Math. Z.
DOI 10.1007/s00209-014-1359-6

**Mathematische Zeitschrift**

# Majorations explicites des fonctions de Hilbert–Samuel géométrique et arithmétique

**Huayi Chen**

Received: 13 January 2014 / Accepted: 10 June 2014


**Résumé** En utilisant l'approche de $\mathbb{R}$-filtration en géométrie d'Arakelov, on établit des majorations explicites des fonctions de Hilbert–Samuel géométrique et arithmétique pour les fibrés inversibles sur une variété projective et les fibrés inversibles hermitiens sur une variété projective arithmétique.

## Contents



## 1 Introduction

Soient $X$ un schéma projectif et intègre sur un corps $k$, et $L$ un $\mathcal{O}_X$-module inversible. Rappelons que la fonction de Hilbert–Samuel de $L$ est définie comme l'application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ qui envoie $n \in \mathbb{N}$ en $h^0(L^{\otimes n})$, le rang de l'espace des sections globales $H^0(X, L^{\otimes n})$ sur $k$. Le théorème de Riemann–Roch et le théorème d'annihilation de Serre montrent que, si le faisceau $L$ est ample, alors la relation suivante est vérifiée:

$$h^0(L^{\otimes n}) = c_1(L)^{d+1}\frac{n^{d+1}}{(d+1)!} + o(n^{d+1}), \tag{1}$$

H. Chen (✉)
Institut Fourier (UMR 5582), Université Grenoble Alpes, 38402 Saint Martin d'Hères, France
e-mail: huayi.chen@ujf-grenoble.fr

Published online: 24 August 2014

où $d+1$ est la dimension de Krull du schéma $X$, et $c_1(L)^{d+1}$ est le nombre d'auto-intersection de $L$. Le théorème d'approximation de Fujita [15,38] montre que la relation (1) est vérifiée en générale, quitte à remplacer le nombre d'intersection $c_1(L)^{d+1}$ par le volume de $L$, défini comme

$$\mathrm{vol}(L) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{h^0(L^{\otimes n})}{n^{d+1}/(d+1)!}.$$

En d'autres termes, la limite supérieure définissant la fonction volume est en fait une limite.

Il est cependant plus délicat d'étudier l'estimation explicite de la fonction de Hilbert–Samuel qui est valable pour tout entier $n \geqslant 1$. Dans la littérature, différentes approches ont été proposées, souvent sous des conditions de positivité fortes pour le faisceau inversible $L$. On peut consulter par exemple les travaux de Nesterenko [34], Chardin [9] et Sombra [36], où on suppose que le faisceau $L$ est très ample et fixe un plongement de la variété polarisée $(X, L)$ dans un espace projectif. Une majoration explicite de $h^0(L^{\otimes n})$ est ensuite obtenue par récurrence sur la dimension du schéma $X$, en utilisant l'intersection avec des hyperplanes de l'espace projectif. Cette approche a une nature algébrique car le choix d'un plongement de la variété polarisée correspond à un système de générateurs homogènes de l'algèbre graduée des sections globales des puissances tensorielles de $L$. On renvoie les lecteurs vers l'article de Bertrand dans [33, chapitre 9] pour une présentation détaillée de cette méthode. L'approche de Kollár et Matsusaka [27] repose sur la comparaison entre la fonction $h^0$ et la caractéristique d'Euler-Poincaré (somme alternée des rangs des espaces de cohomologie). Cette méthode est relativement plus proche de l'esprit du théorème de Riemann–Roch. On suppose que le schéma $X$ est régulier et que le faisceau $L$ est semi-ample, i.e., une puissance tensorielle de $L$ est sans lieu de base. Un encadrement effectif mais assez compliqué dans le cas de dimension supérieure a été obtenu pour $h^0(L^{\otimes n})$. L'encadrement ne dépend que du nombre d'auto-intersection $c_1(L)^{d+1}$ et le nombre d'intersection $c_1(L)^d c_1(\omega_X)$, où $\omega_X$ est le fibré canonique de $X$.

La fonction de Hilbert–Samuel peut être généralisée dans le cadre de la géométrie d'Arakelov, où on considère une variété arithmétique projective $\mathscr{X}$ (i.e., un schéma intègre, projectif et plat sur Spec $\mathbb{Z}$) et un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur $\mathscr{X}$ muni d'une métrique continue sur $\mathscr{L}(\mathbb{C})$, invariante par la conjugaison complexe (ces données sont appelées un *faisceau inversible hermitien* sur $\mathscr{X}$ et notées comme $\overline{\mathscr{L}}$). Similairement à la situation géométrique, on définit la fonction de Hilbert–Samuel arithmétique de $\overline{\mathscr{L}}$ comme la fonction de $\mathbb{N}$ vers $[0, +\infty[$ qui envoie $n$ en $\widehat{h}^0(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})$, le logarithme du nombre des sections globales de $\mathscr{L}^{\otimes n}$ dont la norme sup est majorée par 1. La suite

$$\frac{\widehat{h}^0(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})}{n^{d+1}/(d+1)!}, \quad n \geqslant 1$$

possède une limite[1] que l'on note comme $\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}})$, et on l'appelle le *volume arithmétique* de $\overline{\mathscr{L}}$. Ici $d$ désigne la dimension relative de $\mathscr{X} \to$ Spec $\mathbb{Z}$ (et donc la dimension de $\mathscr{X}$ est $d+1$). On peut aussi exprimer ce résultat comme une formule asymptotique

$$\widehat{h}^0(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) = \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}}) \frac{n^{d+1}}{(d+1)!} + o(n^{d+1}). \tag{2}$$

Du point de vue birationnel, il est naturel de se demander si on peut obtenir une estimation de $h^0(L^{\otimes n})$ en fonction des invariants birationnels de $L$ (comme par exemple le volume

[1] La convergence de cette suite a été démontrée dans [10]. On peut aussi la déduire du théorème de Fujita arithmétique [12,40].

de $L$). La même question se pose aussi pour la fonction $\widehat{h}^0$ dans le cadre arithmétique. Cependant, les outils que l'on dispose, comme par exemple le théorème d'approximation de Fujita (géométrique ou arithmétique) sous forme actuelle, ne permettent pas de traiter ce problème de façon effective. Il est encore peu probable que les méthodes que l'on a résumées plus haut se généralisent dans la situation birationnelle ou s'adaptent facilement dans le cadre de la géométrie arithmétique. Les résultats arithmétiques sont rares dans la littérature et portent notamment sur les cas où la dimension de la variété arithmétique est petite. On peut consulter par exemple les résultats de Blichfeld [4], Henk [23] et Gaudron [17] pour le cas d'une courbe arithmétique (ces résultats sont basés sur la géométrie des nombres) et le travail de Yuan et Zhang [41] pour le cas d'une surface arithmétique.

