sur Δ_1 et Δ_2 respectivement. En d'autres termes, $\mathscr{A}(\Delta_1, \Delta_2)$ est l'ensemble de toutes les lois jointes possibles de couples de variables aléatoires (Z_1, Z_2) dont les lois marginales sont les lois uniformes sur Δ_1 et Δ_2 respectivement. Pour toute mesure $\nu \in \mathscr{A}(\Delta_1, \Delta_2)$, on désigne par $\rho(\nu)$

la valeur
$$\rho(\nu):=\sup_f\frac{\int_{\Delta_1\times\Delta_2}f(x+y)\,\nu(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)}{\int_{\Delta_1+\Delta_2}f(z)\,\eta(\mathrm{d}z)},$$
où f parcourt l'ensemble des fonctions boréliennes positives non η-négligeables sur la somme de Minkowski $\Delta_1+\Delta_2:=\{x+y\,|\,x\in\Delta_1,\ y\in\Delta_2\}$, η étant la loi uniforme sur $\Delta_1+\Delta_2$. Dans le cas où $\rho(\nu)<+\infty$, l'image directe de la mesure ν par la somme de Minkowski est absolument continue par rapport à η, et $\rho(\nu)$ est égal au supremum η-essentiel de sa dérivée de Radon-Nikodym par rapport à η. Si (Z_1,Z_2) est un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\Delta_1\times\Delta_2$ qui suit la loi jointe ν et si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\Delta_1+\Delta_2$ qui suit la loi uniforme, alors l'inégalité
$$\mathbb{E}[f(Z_1+Z_2)]\leqslant\rho(\nu)\mathbb{E}[f(Z)]$$
est satisfaite pour toute fonction borélienne et positive f sur $\Delta_1+\Delta_2$. En particulier, si on prend f comme la fonction constante 1, on obtient la relation $\rho(\nu)\geqslant 1$.

Remarque 2.1. — En utilisant un argument de classes monotones, on peut montrer que, pour vérifier la relation $\rho(\nu)\leqslant a$, où $a\geqslant 1$, il suffit de montrer que
$$\mathbb{E}[f(Z_1+Z_2)]\leqslant a\,\mathbb{E}[f(Z)]\tag{9}$$
pour toute fonction continue et positive f sur $\Delta_1+\Delta_2$. En effet, on désigne par $\mathscr{H}$ la famille des fonctions boréliennes, bornées et positives sur $\Delta_1+\Delta_2$ qui vérifient la relation (9). D'après le théorème de convergence dominée, la famille $\mathscr{H}$ est stable par convergence (simple) uniformément bornée. Si elle contient la famille $\mathscr{C}$ de toutes les fonctions continues et positives sur $\Delta_1+\Delta_2$, qui satisfait aux conditions (1)–(3) du lemme A.1, alors le lemme montre que $\mathscr{H}$ contient toute fonction borélienne, bornée et positive sur $\Delta_1+\Delta_2$.

Définition 2.2. — Soit (Δ_1,Δ_2) un couple de corps convexes dans $\mathbb{R}^d$. On dit qu'une mesure de probabilité $\nu\in\mathscr{A}(\Delta_1,\Delta_2)$ est *minkowskienne* si $\rho(\nu)=1$, ou de façon équivalente, pour tout couple de variables aléatoires (Z_1,Z_2) à valeurs dans $\Delta_1\times\Delta_2$ qui suit la loi jointe ν, la somme Z_1+Z_2 suit la loi uniforme sur la somme de Minkowski $\Delta_1+\Delta_2$. On définit en outre l'*indice de corrélation* entre Δ_1 et Δ_2 par
$$\rho(\Delta_1,\Delta_2):=\inf_{\nu\in\mathscr{A}(\Delta_1,\Delta_2)}\rho(\nu).$$

On voit aussitôt que, s'il existe une mesure minkowskienne dans $\mathscr{A}(\Delta_1,\Delta_2)$, alors on a $\rho(\Delta_1,\Delta_2)=1$. La réciproque de cet énoncé est aussi vraie. En effet, d'après le théorème de Prokhorov, l'espace $\mathscr{P}(\Delta_1\times\Delta_2)$ des mesures de probabilité boréliennes sur $\Delta_1\times\Delta_2$, muni de la topologie de convergence étroite (c'est-à-dire la topologie la moins fine qui rend continue toute application de la forme $\nu\mapsto\int_{\Delta_1\times\Delta_2}f\,\mathrm{d}\nu$, où f parcourt l'ensemble des fonctions continues sur $\Delta_1\times\Delta_2$), est un espace topologique séparable, métrisable et compact (voir [12, III.54–60] pour les détails). L'ensemble $\mathscr{A}(\Delta_1,\Delta_2)$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{P}(\Delta_1\times\Delta_2)$, donc est compact. L'application $\rho:\mathscr{A}(\Delta_1\times\Delta_2)\to[1,+\infty]$ s'écrit comme la borne supérieure d'une famille de fonctions continues, donc est une fonction semi-continue inférieurement. En particulier, elle atteint sa valeur minimale sur $\mathscr{A}(\Delta_1,\Delta_2)$. On en déduit que, si $\rho(\Delta_1,\Delta_2)=1$, alors il existe une mesure minkowskienne dans la famille $\mathscr{A}(\Delta_1,\Delta_2)$.

2.2. Inégalité d'indice de Hodge pour les corps convexes. — On établit dans ce paragraphe une version de l'inégalité d'indice de Hodge dans le cadre de la géométrie convexe.

Théorème 2.3. — *Soient Δ_1 et Δ_2 deux corps convexes dans $\mathbb{R}^d$, G_1, G_2 et G trois fonctions mesurables sur Δ_1, Δ_2 et $\Delta_1+\Delta_2$ respectivement, qui sont bornées supérieurement. On suppose que la fonction G est positive et que, pour tout $(x,y)\in\Delta_1\times\Delta_2$, l'inégalité $G(x+y)\geqslant G_1(x)+G_2(y)$ est satisfaite. Alors on a*

$$\frac{\int_{\Delta_1+\Delta_2}G(x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{vol}_d(\Delta_1+\Delta_2)}\geqslant\rho(\Delta_1,\Delta_2)^{-1}\left(\frac{\int_{\Delta_1}G_1(x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{vol}_d(\Delta_1)}+\frac{\int_{\Delta_2}G_2(x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{vol}_d(\Delta_2)}\right),\tag{10}$$

où vol_d désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, et l'expression simplifiée $\mathrm{d}x$ signifie $\mathrm{vol}_d(\mathrm{d}x)$.

Démonstration. — Soient ν une mesure de probabilité dans $\mathscr{A}(\Delta_1,\Delta_2)$ et (Z_1,Z_2) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\Delta_1\times\Delta_2$ dont la loi de probabilité jointe est ν. Soit en outre Z une variable aléatoire qui est uniformément distribuée dans $\Delta_1+\Delta_2$. Comme la fonction G est borélienne, positive et bornée, on a

$$\mathbb{E}[G(Z_1+Z_2)]\leqslant\rho(\nu)\mathbb{E}[G(Z)].$$

En outre, par l'hypothèse de sur-additivité des fonctions G, G_1 et G_2, on a

$$G(Z_1+Z_2)\geqslant G_1(Z_1)+G_2(Z_2),$$

d'où

$$\mathbb{E}[G(Z_1+Z_2)]\geqslant\mathbb{E}[G_1(Z_1)]+\mathbb{E}[G_2(Z_2)].$$

Comme les lois marginales du couple (Z_1,Z_2) sont des lois uniformes, on obtient

$$\frac{\int_{\Delta_1+\Delta_2}G(x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{vol}_d(\Delta_1+\Delta_2)}\geqslant\rho(\nu)^{-1}\left(\frac{\int_{\Delta_1}G_1(x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{vol}_d(\Delta_1)}+\frac{\int_{\Delta_2}G_2(x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{vol}_d(\Delta_2)}\right).$$

Enfin, quitte à prendre la borne supérieure du terme à droite de l'inégalité, où ν parcourt l'ensemble $\mathscr{A}(\Delta_1,\Delta_2)$, on obtient l'inégalité (10). □

Remarque 2.4. — Dans le cas où il existe une mesure minkowskienne dans $\mathscr{A}(\Delta_1,\Delta_2)$, l'hypothèse de positivité pour la fonction G dans la proposition précédente peut être omise. En effet, dans ce cas-là on peut effectivement choisir un couple (Z_1,Z_2) de variables aléatoires à valeurs dans $\Delta_1\times\Delta_2$ dont les lois marginales sont uniformes, et tel que Z_1+Z_2 suive la loi uniforme sur $\Delta_1+\Delta_2$. L'inégalité (10) résulte donc directement de la relation

$$\mathbb{E}[G(Z_1+Z_2)]\geqslant\mathbb{E}[G_1(Z_1)]+\mathbb{E}[G_2(Z_2)].$$

2.3. Majorations de l'indice de corrélation. — Pour les applications du théorème 2.3, il est important de déterminer si un couple (Δ_1, Δ_2) de corps convexes admet une mesure minkowskienne et, en cas d'absence de mesure minkowskienne, de majorer l'indice de corrélation. La proposition suivante implique que, dans le cas où la dimension de l'espace euclidien est 1, tout couple de corps convexes admet une mesure minkowskienne.

Proposition 2.5. — *Soient Δ_1 et Δ_2 deux corps convexes dans $\mathbb{R}^d$. S'il existe $r > 0$ et $y \in \mathbb{R}^d$ tels que $\Delta_2 = \{rx + y \,|\, x \in \Delta_1\}$, alors il existe une mesure minkowskienne dans $\mathscr{A}(\Delta_1, \Delta_2)$. En particulier, tout couple de corps convexes dans $\mathbb{R}$ admet une mesure minkowskienne.*

Démonstration. — Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans Δ_1 qui suit la loi uniforme sur Δ_1. Alors $rZ + y$ suit la loi uniforme sur Δ_2. De plus, la somme $Z + (rZ + y) = (r + 1)Z + y$ suit la loi uniforme sur la somme de Minkowski $\Delta_1 + \Delta_2$. On obtient donc que la loi jointe du couple $(Z, rZ + y)$ est une mesure minkowskienne pour (Δ_1, Δ_2).

Dans le cas où $d = 1$, les corps convexes dans $\mathbb{R}$ sont des intervalles fermés et bornés, donc sont proportionnels à translation près. Le résultat montré plus haut est donc valable dans ce cas-là. □

Soit $(d_1, \ldots, d_n)$ une famille finie d'entiers $\geqslant 1$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soient $\Delta^{(i)}$ un corps convexe dans $\mathbb{R}^{d_i}$ et $\eta^{(i)}$ la loi uniforme sur $\Delta^{(i)}$. Alors la mesure de probabilité produit $\eta^{(1)} \otimes \cdots \otimes \eta^{(n)}$ est la loi uniforme sur le corps convexe produit $\Delta^{(1)} \times \cdots \times \Delta^{(n)}$. On en déduit le résultat suivant.

Proposition 2.6. — *Soient $(d_1, \ldots, d_n)$ une famille finie d'entiers $\geqslant 1$ et d la somme des $d_1, \ldots, d_n$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soient $(\Delta_1^{(i)}, \Delta_2^{(i)})$ un couple de corps convexes dans $\mathbb{R}^{d_i}$, et $\nu^{(i)}$ un élément de $\mathscr{A}(\Delta_1^{(i)}, \Delta_2^{(i)})$. Soient en outre*

$$\Delta_j = \Delta_j^{(1)} \times \cdots \times \Delta_j^{(n)}, \quad j = 1, 2,$$

et $\nu = \nu^{(1)} \otimes \cdots \otimes \nu^{(n)}$. Alors on a $\nu \in \mathscr{A}(\Delta_1, \Delta_2)$ et

$$\rho(\nu) = \prod_{i=1}^{n} \rho(\nu^{(i)}). \tag{11}$$

En particulier, on a

$$\rho(\Delta_1, \Delta_2) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \rho(\Delta_1^{(i)}, \Delta_2^{(i)}).$$

Enfin, si chacun des couples $(\Delta_1^{(i)}, \Delta_2^{(i)})$ admet une mesure minkowskienne, il en est de même de (Δ_1, Δ_2).

Démonstration. — L'image directe de ν sur Δ_j par la projection$\Delta_1 \times \Delta_2 \to \Delta_j$ $(j = 1, 2)$ s'identifie au produit des images directes de $\nu^{(i)}$ sur $\Delta_j^{(i)}$ par la projection $\Delta_1^{(i)} \times \Delta_2^{(i)} \to \Delta_j^{(i)}$ $(i \in \{1, \ldots, n\})$, qui est égale à la loi uniforme sur Δ_j. On obtient donc $\nu \in \mathscr{A}(\Delta_1, \Delta_2)$. Si $(f_i)_{i=1}^n$ est une famille de fonctions, où f_i est une fonction continue sur $\Delta_1^{(i)} + \Delta_2^{(i)}$, et si $f : \Delta_1 + \Delta_2 \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\forall\, \boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_n) \in \Delta_1 + \Delta_2, \quad f(z_1, \dots, z_n) = f_1(z_1) \cdots f_n(z_n),$$

alors on a

$$\int_{\Delta_1+\Delta_2} f(\boldsymbol{z})\, \nu(\mathrm{d}\boldsymbol{z}) = \prod_{i=1}^n \int_{\Delta_1^{(i)}+\Delta_2^{(i)}} f_i \,\mathrm{d}\nu^{(i)}$$

et

$$\int_{\Delta_1\times\Delta_2} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\, \eta(\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \mathrm{d}\boldsymbol{y}) = \prod_{i=1}^n \int_{\Delta_1^{(i)}\times\Delta_2^{(i)}} f_i(x_i+y_i)\, \eta_1^{(i)}(\mathrm{d}x_i) \otimes \eta_2^{(i)}(\mathrm{d}y_i),$$

où $\eta_j^{(i)}$ ($j \in \{1, 2\}$ et $i \in \{1, \dots, n\}$) est la loi uniforme sur $\Delta_j^{(i)}$ et η est la loi uniforme sur $\Delta_1 \times \Delta_2$. On en déduit donc

$$\rho(\nu) \geqslant \prod_{i=1}^n \rho(\nu^{(i)}).$$

En outre, le théorème de Fubini montre que l'inégalité

$$\int_{\Delta_1\times\Delta_2} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\, \eta(\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \mathrm{d}\boldsymbol{y}) \leqslant \Big(\prod_{i=1}^n \rho(\nu^{(i)})\Big) \cdot \int_{\Delta_1+\Delta_2} f(\boldsymbol{z})\, \nu(\mathrm{d}\boldsymbol{z})$$

est satisfaite pour toute fonction continue positive f sur $\Delta_1 + \Delta_2$. On obtient donc l'égalité (11), qui implique les deux derniers énoncés. □

Soit (Δ_1, Δ_2) un couple de corps convexes dans $\mathbb{R}^d$. L'existence d'une mesure minkowskienne dans $\mathscr{A}(\Delta_1, \Delta_2)$ entraîne que le centre de gravité de la somme de Minkowski $\Delta_1 + \Delta_2$ coïncide avec la somme des centres de gravité de Δ_1 et de Δ_2. En effet, si (Z_1, Z_2) est un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\Delta_1 \times \Delta_2$ dont la loi jointe est une mesure minkowskienne, alors la relation $\mathbb{E}[Z_1+Z_2] = \mathbb{E}[Z_1]+\mathbb{E}[Z_2]$ donne l'énoncé plus haut sur les centres de gravité. Cependant, cet énoncé n'est pas toujours vrai lorsque $d \geqslant 2$, cf. [17, p. 83] pour un contre-exemple. Il est donc intéressant d'étudier les majorations de l'indice de corrélation $\rho(\Delta_1, \Delta_2)$. Le choix de la mesure produit $\nu_0 \in \mathscr{A}(\Delta_1, \Delta_2)$ des lois uniformes sur Δ_1 et Δ_2 donne déjà une majoration non triviale. Ce problème est étroitement lié au contrôle de l'entropie de la somme de variables aléatoires. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ dont la loi de probabilité admet une densité f (voir § 1.5 pour la définition). L'*entropie* de X est définie par

$$h(X) := -\mathbb{E}[\log f(X)],$$

pourvu que l'espérance figurant dans la formule soit bien définie. On définit l'*entropie exponentielle* de X par

$$H(X) := \exp(2h(X)/d).$$

L'inégalité de Shannon dans la théorie de l'information [32] montre que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, alors on a

$$H(X+Y) \geqslant H(X) + H(Y), \tag{12}$$

pourvu que les entropies exponentielles soient bien définies. On renvoie les lecteurs à [33] pour une démonstration de cette inégalité. Dans le cas où la variable aléatoire X est à valeurs dans un corps convexe $\Delta \subset \mathbb{R}^d$, l'entropie de X est majorée par $\ln(\mathrm{vol}_d(\Delta))$ (où vol_d est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$), et l'égalité est atteinte lorsque X est uniformément distribuée. Plus généralement, l'entropie et le supremum essentiel de la densité d'une variable aléatoire sont proches lorsque la densité est log-concave. En utilisant cette propriété, Bobkov et Madiman [3] ont obtenu un encadrement de la norme L^∞ de la densité de la somme de variables aléatoires indépendantes qui sont uniformément distribuées dans des corps convexe.

Proposition 2.7. — *Soient Δ_1 et Δ_2 deux corps convexes dans $\mathbb{R}^d$. On a*

$$\rho(\Delta_1, \Delta_2) \leqslant \binom{2d}{d}. \tag{13}$$

Démonstration. — Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes qui sont uniformément distribuées dans les corps convexes Δ_1 et Δ_2 respectivement. La loi de la variable aléatoire somme $Z_1 + Z_2$ admet une densité $p(\cdot)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, qui s'identifie à la convolution des densités des lois uniformes sur Δ_1 et Δ_2 respectivement. En d'autres termes, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$p(y) = \frac{1}{\mathrm{vol}_d(\Delta_1)\mathrm{vol}_d(\Delta_2)} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\Delta_1}(x)\mathbb{1}_{\Delta_2}(y-x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{vol}_d(\Delta_1 \cap (y - \Delta_2))}{\mathrm{vol}_d(\Delta_1)\mathrm{vol}_d(\Delta_2)}.$$

D'après l'inégalité de Rogers-Shephard (cf. [30, (14)], voir aussi [3, (4.3)]), on a

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^d, \quad p(y) \leqslant \binom{2d}{d}.$$

Par la définition de $\rho(\Delta_1, \Delta_2)$, on obtient

$$\rho(\Delta_1, \Delta_2) \leqslant \rho(\nu) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} p(y),$$

d'où le résultat. □

Remarque 2.8. — Si on compare les démonstrations des propositions 2.5 et 2.7, on constate que le choix d'une structure de corrélation forte devrait conduire à une meilleure estimation pour l'indice de corrélation $\rho(\Delta_1, \Delta_2)$. Cette observation est confirmée par un résultat de [10] sur l'entropie maximale de la somme de deux variables aléatoires qui suivent la même loi. Il est envisageable que l'étude sur l'entropie maximale de la somme de variables aléatoires dépendantes conduira à des majorations de l'indice de corrélation de deux corps convexes, qui sont meilleures que l'inégalité (13). On conjecture que $\rho(\Delta_1, \Delta_2)$ est borné supérieurement par $d + 1$.

3. Systèmes linéaires filtrés et inégalité d'indice de Hodge

Dans cette section, on établit une inégalité d'indice de Hodge dans le cadre de systèmes linéaires gradués filtrés. On fixe un corps K et un schéma projectif et intègre X sur $\operatorname{Spec} K$ dont la dimension de Krull d est supposée être $\geqslant 1$.

3.1. Systèmes linéaires gradués et filtrés. — Soit V un espace vectoriel de rang fini sur K. Par $\mathbb{R}$-*filtration* sur V, on entend une famille $(\mathscr{F}^t V)_{t\in\mathbb{R}}$ de sous-espaces K-vectoriels de V indexée par $\mathbb{R}$, qui satisfait aux conditions suivantes :

(a) $\mathscr{F}^t(V) = \{0\}$ pour t suffisamment positif,
(b) $\mathscr{F}^t(V) = V$ pour t suffisamment négatif,
(c) la fonction $t \mapsto \mathrm{rg}_K(\mathscr{F}^t(V))$ est localement constante à gauche.

On dit que la filtration $\mathscr{F}$ est *triviale* si $\mathscr{F}_t(V) = \{0\}$ lorsque $t > 0$, et $\mathscr{F}_t(V) = V$ lorsque $t \leqslant 0$. Si $\mathscr{F}$ est une $\mathbb{R}$-filtration sur V, on définit

$$e_{\max}(V, \mathscr{F}) := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \mathscr{F}^t(V) \neq \{0\}\} \tag{14}$$

comme le plus grand point de saut de la filtration. Si l'espace vectoriel V est non nul, la dérivée au sens des distributions de la fonction

$$(t \in \mathbb{R}) \longmapsto 1 - \frac{\mathrm{rg}_K(\mathscr{F}^t(V))}{\mathrm{rg}_K(V)}$$

définit une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$, notée $\nu_{(V,\mathscr{F})}$.

Soient D un $\mathbb{R}$-diviseur (de Cartier) sur X et $V_\bullet$ un système linéaire gradué de D, qui contient un $\mathbb{Q}$-diviseur ample. On suppose donnée, pour chaque entier $n \geqslant 0$, une $\mathbb{R}$-filtration $\mathscr{F}$ sur V_n. On convient que la filtration sur V_0 est triviale et on suppose en outre que la famille de filtrations $\mathscr{F}$ sur $V_\bullet$ est *multiplicative*, autrement dit, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ et $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$(\mathscr{F}^{t_1} V_n)(\mathscr{F}^{t_2} V_m) \subset \mathscr{F}^{t_1+t_2} V_{n+m}.$$

Pour tout nombre réel t, les espaces vectoriels $V_n^t := \mathscr{F}^{nt} V_n$ forment un système linéaire gradué de D

$$V_\bullet^t := \bigoplus_{n\geqslant 0} V_n^t.$$

En particulier, la suite $(e_{\max}(V_n, \mathscr{F}))_{n\geqslant 0}$ est sur-additive. On définit

$$e_{\max}(V_\bullet, \mathscr{F}) := \sup_{n\geqslant 1} \frac{e_{\max}(V_n, \mathscr{F})}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e_{\max}(V_n, \mathscr{F})}{n},$$

où l'égalité provient du fait que $V_n \neq \{0\}$ pour n suffisamment grand. On peut considérer $e_{\max}(V_\bullet, \mathscr{F})$ comme un seuil de trivialité pour la famille des systèmes linéaires gradués $(V_\bullet^t)_{t\in\mathbb{R}}$. En effet, quand $t > e_{\max}(V_\bullet, \mathscr{F})$, par définition on a $V_n^t = \{0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$. En revanche, lorsque $V_\bullet$ contient un $\mathbb{Q}$-diviseur ample, il est démontré dans [5, Lem. 1.5] que, pour tout nombre réel $t < e_{\max}(V_\bullet, \mathscr{F})$, le système linéaire gradué $V_\bullet^t$ contient un $\mathbb{Q}$-diviseur ample.