Le but principal de cet article est d'établir une majoration effective pour les fonctions de Hilbert–Samuel géométrique et arithmétique en dimension quelconque. La version géométrique du résultat donne une majoration effective de la fonction de Hilbert-Saumuel d'un système linéaire gradué comme la suite, qui correspond au théorème 5.1 dans le paragraphe 5.

**Théorème 1.1** *Soit $X$ un schéma projectif et intègre sur un corps $k$. On désigne par $S$ l'ensemble des systèmes linéaires gradués de faisceaux inversibles sur $X$, qui contiennent des diviseurs amples (voir §3, définition 3.5). Il existe une application $\varepsilon : S \to [0, +\infty[$ que l'on explicitera (voir la fonction $\varepsilon^{\Theta}$ dans §5 infra), qui vérifie les conditions suivantes:*

(a) *si $V_\bullet$ et $V'_\bullet$ sont des systèmes linéaires gradués dans $S$, des faisceaux inversibles $L$ et $L'$ respectivement et si le faisceau inversible $L^\vee \otimes L'$ admet une section effective non-nulle $s$ telle que la multiplication par des puissances de $s$ envoie $V_\bullet$ dans $V'_\bullet$, alors on a $\varepsilon(V_\bullet) \leqslant \varepsilon(V'_\bullet)$;*

(b) *pour tout système linéaire gradué $V_\bullet$ dans $S$, on a*
$$\mathrm{rg}_k(V_1) \leqslant \frac{\mathrm{vol}(V_\bullet)}{(d+1)!} + \varepsilon(V_\bullet),$$
*où $d+1$ est la dimension de Krull de $X$;*

(c) *pour tout système linéaire gradué $V_\bullet$ dans $S$ et tout entier $n \geqslant 1$, on a*
$$\varepsilon(V_\bullet^{(n)}) \leqslant n^d \varepsilon(V_\bullet),$$
*où $V_\bullet^{(n)} = \bigoplus_{m \geqslant 0} V_{nm}$.*

Comparé aux résultats dans la littérature, le théorème 1.1 s'applique à des systèmes linéaires gradués très généraux, et on ne demande pas la condition d'amplitude (ou de semi-amplitude) pour les faisceaux inversibles en question. Le terme d'erreur $\varepsilon(.)$ dépend du choix d'une chaîne de sous-extensions du corps des fonctions rationnelles $k(X)$ sur le corps de base $k$ dont les extensions successives sont de degré de transcendance 1. Ce choix de sous-extensions successives permet d'exprimer certaine version birationnelle du schéma $X$ comme une fibration sur une courbe régulière $C_0$ qui est projective sur Spec $k$ et la réaliser comme la première composante d'un tour $\Theta = (p_i : X_i \to C_i)_{i=0}^d$ de fibrations sur courbes (voir §4 pour la définition de tour de fibrations sur courbes, et la remarque 4.3 pour la construction de $\Theta$ à partir du choix de sous-extensions successives de $k(X)$). La fibration $p_0 : X_0 \to C_0$ permet d'utiliser des méthodes arithmétiques à étudier les systèmes linéaires gradués. En particulier, pour tout système linéaire gradué $V_\bullet$, on peut associer un invariant $\mu_{\max}^{p_0}(V_\bullet)$ qui décrit le comportement asymptotique de la pente maximale de l'image directe de $V_n$ par $p_0$ (voir la définition 3.9). Dans le cas où la caractéristique du corps $k$ est nul, la constante $\varepsilon(V_\bullet)$ est définie par la formule récurssive comme la suite (voir §8, page 41 pour la formule récursive dans le cas où la caractéristique de $k$ est strictement positive)

$$\varepsilon(V_\bullet) := \mu_{\max}^{p_0}(V_\bullet)\varepsilon(W_\bullet) + \left(\frac{\mathrm{vol}(W_\bullet)}{d!} + \varepsilon(W_\bullet)\right)\max(g(C_0/k) - 1, 1),$$

où $W_\bullet$ est la fibre générique de l'image directe de $V_\bullet$ par $p_0$, $g(C_0/k)$ est le genre de la courbe $C_0$ relativement à $k$, et la constante $\varepsilon(W_\bullet)$ est obtenue relativement au tour de fibrations sur courbes $(p_i : X_i \to C_i)_{i=1}^d$. Dans le cas où $X$ est une courbe, c'est-à-dire $d = 0$ et $C_0$ est la normalisation de $X$, la constante $\varepsilon(V_\bullet)$ est définie comme $\max(g(C_0/k) - 1, 1)$.

Pour démontrer le théorème 1.1, le point clé est d'adopter le point de vue arithmétique et la méthode de $\mathbb{R}$-filtration introduite dans [12,13], qui s'applique à la fois dans les cadres géométrique et arithmétique. On considère $X$ comme une fibration au-dessus d'une courbe régulière qui est projective sur $k$. Une telle fibration est toujours réalisable, quitte à remplacer $X$ par une modification birationnelle. On utilise ensuite un argument de nature arithmétique et ramène le problème à un problème similaire pour la fibre générique de $X$, qui est un schéma projectif et intègre de dimension $\dim(X) - 1$ sur le corps de fonctions de la courbe de base. On peut ainsi appliquer la méthode de $\mathbb{R}$-filtration dans la géométrie arithmétique à étudier ce problème (la méthode de $\mathbb{R}$-filtration sera présentée un peu plus loin avec plus de détails dans le cadre arithmétique). La majoration est obtenue par récurrence sur la dimension de $X$, et le majorant dépend du choix d'un tour de fibrations sur courbes d'une modification birationnelle de $X$. Dans le cas où la caractéristique de $k$ est zéro, on peut utiliser la $\mathbb{R}$-filtration de Harder–Narasimhan. Cependant, dans le cas où la caractéristique de $k$ est strictement positif, il faut utiliser la filtration par minima. Le majorant est légèrement plus grand, mais toujours de même ordre de grandeur.