Par la construction des corps d'Okounkov que l'on a rappelée au paragraphe 1.4, on obtient une famille décroissante $(\Delta(V_\bullet^t))_{t\in\mathbb{R}}$ de parties convexes et compactes de $\mathbb{R}^d$ (si $t \geqslant e_{\max}(V_\bullet, \mathscr{F})$, par convention $\Delta(V_\bullet^t) := \varnothing$). De plus, pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$\lambda\Delta(V_\bullet^{t_1}) + (1-\lambda)\Delta(V_\bullet^{t_2}) \subset \Delta(V_\bullet^{\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2}).$$

On suppose désormais que $e_{\max}(V_\bullet,\mathscr{F}) < +\infty$ et que $V_\bullet$ contient un $\mathbb{Q}$-diviseur ample. La *transformée concave* de $\mathscr{F}$ est définie comme la fonction $G_{(V_\bullet,\mathscr{F})}$ de $\Delta(V_\bullet)$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$G_{(V_\bullet,\mathscr{F})}(x) := \sup\{t\in\mathbb{R} \mid x\in\Delta(V_\bullet^t)\}.$$

C'est une fonction concave et semi-continue supérieurement sur $\Delta(V_\bullet)$, qui est à valeurs réelles et continue sur $\Delta(V_\bullet)^\circ$. En outre, on a $G_{(V_\bullet,\mathscr{F})}\leqslant e_{\max}(V_\bullet,\mathscr{F})$.

On rappelle un théorème de limite pour les systèmes linéaires gradués et filtrés comme la suite. Ce résultat a été établi dans [5] (voir le théorème 1.11 de *loc. cit.* pour une démonstration). Ici on donne une reformulation de ce résultat en utilisant le langage probabiliste.

Théorème 3.1. — *Soient X un schéma projectif et intègre de dimension $d\geqslant 1$ sur un corps K, qui admet un point rationnel régulier, et D un $\mathbb{R}$-diviseur de Cartier sur X. Soit $V_\bullet$ un système linéaire gradué de D, qui contient un diviseur ample, et est muni d'une famille multiplicative de filtrations $\mathscr{F}$ telle que $e_{\max}(V_\bullet,\mathscr{F})<+\infty$. Pour tout entier $n\geqslant 1$, soit Y_n une variable aléatoire dont la loi de probabilité est $\nu_{(V_n,\mathscr{F})}$. Alors la suite de variables aléatoires $(Y_n/n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la mesure de probabilité $\nu_{(V_\bullet,\mathscr{F})}$ qui est l'image directe de la loi uniforme sur $\Delta(V_\bullet)$ par la transformation concave $G_{(V_\bullet,\mathscr{F})}$.*

Rappelons qu'une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une mesure limite ν si, pour toute fonction borélienne et bornée sur $\mathbb{R}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}[h(Z_n)] = \int_{\mathbb{R}} h(x)\,\nu(\mathrm{d}x).$$

On peut montrer que, dans le cas de la convergence en loi de la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$, cette égalité est satisfaite plus généralement pour toute fonction borélienne et bornée h sur $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité est négligeable par rapport à la mesure limite ν. On renvoie les lecteurs à [12, Chap. III, Cor. 57] pour les détails.

Bien que la construction des corps d'Okounkov ne soit pas intrinsèque, et dépende de différents choix selon les approches, la loi de probabilité limite $\nu_{(V_\bullet,\mathscr{F})}$ est intrinsèque. En effet, si $Z_{(V_\bullet,\mathscr{F})}$ est une variable aléatoire qui suit la loi $\nu_{(V_\bullet,\mathscr{F})}$, alors on a

$$\mathbb{P}(Z_{(V_\bullet,\mathscr{F})}\geqslant t) = \frac{\mathrm{vol}(V_\bullet^t)}{\mathrm{vol}(V_\bullet)} = \frac{\mathrm{vol}_d(\Delta(V_\bullet^t))}{\mathrm{vol}_d(\Delta(V_\bullet))},$$

où vol_d est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On définit le *volume arithmétique* et le *χ-volume arithmétique* du système linéaire gradué filtré $(V_\bullet,\mathscr{F})$ par

$$\widehat{\mathrm{vol}}(V_\bullet,\mathscr{F}) := (d+1)\mathrm{vol}(V_\bullet)\mathbb{E}[\max(Z_{(V_\bullet,\mathscr{F})},0)] \tag{15}$$

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(V_\bullet,\mathscr{F}) := (d+1)\mathrm{vol}(V_\bullet)\mathbb{E}[Z_{(V_\bullet,\mathscr{F})}]. \tag{16}$$

Dans le cas où la filtration $\mathscr{F}$ provient d'une structure de $\mathbb{R}$-diviseur arithmétique adélique sous forme de filtration par minima, $\widehat{\mathrm{vol}}(V_\bullet,\mathscr{F})$ et $\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(V_\bullet,\mathscr{F})$ correspondent aux volume arithmétique et χ-volume arithmétique du $\mathbb{R}$-diviseur arithmétique (voir la proposition 4.4 et le lemme 4.11 pour plus de détails).

Le théorème de limite 3.1 conduit naturellement au corollaire suivant.

Corollaire 3.2. — *Avec les notations et sous les hypothèses du théorème* 3.1, *on a*

$$\widehat{\mathrm{vol}}(V_\bullet,\mathscr{F})=(d+1)!\int_{\Delta(V_\bullet^0)}G_{(V_\bullet,\mathscr{F})}(x)\,\mathrm{d}x,\tag{17}$$

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(V_\bullet,\mathscr{F})=(d+1)!\int_{\Delta(V_\bullet)}G_{(V_\bullet,\mathscr{F})}(x)\,\mathrm{d}x.\tag{18}$$

3.2. Inégalité d'indice de Hodge. — Soient $U_\bullet$, $V_\bullet$ et $W_\bullet$ trois systèmes linéaires gradués de $\mathbb{R}$-diviseurs sur X, contenant des $\mathbb{Q}$-diviseurs amples. On suppose que chacun des systèmes linéaires gradués est muni d'une famille multiplicative de $\mathbb{R}$-filtrations $\mathscr{F}$. Le but de ce sous-paragraphe est de montrer le résultat suivant.

Théorème 3.3. — *Si* $e_{\max}(W_\bullet,\mathscr{F})<+\infty$ *et si la condition suivante est satisfaite :*

$$\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \forall\,n\in\mathbb{N},\quad \mathscr{F}^a(U_n)\cdot\mathscr{F}^b(V_n)\subset\mathscr{F}^{a+b}(W_n),\tag{19}$$

alors on a

$$\widehat{\mathrm{vol}}(W_\bullet,\mathscr{F})\geqslant\frac{\mathrm{vol}_d(\Delta(U_\bullet^0)+\Delta(V_\bullet^0))}{\rho(\Delta(U_\bullet^0),\Delta(V_\bullet^0))}\Big(\frac{\widehat{\mathrm{vol}}(U_\bullet,\mathscr{F})}{\mathrm{vol}_d(\Delta(U_\bullet^0))}+\frac{\widehat{\mathrm{vol}}(V_\bullet,\mathscr{F})}{\mathrm{vol}_d(\Delta(V_\bullet^0))}\Big).\tag{20}$$

Si le couple de corps convexes $(\Delta(U_\bullet),\Delta(V_\bullet))$ *admet une mesure minkowskienne et si la relation* $\Delta(W_\bullet)=\Delta(U_\bullet)+\Delta(V_\bullet)$ *est satisfaite, alors on a*

$$\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(W_\bullet,\mathscr{F})}{\mathrm{vol}(W_\bullet)}\geqslant\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(U_\bullet,\mathscr{F})}{\mathrm{vol}(U_\bullet)}+\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(V_\bullet,\mathscr{F})}{\mathrm{vol}(V_\bullet)}.\tag{21}$$

Démonstration. — On peut supposer que $U_\bullet$, $V_\bullet$ et $W_\bullet$ sont tous des systèmes linéaires gradués d'un même diviseur de Cartier. La condition (19) implique que $U_n\cdot V_n\subset W_n$ pour tout entier $n\geqslant 0$. On obtient donc $\Delta(U_\bullet)+\Delta(V_\bullet)\subset\Delta(W_\bullet)$. En outre, encore par la condition (19) on a

$$\forall\,(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad \Delta(U_\bullet^a)+\Delta(V_\bullet^b)\subset\Delta(W_\bullet^{a+b}).$$

On en déduit

$$\forall\,(x,y)\in\Delta(U_\bullet)\times\Delta(V_\bullet),\quad G_{(W_\bullet,\mathscr{F})}(x+y)\geqslant G_{(U_\bullet,\mathscr{F})}(x)+G_{(V_\bullet,\mathscr{F})}(y).$$

Les inégalités (20) et (21) résultent du théorème 2.3 (voir aussi la remarque 2.4) et du corollaire 3.2. □

4. Applications

Dans cette section, on développe des applications du théorème 3.3 dans le cadre arithmétique. On fixe un corps global K. Rappelons que K est soit un corps de nombres soit le corps des fonctions rationnelles sur une courbe projective régulière C sur un corps de base k.

4.1. Rappels sur les fibrés adéliques. — On désigne par M_K l'ensemble des places de K. Chaque élément $v \in M_K$ est une classe d'équivalence de valeurs absolues non triviales sur K (deux valeurs absolues sont équivalentes si elles induisent la même topologie sur K). Pour toute place $v \in M_K$, on choisit une valeur absolue $|\cdot|_v$ dans la classe v comme suit. Si K est un corps de nombres, on choisit la valeur absolue $|\cdot|_v$ qui prolonge la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$ ou une valeur absolue p-adique (avec $|p|_v = p^{-1}$) et on note $n_v = [K_v : \mathbb{Q}_v]$; si $K = k(C)$ est un corps de fonction, alors v correspond à un point fermé x de C, on choisit $|\cdot|_v$ comme $\mathrm{e}^{-\mathrm{ord}_x(\cdot)}$ et on note $n_v = [k(x) : k]$. Rappelons la formule du produit :

$$\forall\, a \in K \smallsetminus \{0\}, \quad \prod_{v \in M_K} |a|_v^{n_v} = 1. \tag{22}$$

On rappelle la notion de fibré adélique introduite par Gaudron [18]. On appelle *fibré adélique* sur K tout espace vectoriel E de rang fini sur K, muni d'une famille de normes $(\|\cdot\|_v)_{v \in M_K}$, où $\|\cdot\|_v$ est une norme sur $E \otimes_K K_v$, K_v étant le complété de K par rapport à $|\cdot|_v$, qui satisfait aux conditions suivantes :

(a) la norme $\|\cdot\|_v$ est ultramétrique lorsque $|\cdot|_v$ est non archimédienne ;

(b) il existe une base $(e_i)_{i=1}^r$ de E sur K et un sous-ensemble fini S de M_K tels que, pour toute place $v \in M_K \smallsetminus S$ et tout $(a_1, \ldots, a_r) \in K_v$, on ait

$$\|a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r\|_v = \max_{i \in \{1, \ldots, r\}} |a_i|_v.$$

Soit $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_v)_{v \in M_K})$ un fibré adélique sur K. Pour tout $s \in E$, $s \neq 0$, on définit

$$\widehat{\deg}(s) := -\sum_{v \in M_K} n_v \ln \|s\|_v,$$

appelé *degré d'Arakelov* de s. Cette fonction induit une $\mathbb{R}$-filtration $\mathscr{F}$ (appelée *$\mathbb{R}$-filtration par minima*) sur l'espace vectoriel E par la formule

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \mathscr{F}^t(E) = \mathrm{Vect}_K(\{s \in E \,:\, \widehat{\deg}(s) \geqslant t\}).$$

Les points de saut de cette $\mathbb{R}$-filtration sont les *minima successifs* (logarithmiques) à la Thunder [35] : pour tout $i \in \{1, \ldots, \mathrm{rg}_K(E)\}$, on note

$$\lambda_i(\overline{E}) := \sup\{t \in \mathbb{R} \,:\, \mathrm{rg}_K(\mathscr{F}^t(E)) \geqslant i\}.$$

Si $E \neq \{0\}$, on désigne par $Z_{\overline{E}}$ une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition est

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(Z_{\overline{E}} \geqslant t) = \frac{\mathrm{rg}_K(\mathscr{F}^t(E))}{\mathrm{rg}_K(E)}.$$

La loi de probabilité de cette variable aléatoire est

$$\frac{1}{\mathrm{rg}(E)} \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E)} \delta_{\lambda_i(\overline{E})},$$

où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, δ_t désigne la mesure de Dirac en $\{t\}$.