Pour un système linéaire gradué $V_\bullet$ fixé, si on se contente d'obtenir l'existence d'une fonction $F_{V_\bullet} : \mathbb{N} \to +\infty$ telle que $F_{V_\bullet}(n) = O(n^d)$ pour $n \to +\infty$ et que

$$\mathrm{rg}_k(V_n) \leqslant \frac{\mathrm{vol}(V_\bullet)}{(d+1)!}n^{d+1} + F_{V_\bullet}(n),$$

on peut utiliser la théorie des corps d'Okounkov développée dans [26,29] pour relier $V_\bullet$ à un corps convexe $\Delta$ dans $\mathbb{R}^d$. On peut majorer le rang de $V_n$ par le nombre de points à coordonnées entières dans $n\Delta$ et ensuite faire appel à un résultat de Betke et Böröczky [3] pour obtenir la majoration asymptotique. Cependant, cette méthode est inadéquate pour l'application dans la situation arithmétique. En effet, pour obtenir une majoration de la fonction de Hilbert–Samuel arithmétique, il faut appliquer la majoration de la fonction de Hilbert–Samuel géométrique à une famille continue de systèmes linéaires gradués. Cependant, le terme sous-dominant dans la majoration de la fonction de Hilbert–Samuel géométrique obtenue par cette méthode dépend du bord du corps convexe associé au système linéaire gradué. Il est difficile d'obtenir un contrôle explicite et uniforme pour la famille de systèmes linéaires gradués qui apparaissent dans l'étude de la fonction de Hilbert–Samuel arithmétique. En outre, cette méthode ne peut pas être directement appliquée dans la situation arithmétique car dans l'analogue arithmétique du corps d'Okounkov, il n'y a pas de lien entre l'ensemble des sections effectives du faisceau inversible hermitien avec l'ensemble des points de coordonnées entières dans le corps d'Okounkov arithmétique associé.

Pour surmonter cette difficulté, on propose d'utiliser la méthode de $\mathbb{R}$-filtration pour ramener le problème arithmétique en une famille (indexée par $\mathbb{R}$) de problèmes similaires de nature géométrique, où le théorème 1.1 s'applique. On obtient le résultat suivant, qui correspond à une partie du théorème 7.6 dans le paragraphe 7.

**Théorème 1.2** *Soit $\mathscr{X}$ une variété arithmétique projective sur l'anneau des entiers algébriques d'un corps de nombres $K$. Il existe une application $\widehat{\varepsilon}$ que l'on explicitera (voir la fonction $G_{\overline{\mathscr{L}}}$ dans le théorème 7.6 infra), de l'ensemble des faisceaux inversibles hermitiens gros sur $\mathscr{X}$ vers $[0, +\infty[$, qui vérifie les conditions suivantes:*

(a) *si $\overline{\mathscr{L}}$ et $\overline{\mathscr{L}'}$ sont deux faisceaux inversibles hermitiens gros tels que $\overline{\mathscr{L}}^{\vee} \otimes \overline{\mathscr{L}'}$ possède au moins une section effective non-nulle, alors $\widehat{\varepsilon}(\overline{\mathscr{L}}) \leqslant \widehat{\varepsilon}(\overline{\mathscr{L}'})$;*
(b) *pour tout faisceau inversible hermitien gros $\overline{\mathscr{L}}$ sur $\mathscr{X}$, on a*

$$\widehat{h}^0(\overline{\mathscr{L}}) \leqslant \frac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}})}{(d+1)!} + \widehat{\varepsilon}(\overline{\mathscr{L}}),$$

*où $d+1$ est la dimension de Krull du schéma $\mathscr{X}$;*
(c) *pour tout faisceau inversible hermitien gros $\overline{\mathscr{L}}$, on a*

$$\widehat{\varepsilon}(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) = [K:\mathbb{Q}]\frac{\mathrm{vol}(\mathscr{L}_K)}{(d-1)!}n^d\ln(n) + O(n^d).$$

Le terme d'erreur $\widehat{\varepsilon}(\overline{\mathscr{L}})$ peut être précisé par la formule

$$\widehat{\varepsilon}(\overline{\mathscr{L}}) := \widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(\overline{\mathscr{L}})\varepsilon(V_\bullet(\mathscr{L}_{\mathbb{Q}})) + (R+1)\ln(2) + R\ln(R),$$

où $\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(\overline{\mathscr{L}})$ est la pente maximale asymptotique de $\overline{\mathscr{L}}$ (voir §7, pages 34 et 33 pour la définition), $R$ est le rang de $H^0(\mathscr{X},\mathscr{L})$ sur $\mathbb{Z}$, $V_\bullet(\mathscr{L}_{\mathbb{Q}})$ est le système linéaire graduée $\bigoplus_{n\geqslant 0} H^0(\mathscr{X}_{\mathbb{Q}},\mathscr{L}_{\mathbb{Q}})$, et $\varepsilon(.)$ est la fonction mentionnée plus haut dans le théorème 1.1. Si on compare ce théorème aux résultats dans la littérature, il y a deux nouveautés essentielles. Premièrement l'inégalité dans (b) est valable pour le fibré inversible hermitien $\overline{\mathscr{L}}$ lui-même, et on n'a pas besoin de passer à une puissance tensorielle d'exposant suffisamment grand, comme par exemple dans le théorème de Hilbert–Samuel arithmétique de [1]. Deuxièmement, dans le théorème 1.2 on ne demande aucune condition de positivité sur la métrique du fibré inversible hermitien $\overline{\mathscr{L}}$. Dans le cas de surface arithmétique, ce résultat est asymptotiquement plus précis que la majoration obtenue dans [41] (cf. la remarque 7.7 *infra.*).

La démonstration du théorème 1.2 repose sur la méthode de $\mathbb{R}$-filtration par minima. On considère chaque espace de sections $\mathcal{E}_n = H^0(\mathscr{X},\mathscr{L}^{\otimes n})$ $(n\in\mathbb{N})$ comme un réseau dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de la norme sup. Les minima successifs du réseau correspondent à une $\mathbb{R}$-filtration $\mathcal{F}$ sur le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $E_n = H^0(\mathscr{X}_K,\mathscr{L}_K)$ telle que

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\quad \mathcal{F}^t(E_n) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}\big\{s\in\mathcal{E}_n\ :\ \|s\|_{\sup}\leqslant \mathrm{e}^{-t}\big\}.$$

Rappelons que, pour tout $i\in\{1,\ldots,R_n\}$, où $R_n = \mathrm{rg}_{\mathbb{Q}}(E_n)$, le $i^{\text{ème}}$ minimum logarithmique du réseau $\mathcal{E}_n$ est défini comme

$$\lambda_i(\mathcal{E}_n) := \sup\{t\in\mathbb{R}\ :\ \mathrm{rg}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F}^t(E_n))\geqslant i\}.$$