Dans le cas où $K = k(C)$ est un corps de fonction, à tout fibré vectoriel $\mathscr{E}$ sur C, on peut naturellement associer un fibré adélique sur K dont l'espace vectoriel sous-jacent est la fibre générique $E = \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_C} K$ de $\mathscr{E}$. En effet, pour tout point fermé x de C (vu comme une place de K), la structure de $\mathscr{O}_C$-module de $\mathscr{E}$ induit une norme $\|\cdot\|_{\mathscr{E},x}$ sur $E \otimes_K K_x$ de sorte que

$$\forall\, s \in E \otimes_K K_x, \quad \|s\|_{\mathscr{E},x} = \inf\{|a|_x \,:\, a^{-1}s \in \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_C} \mathscr{O}_x\},$$

où $\mathscr{O}_x$ est l'anneau de valuation de K_x. Rappelons que le degré de $\mathscr{E}$, défini par $\deg(\mathscr{E}) := \deg(c_1(\mathscr{E}) \cap [C])$, peut être calculé en termes du fibré adélique associé : on a

$$\deg(\mathscr{E}) = -\sum_{v \in M_K} n_v \ln \|e_1 \wedge \cdots \wedge e_r\|_{v,\det},$$

où $\|\cdot\|_{v,\det}$ est la norme déterminant associée à $\|\cdot\|_v$. D'après un résultat de Roy et Thunder [31, Th. 2.1], il existe une constante $\alpha(C) > 0$, qui ne dépend que de la courbe C, telle que

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{rg}_K(E)} \lambda_i(\overline{E}) \leqslant \deg(\mathscr{E}) \leqslant \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}_K(E)} \lambda_i(\overline{E}) + \alpha(C)\,\mathrm{rg}_K(E), \tag{23}$$

où la première inégalité provient de l'inégalité d'Hadamard. On peut en déduire l'encadrement suivant de $h^0(\mathscr{E}) := \mathrm{rg}_k(H^0(C,\mathscr{E}))$ (voir [9, Prop. 8.1 & Th. 2.4]) : il existe une constante $\beta(C) > 0$ telle que

$$\Big| h^0(\mathscr{E}) - \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}_K(E)} \max(\lambda_i(\overline{E}), 0) \Big| \leqslant \beta(C)\,\mathrm{rg}_K(E). \tag{24}$$

On suppose que K est un corps de nombres. Étant donné un fibré adélique $\overline{E} = (E, (\|\cdot\|_v)_{v \in M_K})$ sur K, on définit

$$\widehat{h}^0(\overline{E}) := \ln\Big(\mathrm{card}\Big\{s \in E \,:\, \sup_{v \in M_K} \|s\|_v \leqslant 1\Big\}\Big) \tag{25}$$

et

$$\widehat{\deg}(\overline{E}) := -\sum_{v \in M_K} n_v \ln \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_{v,\det}, \tag{26}$$

où $(s_i)_{i=1}^r$ est une base de E sur K, et $\|\cdot\|_{v,\det}$ est la norme déterminant de $\|\cdot\|_v$ (pour tout $\eta \in \det(E_{K_v})$, on a $\|\eta\|_{v,\det} = \inf\{\|s_1\|_v \cdots \|s_r\|_v \,:\, s_1 \wedge \cdots \wedge s_r = \eta\}$). D'après le deuxième théorème de Minkowski et le théorème de Riemann-Roch pour les courbes arithmétiques dû a Gillet et Soulé (cf. [19, Prop. 6 & Th. 1]), on obtient

$$\Big| \widehat{\deg}(\overline{E}) - \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}_K(E)} \lambda_i(\overline{E}) \Big| = O(\mathrm{rg}_K(E) \ln(\mathrm{rg}_K(E))) \tag{27}$$

et

$$\Big| \widehat{h}^0(\overline{E}) - \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}_K(E)} \max(\lambda_i(\overline{E}), 0) \Big| = O(\mathrm{rg}_K(E) \ln(\mathrm{rg}_K(E))), \tag{28}$$

où les constantes implicites ne dépendent que du corps K et de l'ensemble (fini) des places v telles que la norme $\|\cdot\|_v$ soit non pure (i.e. l'image de $\|\cdot\|_v$ n'est pas contenue dans celle de $|\cdot|_v$).

4.2. Inégalité d'indice de Hodge arithmétique. — Dans ce paragraphe, on applique le théorème 3.3 aux systèmes linéaires gradués en fibrés adéliques. On fixe un schéma projectif et intègre X sur $\operatorname{Spec} K$. Rappelons que $\mathscr{S}(X)$ désigne l'ensemble des systèmes linéaires gradués de X qui sont des sous-systèmes linéaires gradués d'un système linéaire gradué de type fini, et qui contiennent un $\mathbb{Q}$-diviseur ample (cf. § 1.4).

Définition 4.1. — On appelle *système linéaire gradué en fibrés adéliques* de X toute donnée $\overline{V}_\bullet$ d'un système linéaire gradué $V_\bullet \in \mathscr{S}(X)$ muni de structures de fibré adélique $(\|\cdot\|_{V_n,v})_{v\in M_K}$ sur V_n, $n \in \mathbb{N}$, qui satisfont aux conditions suivantes :

(a) pour tous $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $v \in M_K$, $s_n \in V_n \otimes_K K_v$ et $s_m \in V_m \otimes_K K_v$, on a
$$\|s_n s_m\|_{V_{n+m},v} \leqslant \|s_n\|_{V_n,v} \cdot \|s_m\|_{V_m,v};$$

(b) $\lambda_1(\overline{V}_n) = O(n)$ lorsque $n \to +\infty$.

Soit $\overline{V}_\bullet$ un système linéaire gradué en fibrés adéliques de X. Pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $V_n \neq \{0\}$, soit $Z_{\overline{V}_n}$ une variable aléatoire dont la loi de probabilité est
$$\frac{1}{\operatorname{rg}_K(V_n)} \sum_{i=1}^{\operatorname{rg}_K(V_n)} \delta_{\lambda_i(\overline{V})},$$
où pour tout $t \in \mathbb{R}$, δ_t désigne la mesure de Dirac en $\{t\}$. Il s'avère que les $\mathbb{R}$-filtrations par minima sur les $\overline{V}_n$ satisfont aux conditions du théorème 3.1. On déduit donc du théorème que la suite de variables aléatoires $(\frac{1}{n} Z_{\overline{V}_n})_{n\geqslant 1,\ V_n\neq\{0\}}$ converge en loi vers une mesure de probabilité limite sur $\mathbb{R}$. On utilise l'expression $Z_{\overline{V}_\bullet}$ pour désigner une variable aléatoire qui suit cette loi limite.

Définition 4.2. — Soit $\overline{V}_\bullet$ un système linéaire gradué en fibrés adéliques de X. On définit le *volume arithmétique* et le *χ-volume arithmétique* de $\overline{V}_\bullet$ par
$$\widehat{\operatorname{vol}}(\overline{V}_\bullet) := (d+1)\operatorname{vol}(V_\bullet)\mathbb{E}[\max(Z_{\overline{V}_\bullet}, 0)], \tag{29}$$
$$\widehat{\operatorname{vol}}_\chi(\overline{V}_\bullet) := (d+1)\operatorname{vol}(V_\bullet)\mathbb{E}[Z_{\overline{V}_\bullet}]. \tag{30}$$

Rappelons que ces nombres correspondent à ceux dans les formules (15) et (16) si on considère les $\mathbb{R}$-filtrations par minima. Si $\widehat{\operatorname{vol}}(\overline{V}_\bullet) > 0$, on dit que le système linéaire gradué en fibrés adéliques $\overline{V}_\bullet$ est *gros*. Dans le cas où $\overline{V}_\bullet$ est gros, par [5, Lem. 1.6] on obtient que le système linéaire gradué $V_\bullet^0 := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{F}^0 V_n$ appartient à la famille $\mathscr{S}(X)$, où on considère les $\mathbb{R}$-filtrations par minima sur les $\overline{V}_n$. On désigne par $\Delta_+(\overline{V}_\bullet)$ son corps d'Okounkov.

On déduit du théorème 3.3 le résultat suivant, qui peut être considéré comme une inégalité d'indice de Hodge pour les systèmes linéaires gradués en fibrés adéliques.

Théorème 4.3. — *Soient $\overline{U}_\bullet$, $\overline{V}_\bullet$ et $\overline{W}_\bullet$ trois systèmes linéaires gradués en fibrés adéliques de X tels que $U_n\cdot V_n\subset W_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On suppose que, pour tous $n\in\mathbb{N}$, $v\in M_K$, $s_n\in U_n\otimes_K K_v$ et $s'_n\in V_n\otimes_K K_v$, on a*

$$\|s_ns'_n\|_{W_n,v}\leqslant\|s_n\|_{U_n,v}\cdot\|s'_n\|_{V_n,v}. \tag{31}$$

Alors on a

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{W}_\bullet)\geqslant\frac{\mathrm{vol}_d(\Delta_+(\overline{U}_\bullet)+\Delta_+(\overline{V}_\bullet))}{\rho(\Delta_+(\overline{U}_\bullet),\Delta_+(\overline{V}_\bullet))}\Big(\frac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{U}_\bullet)}{\mathrm{vol}_d(\Delta_+(\overline{U}_\bullet))}+\frac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{V}_\bullet)}{\mathrm{vol}_d(\Delta_+(\overline{V}_\bullet))}\Big). \tag{32}$$

Si le couple de corps convexes $(\Delta(U_\bullet),\Delta(V_\bullet))$ admet une mesure minkowskienne et si la relation $\Delta(W_\bullet)=\Delta(U_\bullet)+\Delta(V_\bullet)$ est satisfaite, alors on a

$$\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{W}_\bullet)}{\mathrm{vol}(W_\bullet)}\geqslant\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{U}_\bullet)}{\mathrm{vol}(U_\bullet)}+\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{V}_\bullet)}{\mathrm{vol}(V_\bullet)} \tag{33}$$

Démonstration. — Si on munit les systèmes linéaires gradués $U_\bullet$, $V_\bullet$ et $W_\bullet$ des $\mathbb{R}$-filtrations par minima, l'inégalité (31) entraîne (19). Les inégalités (32) et (33) découlent donc de (20) et (21) respectivement. □

4.3. Applications : cas de corps de fonctions. — Dans cette sous-section, on suppose que K est le corps des fonctions rationnelles sur une courbe projective régulière C sur un corps de base k. Soit $\pi:\mathscr{X}\to C$ un k-morphisme projectif et plat de schémas, où $\mathscr{X}$ est un k-schéma intègre. Si $\mathscr{L}$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible, on désigne par $\mathscr{L}_K$ la restriction de $\mathscr{L}$ à la fibre générique de π. Soit d la dimension relative de π, qui est supposée être $\geqslant 1$ (la dimension de $\mathscr{X}$ est donc $d+1$).

Soit $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible. Quitte à choisir une section rationnelle non nulle s_0 de $\mathscr{L}_K$, on peut identifier $H^0(\mathscr{X}_K,\mathscr{L}_K)$ à un système linéaire de $\mathscr{X}_K$, où toute section globale $s\in H^0(\mathscr{X}_K,\mathscr{L}_K)$ correspond à la fonction rationnelle s/s_0. En outre, comme π est un morphisme projectif et plat, l'image directe $\pi_*(\mathscr{L})$ est un fibré vectoriel sur C, qui induit une structure de fibré adélique sur $H^0(\mathscr{X}_K,\mathscr{L}_K)$. De façon similaire, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, le fibré vectoriel $\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$ induit une structure de fibré adélique sur $H^0(\mathscr{X}_K,\mathscr{L}_K^{\otimes n})$ (vu comme un système linéaire de $\mathscr{X}_K$ via la section rationnelle $s_0^{\otimes n}$ de $\mathscr{X}_K$). Il s'avère que, si $\mathscr{L}_K$ est gros, alors le système linéaire gradué $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}H^0(\mathscr{X}_K,\mathscr{L}_K^{\otimes n})$ muni de ces structures de fibré adélique forme un système linéaire gradué en fibrés adéliques de $\mathscr{X}_K$, noté $\overline{V}_\bullet(\mathscr{L})$ (voir [5, Prop. 2.6] pour la vérification de la condition (b) dans la définition 4.1). Les inégalités (23) et (24) conduisent au résultat suivant.

Proposition 4.4. — *Soit $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible tel que $\mathscr{L}_K$ soit gros. Alors on a*

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{V}_\bullet(\mathscr{L}))=\mathrm{vol}(\mathscr{L}),\quad\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{V}_\bullet(\mathscr{L}))=\lim_{n\to+\infty}\frac{\deg(\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n}))}{n^{d+1}/(d+1)!}, \tag{34}$$

où d est la dimension relative de π.

Démonstration. — D'après les inégalités (23) et (24), on a

$$\left|\frac{h^0(\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n}))}{nh^0(\mathscr{X}_K,\mathscr{L}_K^{\otimes n}))}-\frac{1}{n}\mathbb{E}\Big[\max\big(Z_{\overline{V}_n(\mathscr{L})},0\big)\Big]\right|=O\Big(\frac{1}{n}\log(h^0(\mathscr{X}_K,\mathscr{L}_K^{\otimes n}))\Big),\tag{35}$$

$$\left|\frac{\deg(\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n}))}{nh^0(\mathscr{X}_K,\mathscr{L}_K^{\otimes n}))}-\frac{1}{n}\mathbb{E}\Big[Z_{\overline{V}_n(\mathscr{L})}\Big]\right|=O\Big(\frac{1}{n}\log(h^0(\mathscr{X}_K,\mathscr{L}_K^{\otimes n}))\Big),\tag{36}$$

où $h^0(\mathscr{X}_K,\mathscr{L}_K^{\otimes n}):=\mathrm{rg}_K(H^0(\mathscr{X}_K,\mathscr{L}_K^{\otimes n}))$. Soit $Z_{\mathscr{L}}$ une variable aléatoire dont la loi de probabilité est la limite de la suite $(\frac{1}{n}Z_{\overline{V}_n(\mathscr{L})})_{n\geqslant 1}$. La condition (b) dans la définition 4.1 montre que la variable aléatoire $Z_{\mathscr{L}}$ est presque sûrement bornée supérieurement. En outre, le résultat de [21] adapté au cadre des corps de fonctions montre que $Z_{\mathscr{L}}$ est aussi presque sûrement bornée inférieurement. Par passage à la limite dans les formules (35) et (36) quand n tend vers l'infini, on obtient les égalités (34). □

Définition 4.5. — Soit $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible tel que $\mathscr{L}_K$ soit gros. On définit

$$\mathrm{vol}_\chi^\pi(\mathscr{L}):=\lim_{n\to+\infty}\frac{\deg(\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n}))}{n^{d+1}/(d+1)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\chi(\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n}))}{n^{d+1}/(d+1)!},$$

appelé *χ-volume* de $\mathscr{L}$ relativement à π, où la dernière égalité provient du théorème de Riemann-Roch sur la courbe C. En outre, si $\mathscr{L}$ est ample relativement à π, alors le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck appliqué à π montre que $\mathrm{vol}_\chi^\pi(\mathscr{L})$ s'identifie au nombre d'auto-intersection $c_1(\mathscr{L})^{d+1}$.

Remarque 4.6. — Soit $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible tel que $\mathscr{L}_K$ soit gros. Pour tout entier $n\geqslant 1$ on a $\mathrm{vol}_\chi^\pi(\mathscr{L}^{\otimes n})=n^{d+1}\,\mathrm{vol}_\chi^\pi(\mathscr{L})$. En outre, de manière analogue à la fonction volume, pour tout $\mathscr{O}_X$-module inversible $\mathscr{M}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{d+1}}\,\mathrm{vol}_\chi^\pi(\mathscr{L}^{\otimes n}\otimes\mathscr{M})=\mathrm{vol}_\chi^\pi(\mathscr{L}).$$

On en déduit l'égalité $\mathrm{vol}_\chi^\pi(\mathscr{L})=c_1(\mathscr{L})^{d+1}$ lorsque $\mathscr{L}$ est numériquement effectif relativement à π (c'est-à-dire que, pour tout élément $\mathscr{M}\in\mathrm{Pic}(X)_{\mathbb{Q}}$ qui est ample relativement à π, le produit tensoriel $\mathscr{L}\otimes\mathscr{M}$ l'est aussi). En particulier, on a $\mathrm{vol}_\chi^\pi(\mathscr{L})=c_1(\mathscr{L})^{d+1}=\mathrm{vol}(\mathscr{L})$ lorsque $\mathscr{L}$ est numériquement effectif et gros (voir aussi [26]).

Le résultat suivant est une application du théorème 4.3.

Théorème 4.7. — *Soient $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ deux $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-modules dont les fibres génériques sont gros. On suppose que, ou bien $\mathscr{X}$ est une surface projective, ou bien les classes de $\mathscr{L}_K$ et $\mathscr{M}_K$ dans $\mathrm{Pic}(\mathscr{X}_K)_{\mathbb{Q}}$ sont colinéaires, alors on a*

$$\frac{\mathrm{vol}_\chi^\pi(\mathscr{L}\otimes\mathscr{M})}{\mathrm{vol}(\mathscr{L}_K\otimes\mathscr{M}_K)}\geqslant\frac{\mathrm{vol}_\chi^\pi(\mathscr{L})}{\mathrm{vol}(\mathscr{L}_K)}+\frac{\mathrm{vol}_\chi^\pi(\mathscr{M})}{\mathrm{vol}(\mathscr{M}_K)}.\tag{37}$$

Démonstration. — Chacune des deux conditions assure (pour différentes raisons) que le couple $(\Delta(\mathscr{L}_K),\Delta(\mathscr{M}_K))$ admet une mesure minkowskienne et que

$$\Delta(\mathscr{L}_K)+\Delta(\mathscr{M}_K)=\Delta(\mathscr{L}_K\otimes\mathscr{M}_K).$$

Dans le cas où les classes de $\mathscr{L}_K$ et $\mathscr{M}_K$ dans $\mathrm{Pic}(\mathscr{X}_K)_{\mathbb{Q}}$ sont colinéaires, cela provient de la propriété (b) de la construction des corps d'Okounkov. Dans le cas où $d=1$, la fibre générique X_K est une courbe projective sur K. Comme le volume est invariant par les modifications birationnelles, on obtient que la fonction $\mathrm{vol}(\cdot)$ est additive sur le cône des faisceaux inversibles gros dans $\mathrm{Pic}(\mathscr{X}_K)$. En effet, si $\nu:\widetilde{\mathscr{X}_K}\to\mathscr{X}_K$ est la normalisation de la courbe $\mathscr{X}_K$, alors pour tout $\mathscr{O}_{\mathscr{X}_K}$-module inversible gros N on a $\mathrm{vol}(N)=\mathrm{vol}(\nu^*(N))=\deg(\nu^*(N))$. En outre, les corps convexes dans $\mathbb{R}$ sont des intervalles fermés et bornés. Donc les relations $\Delta(\mathscr{L}_K)+\Delta(\mathscr{M}_K)\subset\Delta(\mathscr{L}_K\otimes\mathscr{M}_K)$ et $\mathrm{vol}(\mathscr{L}_K)+\mathrm{vol}(\mathscr{M}_K)=\mathrm{vol}(\mathscr{L}_K\otimes\mathscr{M}_K)$ entraînent l'égalité $\Delta(\mathscr{L}_K)+\Delta(\mathscr{M}_K)=\Delta(\mathscr{L}_K\otimes\mathscr{M}_K)$. □

Dans le cas où les $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ sont numériquement effectifs relativement à π, l'inégalité (37) peut être réécrite sous la forme

$$\frac{c_1(\mathscr{L}\otimes\mathscr{M})^{d+1}}{c_1(\mathscr{L}_K\otimes\mathscr{M}_K)^d}\geqslant\frac{c_1(\mathscr{L})^{d+1}}{c_1(\mathscr{L}_K)^d}+\frac{c_1(\mathscr{M})^{d+1}}{c_1(\mathscr{M}_K)^d}. \tag{38}$$

Quitte à remplacer $\mathscr{M}$ par $\mathscr{M}^{\otimes n}$ et examiner le comportement asymptotique de l'inégalité lorsque $n\to+\infty$, on obtient

$$(d+1)c_1(\mathscr{L})c_1(\mathscr{M})^d\geqslant\frac{c_1(\mathscr{M}_K)^d}{c_1(\mathscr{L}_K)^d}\,c_1(\mathscr{L})^{d+1}+d\,\frac{c_1(\mathscr{L}_K)c_1(\mathscr{M}_K)^{d-1}}{c_1(\mathscr{M}_K)^d}\,c_1(\mathscr{M})^{d+1}. \tag{39}$$

Cette inégalité est en fait équivalente à (38). Pour retrouver (38), il suffit d'appliquer (39) à $(d+1)c_1(\mathscr{L})c_1(\mathscr{L}\otimes\mathscr{M})^d$ et $(d+1)c_1(\mathscr{M})c_1(\mathscr{L}\otimes\mathscr{M})^d$ respectivement, et puis prendre la somme. L'avantage de cette reformulation est qu'elle reste invariante lorsque l'on remplace $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ par leurs puissances tensorielles (d'exposant arbitraire) respectivement. Dans le cas où $\mathscr{L}_K=\mathscr{M}_K$, ou $d=1$ et $\deg(c_1(\mathscr{L}_K))=\deg(c_1(\mathscr{M}_K))$, l'inégalité (39) se réduit à

$$(d+1)c_1(\mathscr{L})c_1(\mathscr{M})^d\geqslant c_1(\mathscr{L})^{d+1}+dc_1(\mathscr{M})^{d+1}. \tag{40}$$

On obtient alors les résultats suivants, qui sont équivalents à l'inégalité (39) dans les cas où $d>1$ et $d=1$ respectivement.

Corollaire 4.8. — *Soit $\mathscr{P}$ un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible. On suppose que la restriction de $\mathscr{P}$ à $\mathscr{X}_K$ est trivial. Alors pour tout $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible $\mathscr{M}$ tel que $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}\otimes\mathscr{P}$ soient tous relativement numériquement effectifs, on a*

$$\sum_{i=2}^{d+1}\binom{d+1}{i}c_1(\mathscr{P})^ic_1(\mathscr{M})^{d+1-i}\leqslant 0. \tag{41}$$

Démonstration. — Soit $\mathscr{L}=\mathscr{M}\otimes\mathscr{P}$. On a $\mathscr{L}_K=\mathscr{M}_K$. Donc l'inégalité (40) conduit à

$$(d+1)c_1(\mathscr{M}\otimes\mathscr{P})c_1(\mathscr{M})^d\geqslant c_1(\mathscr{M}\otimes\mathscr{P})^{d+1}+dc_1(\mathscr{M})^{d+1},$$

qui implique (41). □

Corollaire 4.9. — *On suppose que $\mathscr{X}$ est une surface. Si $\mathscr{P}$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible tel que* $\deg(c_1(\mathscr{P}|_{\mathscr{X}_K}))=0$. *Alors on a* $\deg(c_1(\mathscr{P})^2)\leqslant 0$.

Démonstration. — Soient $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible tel que $\deg(c_1(\mathscr{M}|_{\mathscr{X}_K}))>0$, et $\mathscr{L}=\mathscr{P}\otimes\mathscr{M}$. On a $\deg(c_1(\mathscr{L}|_{\mathscr{X}_K}))>0$. L'inégalité (40) conduit à

$$2\deg(c_1(\mathscr{L})c_1(\mathscr{M}))\geqslant\deg(c_1(\mathscr{L})^2)+\deg(c_1(\mathscr{M})^2),$$

d'où $\deg(c_1(\mathscr{P})^2)\leqslant 0$. □

Remarque 4.10. — On suppose que $\mathscr{X}$ est une surface. Il est possible de démontrer le corollaire 4.9 directement, en s'appuyant sur une reformulation dans le cadre des corps de fonctions des méthodes de Faltings [15] et Hriljac [20] et en utilisant le plongement de $\mathscr{X}_K$ dans sa jacobienne et la hauteur de Néron-Tate. Un des rapporteurs a proposé une approche plus géométrique pour démontrer directement le corollaire 4.9 dans le cas où le corps de base est de caractéristique 0 (cela fournit aussi une autre preuve pour l'inégalité (38) car elle est équivalente au corollaire 4.9), que je cite ci-dessous.