En particulier, on peut interpréter $\sum_i \max(\lambda_i(\mathcal{E}_1),0)$ sous forme d'une intégrale:

$$\sum_{i=1}^{R_1}\max(\lambda_i(\mathcal{E}_1),0) = \int_0^{+\infty}\mathrm{rg}(\mathcal{F}^t E_1)\,\mathrm{d}t.$$

Il s'avère que cette somme est étroitement liée à $\widehat{h}^0(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})$, compte tenu du deuxième théorème de Minkowski et des résultats en géométrie des nombres comme par exemple [4]. En outre, pour tout $t\in\mathbb{R}$, la somme directe $E^t_\bullet = \bigoplus_{n\geqslant 0}\mathcal{F}^{nt}(E_n)$ est un système linéaire gradué de $\mathscr{L}_K$ (où on considère $\mathscr{X}_K$ comme un $\mathbb{Q}$-schéma projectif). Si on désigne par $\mathrm{vol}(E^t_\bullet)$ son volume, défini comme

$$\mathrm{vol}(E^t_\bullet) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{rg}_{\mathbb{Q}}(E^t_n)}{n^d/d!},$$

on peut aussi exprimer le volume arithmétique $\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}})$ comme une intégrale

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}}) = (d+1)\int_0^{+\infty} \mathrm{vol}(E^t_\bullet)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi on peut ramener le problème à la majoration de $\mathrm{rg}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{F}^t E_1) = \mathrm{rg}_{\mathbb{Q}}(E^t_1)$ en fonction de $\mathrm{vol}(E^t_\bullet)$. Cela peut être considéré comme une généralisation du problème de majoration explicite de la fonction de Hilbert–Samuel géométrique dans le cadre des systèmes linéaires gradués, qui découle du théorème 1.1.

Cette approche de $\mathbb{R}$-filtration, qui s'applique à la fois aux cas géométrique et arithmétique, combine les avantages de plusieurs méthodes mentionnées plus haut. D'abord le majorant de la fonction de Hilbert–Samuel géométrique ou arithmétique est obtenu par une formule de récurrence sur la dimension de $X$, qui rend le calcul explicit. Deuxièmement, la contribution arithmétique du système linéaire gradué par rapport aux courbes projectives régulières figurant dans le tour de fibrations ressemble beaucoup à la contribution du faisceau inversible dualisant dans l'approche de Kollár et Matsusaka. Enfin, cette méthode peut être naturellement généralisée dans le cadre de système linéaire gradué filtré comme dans [8], qui permet de découvrir de nouveaux phénomènes en géométrie arithmétique. On établit par exemple le résultat suivant, qui découle aussi du théorème 7.6 (voir aussi le corollaire 5.2).

**Théorème 1.3** *Soit $\mathscr{X}$ une variété arithmétique projective sur l'anneau des entiers algébriques d'un corps de nombres $K$. Il existe une application $\widehat{\epsilon}$ que l'on explicitera (voir le théorème 7.6 infra), de l'ensemble des faisceaux inversibles hermitiens gros sur $\mathscr{X}$ vers* $[0,+\infty[$, *qui vérifie les conditions suivantes:*

(a) *si $\overline{\mathscr{L}}$ et $\overline{\mathscr{L}}'$ sont deux faisceaux inversibles hermitiens gros tels que $\overline{\mathscr{L}}^\vee\otimes\overline{\mathscr{L}}'$ possède au moins une section effective non-nulle, alors $\widehat{\epsilon}(\overline{\mathscr{L}})\leqslant\widehat{\epsilon}(\overline{\mathscr{L}}')$;*
(b) *pour tout faisceau inversible hermitien gros $\overline{\mathscr{L}}$ sur $\mathscr{X}$, on a*

$$\sum_{i=1}^r \max\big(\lambda_i(H^0(\mathscr{X},\mathscr{L}),\|.\|_{\sup}),0\big) \leqslant \frac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}})}{(d+1)!}+\widehat{\epsilon}(\overline{\mathscr{L}}),$$

*où $d+1$ est la dimension de Krull du schéma $\mathscr{X}$, et $r=\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}} H^0(\mathscr{X},\mathscr{L})$;*
(c) *pour tout faisceau inversible hermitien gros $\overline{\mathscr{L}}$, on a $\widehat{\epsilon}(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})\leqslant n^d\widehat{\epsilon}(\overline{\mathscr{L}})$.*

Le terme d'erreur $\widehat{\epsilon}(\overline{\mathscr{L}})$ peut être précisé par la formule suivante:

$$\widehat{\epsilon}(\overline{\mathscr{L}}) := \widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(\overline{\mathscr{L}})\varepsilon(V_\bullet(\mathscr{L}_{\mathbb{Q}})),$$

où $\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(\overline{\mathscr{L}})$ est la pente maximale asymptotique de $\overline{\mathscr{L}}$ (voir §7, pages 34 et 33 pour la définition), et

$$V_\bullet(\mathscr{L}_{\mathbb{Q}}) := \bigoplus_{n\geqslant 0} H^0(\mathscr{X}_{\mathbb{Q}},\mathscr{L}_{\mathbb{Q}}^{\otimes n})$$

est le système linéaire gradué total de $\mathscr{L}_{\mathbb{Q}}$, et $\varepsilon(.)$ est la fonction mentionnée plus haut dans le théorème 1.1. La différence principale entre ce théorème et le théorème 1.2

est dans la condition (c). Au lieu d'avoir un terme d'erreur d'ordre $n^d \ln(n)$, le terme d'erreur $\widehat{\epsilon}(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})$ ici est d'ordre $n^d$ lorsque $n \to +\infty$. Un résultat similaire pour les minima successifs absolus logarithmiques est établi dans le théorème 7.1. Ce résultat est frappant car dans une formule de développement d'une fonction arithmétique de type Hilbert–Samuel, on attend souvent que le terme sous-dominant soit d'ordre $O(n^d \ln(n))$ quand $n$ tend vers l'infini. L'estimation (c) dans le théorème 1.3 suggère que le terme d'ordre $O(n^d \ln(n))$ dans le développement de la fonction de Hilbert–Samuel arithmétique provient notamment de la comparaison entre différents invariants arithmétiques de fibrés vectoriels normés sur la courbe arithmétique, ou de la distorsion entre les choix de différents métriques. La contribution géométrique pourrait agir plutôt sur le terme suivant d'ordre $O(n^d)$. On espère que ce nouveau point de vue nous aidera à mieux comprendre le rôle de la géométrie du schéma $\mathscr{X}_K$ dans l'étude de la fonction de Hilbert–Samuel arithmétique.