Soient η le point générique de C et $\overline{\eta}$ le point géométrique de C correspondant à η. Soit g le genre de $\mathscr{X}_\eta$. Quitte à faire un changement de base par une k-courbe projective régulière qui est finie sur C, on peut supposer qu'il existe un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible $\mathscr{E}$ tel que $\deg(c_1(\mathscr{E}_\eta))=g-1$*. D'après* [14, Prop. 5.15]*, pour un élément générique $\mathscr{Q}\in\mathrm{Pic}^0(\mathscr{X}_{\overline{\eta}})$, on a*

$$H^0(\mathscr{X}_{\overline{\eta}},\mathscr{E}_{\overline{\eta}}\otimes\mathscr{Q})=H^1(\mathscr{X}_{\overline{\eta}},\mathscr{E}_{\overline{\eta}}\otimes\mathscr{Q})=0.$$

En outre, le lieu dans $\mathrm{Pic}^0(\mathscr{E}_{\overline{\eta}}\otimes\mathscr{Q})$ des $\mathscr{O}_{\mathscr{X}_{\overline{\eta}}}$-modules inversibles $\mathscr{E}_{\overline{\eta}}\otimes\mathscr{Q}$ tels que $H^0(\mathscr{X}_{\overline{\eta}},\mathscr{E}_{\overline{\eta}}\otimes\mathscr{Q})\neq 0$ correspond au diviseur thêta, qui ne contient qu'un nombre fini de points rationnels (d'après la conjecture démontrée de Mordell-Lang). Cela montre que $H^0(\mathscr{X}_\eta,\mathscr{E}_\eta\otimes\mathscr{P}_\eta^{\otimes n})=0$ pour tout sauf un nombre fini de $n\in\mathbb{N}$. De même, par la dualité de Serre et le fait que $\deg(\mathscr{E}_\eta)=g-1$*, on obtient que $H^1(\mathscr{X}_\eta,\mathscr{E}_\eta\otimes\mathscr{P}_\eta^{\otimes n})=0$ pour tout sauf un nombre fini de n. On en déduit que, pour tout sauf un nombre fini de $n\in\mathbb{N}$, on a*

$$\pi_*(\mathscr{E}\otimes\mathscr{P}^{\otimes n})=0\quad\textit{et}\quad(R^1\pi_*(\mathscr{E}\otimes\mathscr{P}^{\otimes n}))_\eta=0.$$

On conclut alors, en utilisant le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch, que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}c_1(\mathscr{P})^2&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\chi(\mathscr{E}\otimes\mathscr{P}^{\otimes n})}{n^2}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\Big(\chi(\pi_*(\mathscr{E}\otimes\mathscr{P}^{\otimes n}))-\chi(R^1\pi_*(\mathscr{E}\otimes\mathscr{P}^{\otimes n}))\Big)\\&=-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{length}(R^1\pi_*(\mathscr{E}\otimes\mathscr{P}^{\otimes n}))\leqslant 0.\end{aligned}$$

Revenons à l'inégalité (37). Il s'avère que cette inégalité reste satisfaite lorsque l'on multiplie $\mathscr{M}$ (ou $\mathscr{L}$) par le tiré en arrière par π d'un $\mathscr{O}_C$-module inversible. En particulier, pour montrer (37), il suffit de traiter le cas où $\mathrm{vol}_\chi(\mathscr{L})=\mathrm{vol}(\mathscr{L})>0$, $\mathrm{vol}_\chi(\mathscr{M})=\mathrm{vol}(\mathscr{M})>0$ et $\mathrm{vol}_\chi(\mathscr{L}\otimes\mathscr{M})=\mathrm{vol}(\mathscr{L}\otimes\mathscr{M})>0$. Par le théorème d'approximation de Fujita, on peut se ramener au cas où $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}$ sont numériquement effectifs, où la preuve comme ci-dessus s'applique (dans le cas des surfaces).

L'approche décrite dans l'article établit un nouveau lien entre des inégalités de nombres d'intersection et la géométrie convexe. Elle suggère que l'intervention des corps d'Okounkov permet de raffiner certaines inégalités classiques, et la qualité du raffinement dépend du choix de la théorie des corps d'Okounkov (la différence de ces choix ne fait pas partie du plan de ce travail). Ce phénomène est significatif notamment quand $d \geqslant 2$ (si $d = 1$, les corps d'Okounkov sont des intervalles fermés et bornés et l'application Δ de corps d'Okounkov transforme le produit tensoriel en somme de Minkowski). Il est plausible qu'un choix « optimal » de la théorie des corps d'Okounkov sera découvert, qui conduira à des résultats plus explicites sur la comparaison des nombres d'intersection en dimension supérieure.

4.4. Applications : cas de corps de nombres. — Dans cette sous-section, on suppose que K est un corps de nombres et X est un K-schéma projectif et géométriquement intègre. Pour toute place $v \in M_K$, on désigne par X_v^{an} l'espace analytique associé au K_v-schéma $X_v := X \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec} K_v$. Ensemblistement, X_v^{an} est la limite inductive du foncteur de la catégorie des extensions valuées de K_v (i.e. extension du corps K_v muni d'une valeur absolue qui prolonge $|\cdot|_v$). La propriété universelle de la limite inductive induit une application $j_v : X_v^{\mathrm{an}} \to X_v$. La topologie la moins fine sur X_v^{an} qui rend continue cette application est appelée *topologie de Zariski*. Berkovich [2] a défini une autre topologie, plus fine que la topologie de Zariski comme suit. Si U est un ouvert du schéma X_v et si f est une fonction régulière sur U, pour tout point $x \in U^{\mathrm{an}} = j_v^{-1}(U)$, la fonction régulière f induit par réduction un élément $f(x)$ dans le corps résiduel de $j_v(x)$ (qui est une extension valuée de K_v). On désigne par $|f|_v$ la fonction sur U^{an} qui envoie x sur la valeur absolue de $f(x)$. La topologie de Berkovich est définie comme la topologie la moins fine qui rend continues l'application j_v et toutes les fonctions de la forme $|f|_v$, où f parcourt l'ensemble des fonctions régulières sur les ouverts de X_v. L'espace X_v^{an} muni de la topologie de Berkovich est séparé et compact. On renvoie les lecteurs à l'exposé de Ducros [13] au séminaire de Bourbaki pour une introduction à la théorie de Berkovich, et à l'ouvrage [2] de Berkovich pour plus de détails.

On désigne par $\mathscr{C}^0_{X_v^{\mathrm{an}}}$ le faisceau d'anneaux des fonctions continues sur X_v^{an}. Soit $\widehat{C}^0(X_v^{\mathrm{an}})$ la limite inductive des $\mathscr{C}^0_{X_v^{\mathrm{an}}}(U^{\mathrm{an}})$, où U parcourt l'ensemble ordonné (par la relation d'inclusion) des ouverts non vides de X_v. Rappelons que, si U est un ouvert non vide de X_v, alors U^{an} est dense dans X_v^{an} pour la topologie de Berkovich. En particulier, l'homomorphisme canonique $\mathscr{C}^0_{X_v^{\mathrm{an}}}(U^{\mathrm{an}}) \to \widehat{C}^0(X_v^{\mathrm{an}})$ est injectif. Si un élément de $\widehat{C}^0(X_v^{\mathrm{an}})$ appartient à l'image de cet homomorphisme, on dit qu'il *s'étend en une fonction continue sur* U^{an}.

Si f est une fonction régulière sur X_v, elle s'identifie à une fonction régulière sur un ouvert non vide U de X_v et donc la fonction continue $|f|_v$ sur U^{an} détermine un élément dans $\widehat{C}^0(X_v^{\mathrm{an}})$. Si f est non nulle, quitte à réduire U on peut supposer que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in U^{\mathrm{an}}$. Ainsi $\ln|f|_v$ est une fonction continue sur U^{an} et donc détermine un élément de $\widehat{C}^0(X_v^{\mathrm{an}})$. On obtient alors un homomorphisme de $R(X_v)^\times$ vers $\widehat{C}^0(X_v^{\mathrm{an}})$, où $R(X_v)$ désigne le corps des fonctions rationnelles sur X_v. Cet homomorphisme induit un homomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de $R(X_v)^\times_{\mathbb{R}} := R(X_v)^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ vers $\widehat{\mathscr{C}}(X_v^{\mathrm{an}})$.

Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur sur X. Il induit par changement de corps un $\mathbb{R}$-diviseur D_v sur X_v. On dit qu'un élément $f \in R(X_v)^\times_{\mathbb{R}}$ définit D_v sur un ouvert U de X_v si on peut écrire D_v sous la forme $\lambda_1 D_1 + \cdots + \lambda_n D_n$, où $D_1, \ldots, D_n$ sont des diviseurs de Cartier sur X_v, et s'il existe des éléments $f_1, \ldots, f_n$ de $R(X_v)^\times$ tels que f_i définisse D_i sur U et que $f = f_1^{\lambda_1} \cdots f_n^{\lambda_n}$. On appelle *fonction de Green* de D en v tout élément $g_v \in \widehat{C}^0(X_v^{\mathrm{an}})$ tel que, pour tout $f \in R(X_v)^\times_{\mathbb{R}}$ qui définit D_v sur un ouvert non vide U de X_v, l'élément $g_v + \ln|f|_v$ s'étende en une fonction continue sur U^{an}. Rappelons que, pour toute fonction rationnelle $s \in H^0(D_v)$, l'élément $|s|_v \mathrm{e}^{-g_v}$ de $\widehat{C}^0(X_v^{\mathrm{an}})$ s'étend en une fonction continue et positive sur X_v^{an} (cf. [28, Prop. 2.1.3]). On note $\|s\|_{g_v,\sup}$ la valeur maximale de cette fonction. Il s'avère que $\|\cdot\|_{g_v,\sup}$ définit une norme sur $H^0(D) \otimes_K K_v$.

Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur sur X. On appelle *modèle entier* de (X, D) tout couple $(\mathscr{X}, \mathscr{D})$ où $\mathscr{X}$ est un $\mathscr{O}_K$-schéma projectif et plat tel que $\mathscr{X}_K = X$, ainsi qu'un $\mathbb{R}$-diviseur $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{D}|_X = D$, où $\mathscr{O}_K$ est l'anneau des entiers algébriques dans K. Si x est un point de X_v^{an}, alors le corps résiduel $\kappa(x)$ de $j_v(x)$ est canoniquement muni d'une valeur absolue $|\cdot|_x$ qui prolonge $|\cdot|_v$. Lorsque v est une place non archimédienne, on désigne par $\kappa(x)^\circ$ l'anneau de valuation de $\kappa(x)$. Le critère valuatif de propreté montre qu'il existe un unique $\mathscr{O}_{K,v}$-morphisme $\operatorname{Spec}\kappa(x)^\circ \to \mathscr{X}$ qui prolonge le K-morphisme $\operatorname{Spec}\kappa(x) \to X$ déterminé par le point x. Dans le cas où $j_v(x)$ est en dehors du support de D_v, le tiré en arrière de $\mathscr{D}$ par le morphisme $\operatorname{Spec}\kappa(x)^\circ \to \mathscr{X}$ est bien défini. On désigne par $g_{(\mathscr{X},\mathscr{D}),v}(x)$ sa multiplicité par rapport à l'idéal maximal de $\kappa(x)^\circ$. La fonction $g_{(\mathscr{X},\mathscr{D}),v}$, qui est bien définie et continue sur un ouvert Zariski non vide de X_v^{an}, détermine un élément de $\widehat{C}^0(X_v^{\mathrm{an}})$, qui est une fonction de Green de D en v. On l'appelle *fonction de Green de D en v* associée au modèle entier $(\mathscr{X}, \mathscr{D})$.

On travaille dans le cadre des $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques développé par Moriwaki [28]. Par $\mathbb{R}$-*diviseur adélique* sur X, on entend la donnée $\overline{D} = (D, (g_v)_{v \in M_K})$ d'un $\mathbb{R}$-diviseur de Cartier D muni d'une famille de fonctions de Green, où chaque g_v est une fonction de Green de D en v. On demande aussi qu'il existe un modèle entier $(\mathscr{X}, \mathscr{D})$ de (X, D) tel que $g_v = g_{(\mathscr{X},\mathscr{D}),v}$ pour toute sauf un nombre fini de $v \in M_K$. Il s'avère que l'espace vectoriel $H^0(D)$ muni des normes $\|\cdot\|_{g_v,\sup}$ forme un fibré vectoriel adélique sur K. Rappelons que les volume et χ-volume arithmétiques de $\overline{D}$ sont définis par

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{D}) := \limsup_{n \to +\infty} \frac{\widehat{h}^0(n\overline{D})}{n^{d+1}/(d+1)!}$$

et

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{D}) := \limsup_{n \to +\infty} \frac{\widehat{\deg}(H^0(nD), (\|\cdot\|_{ng_v,\sup}))}{n^{d+1}/(d+1)!}$$

respectivement, où

$$\widehat{h}^0(n\overline{D}) := \ln\Big(\mathrm{card}\Big\{ s \in H^0(nD) \;:\; \sup_{v \in M_K} \|s\|_{ng_v,\sup} \leqslant 1 \Big\}\Big)$$

et

$$\widehat{\deg}(H^0(nD), (\|\cdot\|_{ng_v,\sup})_{v \in M_K}) := \sum_{v \in M_K} n_v \ln \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_{r_n}\|_{ng_v,\sup,\det},$$

$(s_1,\ldots,s_{r_n})$ étant une base de $H^0(nD)$. Dans le cas où $\overline{D}$ est relativement numériquement effectif, i.e. D est numériquement effectif et les fonctions de Green g_v sont pluri-sous-harmoniques (voir [28, § 0.2] pour le cas non archimédien), il résulte du théorème de Hilbert-Samuel arithmétique que $\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{D})$ s'identifie au nombre d'intersection $\widehat{\deg}(\overline{D}^{d+1})$ (voir [28, § 4.5] pour la définition du nombre d'intersection des $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques). Si de plus la hauteur de tout point algébrique de X par rapport à $\overline{D}$ est positive (i.e. $\overline{D}$ est numériquement effectif), on a $\widehat{\deg}(\overline{D}^{d+1})=\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{D})=\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{D})$. On renvoie les lecteurs à [28, Th. 5.3.2] pour une démonstration.

Lemme 4.11. — *Soit $\overline{D}=(D,(g_v)_{v\in M_K})$ un $\mathbb{R}$-diviseur adélique tel que D soit un $\mathbb{R}$-diviseur gros. Soit $\overline{V}_\bullet(\overline{D})$ le système linéaire gradué en fibrés adéliques $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}(H^0(nD),(\|\cdot\|_{g_v,\sup})_{v\in M_K})$. Alors on a*

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{V}_\bullet(\overline{D}))=\widehat{\mathrm{vol}}(D),\quad \widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{V}_\bullet(\overline{D}))=\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(D).\tag{42}$$

Démonstration. — Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $r_n=\mathrm{rg}_K(H^0(nD))$ Comme D est un $\mathbb{R}$-diviseur gros, on a

$$r_n=\mathrm{vol}(D)n^d+o(n^d)\ \text{et donc}\ \ln(r_n)=O(\ln(n)),\quad n\to+\infty.$$

En outre, comme les fonctions de Green g_v proviennent du même modèle entier de (X,L) pour toute sauf un nombre fini de places v, il existe un sous-ensemble fini S de M_K tel que la norme $\|\cdot\|_{ng_v,\sup}$ soit pure pour tout $n\in\mathbb{N}$ et toute $v\in M_K\smallsetminus S$. Les égalités (42) résultent donc des estimations (27) et (28). □

De manière analogue au cas des corps de fonctions, le théorème 4.3 conduit au résultat suivant.

Théorème 4.12. — *Soient $\overline{D}$ et $\overline{E}$ deux $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques sur X tels que D et E soient des $\mathbb{R}$-diviseurs gros. On suppose que, ou bien X est une courbe projective, ou bien les classes d'équivalence linéaire de D et E sont colinéaires, alors on a*

$$\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{D}+\overline{E})}{\mathrm{vol}(D+E)}\geqslant\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{D})}{\mathrm{vol}(D)}+\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(E)}{\mathrm{vol}(E)}.\tag{43}$$

Démonstration. — De manière analogue au théorème 4.7, chacune des deux conditions du théorème montre que le couple $(\Delta(D),\Delta(E))$ admet une mesure minkowskienne et que $\Delta(D)+\Delta(E)=\Delta(D+E)$. Le théorème 4.12, combiné avec le lemme précédent, conduit donc à l'inégalité (43). □

Corollaire 4.13. — *Soit $\overline{P}$ un $\mathbb{R}$-diviseur adélique intégrable (c'est-à-dire que $\overline{P}$ peut s'écrire comme la différence de deux $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques relativement numériquement effectifs) sur X. On suppose que P est un diviseur principal. Alors, pour tout $\mathbb{R}$-diviseur adélique $\overline{E}$ tel que $\overline{E}$ et $\overline{E}+\overline{P}$ soient relativement numériquement effectifs, on a*

$$\sum_{i=2}^{d+1}\binom{d+1}{i}\widehat{\deg}(\overline{P}^i\cdot\overline{E}^{d+1-i})\leqslant 0\tag{44}$$

Démonstration. — Soit $\overline{D}=\overline{E}+\overline{P}$. On applique le théorème 4.12 à $\overline{D}$ et $n\overline{E}$ pour $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 1$. En utilisant la condition que ces $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques sont relativement numériquement effectifs, on obtient

$$\sum_{i=0}^{d+1}\binom{d+1}{i}n^{d+1-i}\,\widehat{\deg}(\overline{D}^i\cdot\overline{E}^{d+1-i})\geqslant(n+1)^d\,\widehat{\deg}(\overline{D}^{d+1})+n(n+1)^d\,\widehat{\deg}(\overline{E}^{d+1}),$$

qui conduit à (par passage à la limite quand $n\to+\infty$)

$$(d+1)\ \widehat{\deg}(\overline{D}\cdot\overline{E}^d)\geqslant\widehat{\deg}(\overline{D}^{d+1})+d\ \widehat{\deg}(\overline{E}^{d+1}).$$

Comme $\overline{D}=\overline{E}+\overline{P}$, on obtient

$$(d+1)\,\widehat{\deg}(\overline{P}\cdot\overline{E}^d)+(d+1)\,\widehat{\deg}(\overline{E}^{d+1})\geqslant\widehat{\deg}(\overline{D}^{d+1})+d\ \widehat{\deg}(\overline{E}^{d+1}),$$

qui implique que

$$(d+1)\,\widehat{\deg}(\overline{P}\cdot\overline{E}^d)\geqslant\widehat{\deg}(\overline{D}^{d+1})-\widehat{\deg}(\overline{E}^{d+1})=\sum_{i=1}^{d+1}\binom{d+1}{i}\widehat{\deg}(\overline{P}^i\cdot\overline{E}^{d+1-i}).$$

On en déduit l'inégalité (44). □

Corollaire 4.14. — *On suppose que X est une courbe. Si $\overline{P}$ est un $\mathbb{R}$-diviseur adélique relativement numériquement effectif et si* $\deg(P)=0$, *alors on a* $\widehat{\deg}(\overline{P}^2)\leqslant 0$.

Démonstration. — Soit $\overline{E}$ un $\mathbb{R}$-diviseur adélique relativement numériquement effectif, tel que $\deg(E)>0$. Soit $\overline{D}=\overline{E}+\overline{P}$. L'inégalité (43) conduit à

$$\widehat{\deg}(\overline{D}^2)+\widehat{\deg}(\overline{E}^2)+2\,\widehat{\deg}(\overline{D}\cdot\overline{E})\geqslant 2(\widehat{\deg}(\overline{D}^2)+\widehat{\deg}(\overline{E}^2)).$$

On en déduit

$$2\,\widehat{\deg}(\overline{E}^2)+2\,\widehat{\deg}(\overline{P}\cdot\overline{E})\geqslant 2\,\widehat{\deg}(\overline{E}^2)+2\,\widehat{\deg}(\overline{P}\cdot\overline{E})+\widehat{\deg}(\overline{P}^2),$$

et donc $\widehat{\deg}(\overline{P}^2)\leqslant 0$. □

Remarque 4.15. — Dans le corollaire 4.14, on retrouve le résultat principal de Faltings [15] et Hriljac [20]. En outre, de manière analogue au cas des corps de fonctions (voir la remarque 4.10), on peut déduire l'inégalité (43) (dans le cas où $d=1$) du théorème d'indice de Hodge à la Faltings-Hriljac, en utilisant le théorème d'approximation de Fujita arithmétique (cf. [37, 7]).

On conclut ce paragraphe par un analogue du théorème 4.12 pour la fonction volume. Pour tout $\mathbb{R}$-diviseur adélique $\overline{D}$ gros (i.e. $\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{D})>0$), on note

$$V_\bullet^0(\overline{D}):=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Vect}_K\Big(\Big\{s\in H^0(nD)\ :\ \sup_{v\in M_K}\|s\|_{ng_v,\sup}\leqslant 1\Big\}\Big),$$

et on désigne par $\Delta_+(\overline{D})$ le corps d'Okounkov de ce système linéaire gradué, et par $\mathrm{vol}_+(\overline{D})$ son volume.

Théorème 4.16. — *Soient $\overline{D}$ et $\overline{E}$ deux $\mathbb{R}$-diviseurs adéliques gros sur X. On a*

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{D}+\overline{E})\geqslant\frac{d!\ \mathrm{vol}_d(\Delta_+(\overline{D})+\Delta_+(\overline{E}))}{\rho(\Delta_+(\overline{D}),\Delta_+(\overline{E}))}\Big(\frac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{D})}{\mathrm{vol}_+(\overline{D})}+\frac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{E})}{\mathrm{vol}_+(\overline{E})}\Big)\tag{45}$$

Démonstration. — Le résultat provient de l'inégalité (32) et du lemme 4.11. □

4.5. Perspectives. — Les résultats que l'on a présentés permettent d'unifier l'étude des inégalités d'indice de Hodge dans les cadres géométrique et arithmétique par un résultat abstrait sur les systèmes linéaires gradués filtrés. La méthode proposée dans cet article est basée sur la géométrie des corps convexes et a une nature probabiliste. Le théorème 2.3 sur l'inégalité d'indice de Hodge, dont la démonstration est particulièrement simple, conduit naturellement aux inégalités d'indice de Hodge géométrique et arithmétique, en s'appuyant sur l'interprétation probabiliste des invariants géométriques. En outre, elle indique une autre voie pour généraliser ces inégalités aux cas de dimension supérieure, qui ouvre des perspectives de recherche.

(1) Dans le cas des variétés toriques, les corps d'Okounkov correspondent aux polytopes qui définissent des faisceaux inversibles. Il est plus facile de rendre explicites les corps convexes dans le théorème 4.12. Un critère d'existence de mesure minkowskienne pour un couple de polytopes conduira à des inégalités forte sur des nombres d'intersection arithmétique des diviseurs adéliques toriques, en faisant des liens avec les résultats de [6].

(2) Il s'avère que l'inégalité (6) est plus fine que l'inégalité d'indice de Hodge usuelle (1) pour une surface projective (sans structure relativement à une courbe). Il y a plus de situations où cette inégalité devient une égalité. La démonstration du théorème 2.3 suggère que la condition d'égalité dans l'inégalité d'indice de Hodge relative conduit à des contraintes tout à fait intéressantes sur les systèmes linéaires gradués arithmétiques à examiner dans le futur.