Pendant la rédaction de l'article, Xinyi Yuan et Tong Zhang m'ont communiqué leur travaux [43], où ils ont obtenu indépendemment des résultats similaires aux théorèmes 1.2 et 1.3. Leur approche a certaines similitudes comparée à celle adoptée dans cet article, notamment l'arguement de récurrence sur la dimension de la variété géométrique ou arithmétique. La différence majeure entre les deux approches repose sur la réalisation du procédé de récurrence. Dans [43], l'argument de Yuan et Zhang est basé sur la positivité du fibré inversible et les termes d'erreur dans leurs théorèmes dépendent des nombres d'intersections de certains fibrés inversibles auxiliaires qui contrôlent la positivité du fibré inversible dont on veut borner la fonction de Hilbert–Samuel. Cependant, dans l'article présent, on choisit de généraliser le problème dans le cadre des systèmes linéaires gradués munis des structures de métriques et puis ramener le problème à la fibre générique de la variété (arithmetique ou fibrée sur une courbe) afin de réduire la dimension. Il est une question délicate de comparer les termes d'erreur obtenus par ces méthodes différentes car la liaison entre les deux approches est encore obscure, mais il n'est pas exclu qu'une combinaison astucieuse de ces méthodes conduira à une majoration de la fonction de Hilbert–Samuel géométrique ou arithmétique, où le terme d'erreur ne dépend que du volume du fibré inversible et le produit d'intersection positif du fibré inversible avec le fibré canonique.

L'article est organisé comme la suite. Dans le deuxième paragraphe, on établit un lien entre la valeur maximale du polygone de Harder–Narasimhan d'un fibré vectoriel sur une courbe avec la dimension de l'espace vectoriel des sections globales du fibré vectoriel. Cette comparaison sera utile plus loin dans la majoration de la fonction de Hilbert–Samuel géométrique. Le troisième paragraphe est consacré à un rappel de la notion de pente maximale asymptotique pour les systèmes linéaires gradués. C'est un invariant birationnel qui interviendra dans le terme d'erreur de la majoration. Dans le quatrième paragraphe, on propose une nouvelle notion: tour de fibrations sur courbes, où on considère une variété projective comme des fibrations successives sur les courbes projectives régulières sur des corps de plus en plus gros. C'est un outil essentiel pour la majoration de la fonction de Hilbert–Samuel. En utilisant cet outil et la $\mathbb{R}$-filtration de Harder–Narasimhan, on établit la majoration explicite de la fonction de Hilbert–Samuel géométrique dans le cinquième paragraphe, sous condition que le corps de base est de caractéristique zéro. Le siximème paragraphe est consacré à un rappel sur la notion de fibré vectoriel adélique sur un corps de nombres, et la filtration par minima absolus. On obtient dans le septième paragraphe la majoration explicite de la fonction de Hilbert–Samuel arithmétique. Enfin, dans le dernier paragraphe, on démontre la majoration de la fonction de Hilbert–Samuel géométrique dans la cas de caractéristique strictement positif, en utilisant la méthode arithmétique en considérant la $\mathbb{R}$-filtration par minima.

## 2 Degré positif d'un fibré vectoriel

Soient $k$ un corps et $C$ une courbe régulière qui est projective sur Spec $k$. Rappelons que la formule de Riemann–Roch montre que, pour tout fibré vectoriel $E$ sur $C$, on a

$$h^0(E) - h^1(E) = \deg(E) + \mathrm{rg}(E)(1-g), \tag{3}$$

où $h^0(E)$ et $h^1(E)$ sont respectivement la dimension sur le corps $k$ des espaces de cohomologie $H^0(X, E)$ et $H^1(X, E)$, et $g$ désigne le genre de $C$ relativement à $k$, qui est égale à la dimension de $H^0(C, \omega_{C/k})$ sur $k$, $\omega_{C/k}$ étant le fibré canonique sur $C$. Le nombre $\deg(E)$ figurant dans (3) est défini comme le degré de la classe d'intersection $c_1(E) \cap [C]$. En utilisant cette formule, on peut relier $h^0(E)$ à la valeur maximale du polygone de Harder–Narasimhan de $E$.

Étant donné un fibré vectoriel non-nul $E$ sur $C$, la *pente* de $E$ est définie comme le quotient du degré de $E$ par son rang, notée comme $\mu(E)$. Le fibré vectoriel $E$ est dit *semi-stable* si chaque sous-fibré vectoriel non-nul de $E$ admet une pente $\leqslant \mu(E)$. Si $E$ est un fibré vectoriel non-nul qui n'est pas nécessairement semi-stable, il existe un unique sous-fibré vectoriel $E_{\mathrm{des}}$ de $E$ qui vérifie les conditions suivantes

(a) pour tout sous-fibré vectoriel non-nul $F$ de $E$, on a $\mu(F) \leqslant \mu(E_{\mathrm{des}})$;
(b) si $F$ est un sous-fibré vectoriel non-nul de $E$ tel que $\mu(F) = \mu(E_{\mathrm{des}})$, alors $F \subset E_{\mathrm{des}}$.

Le sous-fibré vectoriel $E_{\mathrm{des}}$ est appelé le *sous-fibré déstabilisant* de $E$. Sa pente est appelée la *pente maximale* de $E$, notée comme $\mu_{\max}(E)$.

La condition (b) plus haut implique que le quotient $E/E_{\mathrm{des}}$ est sans torsion, donc est un fibré vectoriel sur $C$. Ainsi on peut construire par récurrence un drapeau en sous-fibrés vectoriels de $E$:

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_n = E$$

tel que $E_i/E_{i-1} = (E/E_{i-1})_{\mathrm{des}}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ce drapeau est appelé le *drapeau de Harder–Narasimhan* de $E$. Chaque sous-quotient $E_i/E_{i-1}$ est un fibré vectoriel semi-stable sur $C$. En outre, si on désigne par $\alpha_i$ la pente du sous-quotient $E_i/E_{i-1}$, alors les inégalités $\alpha_1 > \cdots > \alpha_n$ sont vérifiées. Il s'avère que le drapeau de Harder–Narasimhan est le seul drapeau de sous-fibrés vectoriels de $E$ tel que les sous-quotients soient semi-stables et de pentes strictement décroissantes (cf. [25, théorème 1.3.4] pour une démonstration). La dernière pente $\alpha_n$ est appelée la *pente minimale* de $E$, notée comme $\mu_{\min}(E)$. C'est aussi la valeur minimale des pentes des fibrés vectoriels quotients de $E$. En particulier, les pentes maximale et minimale sont reliées par la formule de dualité suivante: pour tout fibré vectoriel non-nul $E$ sur $C$, on a

$$\mu_{\max}(E) + \mu_{\min}(E^\vee) = 0.$$

On désigne par $P_E$ la fonction concave et affine par morceau définie sur l'intervalle $[0, \mathrm{rg}(E)]$, qui est affine sur chaque intervalle $[\mathrm{rg}(E_{i-1}), \mathrm{rg}(E_i)]$ et de pente $\alpha_i$. Rappelons que le graphe de $P_E$ s'identifie au bord supérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble des points de la forme $(\mathrm{rg}(F), \deg(F)) \in \mathbb{R}^2$, où $F$ parcourt l'ensemble des sous-fibrés vectoriels de $E$. La fonction $P_E$ est appelée le *polygone de Harder–Narasimhan* de $E$.

**Définition 2.1** Soit $E$ un fibré vectoriel non-nul sur la courbe projective $C$. On désigne par $\deg_+(E)$ la valeur maximale de la fonction $P_E$ sur l'intervalle $[0, \mathrm{rg}(E)]$, appelée le *degré positif* of $E$. On voit aussitôt de la définition que, si la pente minimale de $E$ est positive, alors $\deg_+(E)$ s'identifie au degré de $E$. On convient que le degré positif du fibré vectoriel nul est zéro.

**Lemme 2.2** *Soient $C$ une courbe régulière qui est projective et de genre $g$ sur un corps $k$, et $E$ un fibré vectoriel non-nul sur $C$.*

(a) *Si $\mu_{\max}(E) < 0$, alors $h^0(E) = 0$.*
(b) *Si $\mu_{\min}(E) > 2g - 2$, alors $h^0(E) = \deg(E) + \mathrm{rg}(E)(1 - g)$.*
(c) *Si $\mu_{\min}(E) > 0$, alors $|h^0(E) - \deg(E)| \leqslant \mathrm{rg}(E)|g - 1|$.*

*Démonstration* (a) Supposons que $E$ possède une section globale non-nul. Elle correspond à un homomorphisme non-nul de $\mathcal{O}_C$ vers $E$. Donc on a

$$0 = \mu(\mathcal{O}_C) \leqslant \mu_{\max}(E).$$

(b) D'après la formule de Riemann–Roch (3) et la dualité de Serre $h^1(E) = h^0(E^\vee \otimes \omega_{C/k})$, où $\omega_{C/k}$ est le fibré canonique sur $C$, on obtient

$$h^0(E) - h^0(E^\vee \otimes \omega_{C/k}) = \deg(E) + \mathrm{rg}(E)(1 - g).$$

Comme

$$\mu_{\max}(E^\vee \otimes \omega_{C/k}) = \mu_{\max}(E^\vee) + \deg(\omega_{C/k}) = 2g - 2 - \mu_{\min}(E),$$

si $\mu_{\min}(E) > 2g - 2$, alors on a $\mu_{\max}(E^\vee \otimes \omega_{C/k}) < 0$. Donc $h^0(E^\vee \otimes \omega_{C/k}) = 0$ compte tenu de (a). Par conséquent, l'égalité $h^0(E) = \deg(E) - \mathrm{rg}(E)(1 - g)$ est vérifiée.

(c) D'après (b), l'inégalité est vérifiée lorsque $g \leqslant 1$. Dans la suite, on suppose $g \geqslant 2$. Comme $\mu_{\min}(E) > 0$, on a $\mu_{\min}(E \otimes \omega_{C/k}) = \mu_{\min}(E) + 2g - 2 > 2g - 2$. D'après (b), on obtient

$$h^0(E \otimes \omega_{C/k}) = \deg(E \otimes \omega_{C/k}) + \mathrm{rg}(E)(1 - g) = \deg(E) + \mathrm{rg}(E)(g - 1).$$

Comme $h^0(\omega_{C/k}) > 0$, on a

$$h^0(E) \leqslant h^0(E \otimes \omega_{C/k}) \leqslant \deg(E) + \mathrm{rg}(E)(g - 1).$$

En outre, d'après la formule de Riemann–Roch (3), on a $h^0(E) \geqslant \deg(E) + \mathrm{rg}(E)(1 - g)$. Donc l'inégalité est démontrée.

□

**Lemme 2.3** *Soient $C$ une courbe régulière qui est projective sur un corps $k$, et $E$ un fibré vectoriel non-nul sur $C$. Si $E$ est semi-stable et de pente 0, alors $h^0(E) \leqslant \mathrm{rg}(E)$.*

*Démonstration* On peut supposer que $E$ possède une section globale non-nulle, sinon le résultat est trivial. Cette section globale définit un homomorphisme non-nul de $\mathcal{O}_C$ vers $E$. Comme $E$ est semi-stable de pente 0, le faisceau quotient $E/\mathcal{O}_C$ est ou bien nul, ou bien un fibré vectoriel semi-stable de pente 0. De plus, la suite exacte longue de groupes de cohomologie associée à la suite exacte courte $0 \to \mathcal{O}_C \to E \to E/\mathcal{O}_C \to 0$ montre que

$$h^0(E) \leqslant h^0(\mathcal{O}_C) + h^0(E/\mathcal{O}_C) = h^0(E/\mathcal{O}_C) + 1.$$

Par récurrence sur le rang de $E$, on obtient le résultat. □

**Théorème 2.4** *Soient $C$ une courbe régulière qui est projective et de genre $g$ sur un corps $k$, et $E$ un fibré vectoriel non-nul sur $C$. On a*

$$|h^0(E) - \deg_+(E)| \leqslant \mathrm{rg}(E) \max(g - 1, 1). \tag{4}$$

*Démonstration* Soit

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_n = E$$

le drapeau de Harder–Narasimhan de $E$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $\alpha_i$ la pente de $E_i/E_{i-1}$. Soit $j$ le plus grand indice tel que $\alpha_j \geqslant 0$. Si un tel indice n'existe pas, on note $j = 0$ par convention. On a $\deg_+(E) = \deg(E_j)$ par définition. En outre, comme $E/E_j$ est ou bien nul ou bien de pente maximale strictement négative, on a $h^0(E/E_j) = 0$ et donc $h^0(E) = h^0(E_j)$. Si $j = 0$, alors on a $h^0(E) = 0 = \deg_+(E)$ et l'inégalité devient triviale. Dans la suite, on suppose $j \in \{1, \ldots, n\}$.