Annexe

Lemme A.1. — *Soient Ω un ensemble non vide, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{H}$ deux familles de fonctions bornées et positives sur Ω telles que $\mathscr{C} \subset \mathscr{H}$. On suppose que la famille $\mathscr{C}$ satisfait aux conditions suivantes :*

(1) *la fonction constante* 1 *appartient à $\mathscr{C}$,*

(2) *$\mathscr{C}$ est stable par combinaison linéaire à coefficients positifs et par multiplication,*

(3) *si f et g sont deux éléments de $\mathscr{C}$, alors $|f-g| \in \mathscr{C}$.*

On suppose de plus que la famille $\mathscr{H}$ est stable par convergence uniformément bornée, autrement dit, pour toute suite uniformément bornée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathscr{H}$ qui converge simplement, la limite de la suite appartient à $\mathscr{H}$. Alors la famille $\mathscr{H}$ contient toutes les fonctions bornées, positives et $\sigma(\mathscr{C})$-mesurables, où $\sigma(\mathscr{C})$ est la tribu engendrée par $\mathscr{C}$.

Remarque A.2. — Le lemme ressemble beaucoup aux théorèmes de classe monotone classiques sous forme fonctionnelle, et sa démonstration s'inspire des techniques présentées dans la littérature, notamment [12, I.21–22]. Cependant, dans la majeure partie de la littérature, la famille $\mathscr{C}$ est un espace vectoriel au lieu d'un cône de fonctions positives, et donc ces théorèmes ne peuvent pas être directement appliqués à la situation décrite dans la remarque 2.1. Bien que le théorème de classe monotone présenté dans [36, § 2.2] présente une forme similaire au lemme A.1, on ne peut pas l'appliquer à la situation de la remarque 2.1 non plus. En effet, le théorème présenté dans [36] demande que $\mathscr{H}$ soit une λ-famille (en particulier, si f et g sont deux fonctions de $\mathscr{H}$ telles que $f \geqslant g$, alors $f - g \in \mathscr{H}$). A priori, il n'y a aucune raison que cette condition soit satisfaite par l'ensemble des fonctions boréliennes et bornées vérifiant (9). On est donc obligé d'affaiblir les conditions algébriques sur la famille $\mathscr{H}$ et, en contrepartie, imposer une condition d'invariance par convergence simple, qui est plus forte que l'invariance par convergence monotone. De plus, le lemme de Zorn intervient dans la démonstration, contrairement à la démonstration de [1, Th. I.3.5] par exemple, où il y a une condition algébrique supplémentaire sur la famille $\mathscr{H}$ (espace vectoriel sur $\mathbb{R}$).

Démonstration du lemme A.1. — On désigne par Θ la collection des sous-ensembles $\mathscr{H}'$ de $\mathscr{H}$ qui contient $\mathscr{C}$ et qui satisfont aux conditions (1)–(3) dans l'énoncé du lemme. La collection Θ est non vide puisque $\mathscr{C} \in \Theta$. Elle est en outre ordonnée par la relation d'inclusion. Si Θ_0 est un sous-ensemble de Θ qui est totalement ordonné, alors la réunion des ensembles dans Θ_0 est un élément de Θ, donc est un majorant de Θ_0 dans Θ. Par le lemme de Zorn, il existe un élément $\mathscr{H}_0 \in \Theta$ qui est maximal pour la relation d'inclusion. Cette maximalité montre aussi que la famille $\mathscr{H}_0$ est stable par convergence uniformément bornée. En outre, la condition (3) montre que, si f et g sont deux fonctions dans $\mathscr{H}_0$, alors

$$f \wedge g := \min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2} \in \mathscr{H}_0.$$

Soit $\mathscr{F}$ la famille des sous-ensembles A de Ω tels que $1\!\!1_A \in \mathscr{H}_0$. Alors $\mathscr{F}$ est une tribu car elle est un π-système (c'est-à-dire que $A \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{F}$ entraînent $A \cap B \in \mathscr{F}$) et en même temps un λ-système(1). Si f est une fonction dans $\mathscr{C}$ et t est un nombre réel > 0, alors $t^{-1} f \wedge 1 \in \mathscr{H}_0$ puisque $\mathscr{H}_0$ est stable par l'opérateur $\wedge$. Comme la suite $\big((t^{-1} f \wedge 1)^n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $1\!\!1_{\{f \geqslant t\}}$, on obtient $\{f \geqslant t\} \in \mathscr{F}$. En particulier, toute fonction $f \in \mathscr{C}$ est $\mathscr{F}$-mesurable, d'où $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{F}$.

Il reste enfin à vérifier que toute fonction positive, bornée et $\mathscr{F}$-mesurable appartient à $\mathscr{H}_0$. Soit f une telle fonction. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n - 1} \frac{k}{2^n} 1\!\!1_{\{k/2^n \leqslant f < (k+1)/2^n\}} + n 1\!\!1_{\{f \geqslant n\}}.$$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, contenue dans $\mathscr{H}_0$ et converge vers f. On obtient $f \in \mathscr{H}_0$. Le résultat est donc démontré. $\square$

(1) C'est-à-dire que $\mathscr{F}$ vérifie les conditions suivantes : (i) $\Omega \in \mathscr{F}$; (ii) si $A \in \mathscr{F}$, $B \in \mathscr{F}$ et $A \subset B$, alors $B \smallsetminus A \in \mathscr{F}$; (iii) si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathscr{F}$, alors la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathscr{F}$.

Références

[1] Ph. Barbe & M. Ledoux – *Probabilité*, Collection Enseignement Sup Mathématiques, vol. 33, EDP Sciences, Les Ulis, 2007.

[2] V. G. Berkovich – *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Math. Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1990.

[3] S. Bobkov & M. Madiman – « Reverse Brunn-Minkowski and reverse entropy power inequalities for convex measures », *J. Functional Analysis* **262** (2012), no. 7, p. 3309–3339.

[4] J.-B. Bost – « Potential theory and Lefschetz theorems for arithmetic surfaces », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **32** (1999), no. 2, p. 241–312.

[5] S. Boucksom & H. Chen – « Okounkov bodies of filtered linear series », *Compositio Math.* **147** (2011), no. 4, p. 1205–1229.

[6] J. I. Burgos Gil, P. Philippon & M. Sombra – *Arithmetic geometry of toric varieties. Metrics, measures and heights*, Astérisque, vol. 360, Société Mathématique de France, Paris, 2014.

[7] H. Chen – « Arithmetic Fujita approximation », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **43** (2010), no. 4, p. 555–578.

[8] ———, « Géométrie d'Arakelov : théorèmes de limite et comptage des points rationnels », Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot, 2011.

[9] ———, « Majorations explicites des fonctions de Hilbert-Samuel géométrique et arithmétique », *Math. Z.* **279** (2015), no. 1-2, p. 99–137.

[10] T. M. Cover & Z. Zhang – « On the maximum entropy of the sum of two dependent random variables », *IEEE Trans. Information Theory* **40** (1994), no. 4, p. 1244–1246.

[11] S. D. Cutkosky – « Asymptotic multiplicities of graded families of ideals and linear series », *Advances in Math.* **264** (2014), p. 55–113.

[12] C. Dellacherie & P.-A. Meyer – *Probabilités et potentiel*, Hermann, Paris, 1975, Chap. I à IV.

[13] A. Ducros – « Espaces analytiques p-adiques au sens de Berkovich », in *Séminaire Bourbaki. Vol. 2005/06*, Astérisque, vol. 311, Société Mathématique de France, Paris, 2007, Exp. No. 958, p. 137–176.

[14] D. Eisenbud – *The geometry of syzygies*, Graduate Texts in Math., vol. 229, Springer-Verlag, New York, 2005.

[15] G. Faltings – « Calculus on arithmetic surfaces », *Ann. of Math. (2)* **119** (1984), no. 2, p. 387–424.

[16] T. Fujita – « Approximating Zariski decomposition of big line bundles », *Kodai Math. J.* **17** (1994), no. 1, p. 1–3.

[17] J. Gallier – *Geometric methods and applications*, 2e éd., Texts in Appl. Math., vol. 38, Springer, New York, 2011.

[18] É. Gaudron – « Pentes de fibrés vectoriels adéliques sur un corps global », *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **119** (2008), p. 21–95.

[19] H. Gillet & C. Soulé – « On the number of lattice points in convex symmetric bodies and their duals », *Israel J. Math.* **74** (1991), no. 2-3, p. 347–357.

[20] P. Hriljac – « Heights and Arakelov's intersection theory », *Amer. J. Math.* **107** (1985), no. 1, p. 23–38.

[21] H. Ikoma – « Boundedness of the successive minima on arithmetic varieties », *J. Algebraic Geom.* **22** (2013), no. 2, p. 249–302.

[22] K. Kaveh & A. G. Khovanskii – « Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory », *Ann. of Math. (2)* **176** (2012), no. 2, p. 925–978.

[23] K. Künnemann – « Some remarks on the arithmetic Hodge index conjecture », *Compositio Math.* **99** (1995), no. 2, p. 109–128.

[24] R. Lazarsfeld – *Positivity in algebraic geometry. I*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 48, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[25] R. Lazarsfeld & M. Mustaţă – « Convex bodies associated to linear series », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **42** (2009), no. 5, p. 783–835.

[26] T. Luo – « Riemann-Roch type inequalities for nef and big divisors », *Amer. J. Math.* **111** (1989), no. 3, p. 457–487.

[27] A. Moriwaki – « Hodge index theorem for arithmetic cycles of codimension one », *Math. Res. Lett.* **3** (1996), no. 2, p. 173–183.

[28] ———, *Adelic divisors on arithmetic varieties*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 242, no. 1144, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2016.
[29] A. Okounkov – « Brunn-Minkowski inequality for multiplicities », *Invent. Math.* **125** (1996), no. 3, p. 405–411.
[30] C. A. Rogers & G. C. Shephard – « Convex bodies associated with a given convex body », *J. London Math. Soc. (2)* **33** (1958), p. 270–281.
[31] D. Roy & J. L. Thunder – « An absolute Siegel's lemma », *J. reine angew. Math.* **476** (1996), p. 1–26.
[32] C. E. Shannon – « A mathematical theory of communication », *AT&T Bell Labs. Tech. J.* **27** (1948), p. 379–423, 623–656.
[33] A. J. Stam – « Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon », *Inform. and Control* **2** (1959), p. 101–112.
[34] S. Takagi – « Fujita's approximation theorem in positive characteristics », *J. Math. Kyoto Univ.* **47** (2007), no. 1, p. 179–202.
[35] J. L. Thunder – « An adelic Minkowski-Hlawka theorem and an application to Siegel's lemma », *J. reine angew. Math.* **475** (1996), p. 167–185.
[36] J. Yan – *Lectures on measure theory*, 2e éd., Lect. series Chinese Acad. Sci., Science Press, Beijing, 2004.
[37] X. Yuan – « On volumes of arithmetic line bundles », *Compositio Math.* **145** (2009), no. 6, p. 1447–1464.
[38] ———, « Algebraic dynamics, canonical heights and Arakelov geometry », in *Fifth International Congress of Chinese Mathematicians*, AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 51, 2e partie, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2012, p. 893–929.
[39] X. Yuan & S.-W. Zhang – « The arithmetic Hodge index theorem for adelic line bundles I : number fields », *Math. Ann.* (2016), online, `arXiv:1304.3538`.
[40] S.-W. Zhang – « Positive line bundles on arithmetic varieties », *J. Amer. Math. Soc.* **8** (1995), no. 1, p. 187–221.

Manuscrit reçu le 31 mars 2015
accepté le 25 juin 2016

Huayi Chen, Université Grenoble Alpes, Institut Fourier
F-38000 Grenoble, France
E-mail : `huayi.chen@ujf-grenoble.fr`
Url : `www-fourier.ujf-grenoble.fr/~huayi`