On traite d'abord le cas où $g \geqslant 1$. Si $\alpha_j = \mu_{\min}(E_j) > 0$, d'après le lemme 2.2.(c), on obtient

$$|h^0(E) - \deg_+(E)| = |h^0(E_j) - \deg(E_j)| \leqslant \mathrm{rg}(E_j)(g-1),$$

qui implique (4). Il reste le cas où $\alpha_j = 0$. Dans ce cas-là $E_j/E_{j-1}$ est un fibré vectoriel semi-stable de pente 0. D'après le lemme 2.3 on a $h^0(E_j/E_{j-1}) \leqslant \mathrm{rg}(E_j/E_{j-1})$, qui implique que

$$\begin{aligned} h^0(E_{j-1}) \leqslant h^0(E) = h^0(E_j) &\leqslant h^0(E_{j-1}) + h^0(E_j/E_{j-1}) \\ &\leqslant h^0(E_{j-1}) + \mathrm{rg}(E_j/E_{j-1}). \end{aligned} \tag{5}$$

En outre, on a $\deg_+(E) = \deg(E_{j-1})$. Le fibré vectoriel $E_{j-1}$ est ou bien nul, ou bien de pente minimale $> 0$. D'après le lemme 2.2.(c) on obtient (l'inégalité est triviale lorsque $E_{j-1} = 0$)

$$|h^0(E_{j-1}) - \deg_+(E)| = |h^0(E_{j-1}) - \deg(E_{j-1})| \leqslant \mathrm{rg}(E_{j-1})(g-1).$$

Si on combine cette inégalité avec (5), on obtient (4).

Dans la suite, on suppose que $g = 0$. Comme $\alpha_j = \mu_{\min}(E_j) \geqslant 0 > 2g - 2$, d'après le lemme 2.2.(b) on obtient $h^0(E_j) - \deg(E_j) = \mathrm{rg}(E_j)$. Comme on a $h^0(E_j) = h^0(E)$ et $\deg(E_j) = \deg_+(E)$, le résultat est aussi vrai dans ce cas-là. □

À l'aide de $\mathbb{R}$-filtration de Harder–Narasimhan introduite dans [13], on peut interpréter la fonction $\deg_+(.)$ comme une intégrale. Soit $E$ un fibré vectoriel non-nul sur $C$. On suppose que son drapeau de Harder–Narasimhan est

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_n = E.$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $\alpha_i$ la pente du sous-quotient $E_i/E_{i-1}$. On définit une famille $(\mathcal{F}^t E)_{t \in \mathbb{R}}$ de sous-fibrés vectoriels de $E$ comme

$$\mathcal{F}^t E = E_i \text{ si } \alpha_i \geqslant t > \alpha_{i-1},$$

où par convention $\alpha_0 = +\infty$ et $\alpha_{n+1} = -\infty$. Pour tout nombre réel $t$, on désigne par $\mathcal{F}^{t+} E$ le sous-fibré vectoriel $\sum_{a>0} \mathcal{F}^{t+a} E$ de $E$ et on définit $\mathrm{sq}^t(E)$ le quotient $\mathcal{F}^t E/\mathcal{F}^{t+} E$, appelé le *sous-quotient* d'indice $t$ de la filtration $\mathcal{F}$. D'après la définition du drapeau de Harder–Narasimhan, on obtient que chaque sous-quotient $\mathrm{sq}^t(E)$ est ou bien le fibré vectoriel nul, ou bien un fibré vectoriel semi-stable de pente $t$. En outre, l'unicité du drapeau de Harder–Narasimhan que l'on a mentionnée dans la page 9 conduit au critère suivant de la $\mathbb{R}$-filtration de Harder–Narasimhan.

**Proposition 2.5** *Soit $E$ un fibré vectoriel non-nul sur $C$ et $(\mathcal{G}^t E)_{t \in \mathbb{R}}$ une $\mathbb{R}$-filtration décroissante en sous-fibrés vectoriels de $E$ telle que $\mathcal{G}^t E = 0$ pour $t$ suffisamment positif, $\mathcal{G}^t E = E$ pour $t$ suffisamment négatif et $\bigcap_{a>0} \mathcal{G}^{t-a} E = \mathcal{G}^t E$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors $\mathcal{G}$ est la $\mathbb{R}$-filtration* *de Harder–Narasimhan si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le sous-quotient d'indice $t$ de la filtration $\mathcal{G}$ est ou bien nul, ou bien un fibré vectoriel semi-stable de pente $t$.*

Soit $E$ un fibré vectoriel non-nul sur $C$. On suppose que son drapeau de Harder–Narasimhan est

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_n = E.$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, soit $\alpha_i$ la pente du sous-quotient $E_i/E_{i-1}$. On désigne par $\nu_E$ la mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$ définie comme

$$\nu_E(\mathrm{d}t) = -\mathrm{d}\frac{\mathrm{rg}(\mathcal{F}^t E)}{\mathrm{rg}(E)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{rg}(E_i/E_{i-1})}{\mathrm{rg}(E)} \delta_{\alpha_i}.$$

Avec cette notation, on peut réécrire $\deg_+(E)$ comme

$$\deg_+(E) = \mathrm{rg}(E) \int_0^{+\infty} t\, \nu_E(\mathrm{d}t) = \int_0^{\mu_{\max}(E)} \mathrm{rg}(\mathcal{F}^t E)\, \mathrm{d}t, \tag{6}$$

où la dernière égalité provient de l'intégration par partie et du fait que $\mathcal{F}^t E = 0$ quand $t > \mu_{\max}(E)$. Le théorème 2.4 montre alors que

$$\left| h^0(E) - \int_0^{\mu_{\max}(E)} \mathrm{rg}(\mathcal{F}^t E)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \mathrm{rg}(E) \max(g-1, 1). \tag{7}$$

Dans le cas où le corps de base $k$ est de caractéristique zéro, d'après un résultat de Narasimhan et Seshadri [32], le produit tensoriel de deux fibrés vectoriels semi-stables sur $C$ est encore semi-stable. On renvoie les lecteurs dans [6, §1.1] pour un survol succinct de différentes approches autour de la semi-stabilité tensorielle dans la littérature. Ce résultat implique que la $\mathbb{R}$-filtration de Harder–Narasimhan du produit tensoriel de deux fibrés vectoriels s'identifie à la filtration produit.

**Proposition 2.6** *On suppose que le corps $k$ est de caractéristique zéro. Soient $E$ et $F$ deux fibrés vectoriels non-nuls sur $C$. Si $t$ est un nombre réel, alors on a*

$$\mathcal{F}^t(E \otimes F) = \sum_{\substack{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \\ a+b=t}} \mathcal{F}^a(E) \otimes \mathcal{F}^b(F), \tag{8}$$

*où $\mathcal{F}$ désigne la $\mathbb{R}$-filtration de Harder–Narasimhan.*

*Démonstration* On désigne par $\mathcal{G}$ la $\mathbb{R}$-filtration de $E \otimes F$ telle que $\mathcal{G}^t(E \otimes F)$ soit défini comme le membre à droite de la formule (8). Notre but est de démontrer que la filtration $\mathcal{G}$ s'identifie à la $\mathbb{R}$-filtration de Harder–Narasimhan de $E \otimes F$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le sous-quotient d'indice $t$ de la filtration $G$ s'écrit sous la forme

$$\mathrm{sq}_{\mathcal{G}}^t(E \otimes F) = \bigoplus_{a+b=t} \mathrm{sq}^a(E) \otimes \mathrm{sq}^b(F).$$

Le fibré vectoriel $\mathrm{sq}^a(E)$ (resp. $\mathrm{sq}^b(F)$) est ou bien nul, ou bien semi-stable de pente $a$ (resp. $b$). D'après le résultat de Narasimhan et Seshadri, le produit tensoriel $\mathrm{sq}^a(E) \otimes \mathrm{sq}^b(F)$ est un fibré vectoriel nul ou semi-stable de pente $a+b$. Cela montre que le sous-quotient $\mathrm{sq}_{\mathcal{G}}^t(E \otimes F)$ est nul ou semi-stable de pente $t$. D'après la proposition 2.5, on obtient que la filtration $\mathcal{G}$ est la $\mathbb{R}$-filtration de Harder–Narasimhan de $E$. □

**Corollaire 2.7** *On suppose que le corps k est de caractéristique zéro. Soit* $E_\bullet = \bigoplus_{n\geqslant 0} E_n$ *une* $\mathcal{O}_C$*-algèbre graduée. On suppose que chaque composante homogène* $E_n$ *est un fibré vectoriel sur* $C$*. Alors la* $\mathbb{R}$*-filtration de Harder–Narasimhan est compatible à la structure de* $\mathcal{O}_C$*-algèbre de* $E_\bullet$*. Autrement dit, pour tout couple d'entiers* $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ *et tout* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$*, on a*

$$(\mathcal{F}^a E_n)\cdot(\mathcal{F}^b E_m)\subset \mathcal{F}^{a+b}E_{n+m}. \tag{9}$$

*Démonstration* Par définition $(\mathcal{F}^a E_n)\cdot(\mathcal{F}^b E_m)$ est l'image canonique de $(\mathcal{F}^a E_n)\otimes(\mathcal{F}^b E_m)$ par l'homomorphisme $\varphi_{n,m}: E_n\otimes E_m\to E_{n+m}$ de la structure de $\mathcal{O}_C$-algèbre de $E_\bullet$. La proposition précédente montre que $(\mathcal{F}^a E_n)\otimes(\mathcal{F}^b E_m)$ est contenu dans $\mathcal{F}^{a+b}(E_n\otimes E_m)$. En outre, d'après [13, proposition 2.2.4], tout homomorphisme de fibrés vectoriels sur $C$ préserve les $\mathbb{R}$-filtrations de Harder–Narasimhan. En particulier, on a

$$\varphi_{n,m}(\mathcal{F}^{a+b}(E_n\otimes E_m))\subset \mathcal{F}^{a+b}(E_{n+m}),$$

d'où le résultat. □

## 3 Pente maximale asymptotique

Soient $C$ une courbe régulière qui est projective sur un corps $k$, et $\pi: X\to C$ un morphisme projectif et plat d'un schéma intègre $X$ vers $C$. On s'intéresse à des invariants birationnels de faisceaux inversibles sur $X$. Rappelons que le *volume* d'un faisceau inversible $L$ sur $X$ est défini comme

$$\mathrm{vol}(L) := \limsup_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{rg}_k H^0(X, L^{\otimes n})}{n^{\dim(X)}/\dim(X)!}. \tag{10}$$

On dit que le faisceau inversible $L$ est *gros* si son volume est strictement positif. La fonction volume est un invariant birationnel (cf. [28, proposition 2.2.43]): si $p: X'\to X$ est un $k$-morphisme projectif birationnel d'un $k$-schéma intègre $X'$ vers $X$, alors on a $\mathrm{vol}(p^*(L)) = \mathrm{vol}(L)$. En outre, le faisceau inversible $L$ est gros si et seulement si une puissance tensorielle de $L$ peut être décomposée en le produit tensoriel d'un faisceau inversible ample et un faisceau inversible effectif (i.e. qui possède au moins une section globale non-nulle). On renvoie les lecteurs dans [28, corollaire 2.2.7] pour une démonstration. Ce critère montre en particulier que les faisceaux inversibles gros forment un cône ouvert dans le groupe de Picard de $X$: si $L$ est un faisceau inversible gros et si $M$ est un faisceau inversible quelconque sur $X$, alors pour tout entier $n$ assez positif, le produit tensoriel $L^{\otimes n}\otimes M$ est un faisceau inversible gros.

Soit $K$ le corps des fonctions rationnelles sur la courbe $C$. On désigne par $\eta: \mathrm{Spec}\ K\to C$ le point générique de $C$. Soit $L$ un faisceau inversible sur $X$ tel que $L_\eta$ soit gros. Dans [13, théorème 4.3.6], il est démontré que la suite $\big(\mu_{\max}(\pi_*(L^{\otimes n}))/n\big)_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathbb{R}$. On désigne par $\mu_{\max}^\pi(L)$ la limite de cette suite, appelée la *pente maximale asymptotique* de $L$ relativement à $\pi$. Par définition, on a $\mu_{\max}^\pi(L^{\otimes n}) = n\mu_{\max}^\pi(L)$ pour tout entier $n\geqslant 1$. En outre, si $M$ est un faisceau inversible sur $C$, alors on a (cf. [13, proposition 4.3.8])

$$\mu_{\max}^\pi(L\otimes\pi^*(M)) = \mu_{\max}^\pi(L) + \deg(M). \tag{11}$$

**Lemme 3.1** *Soit* $E$ *un fibré vectoriel non-nul sur la courbe* $C$*. Si* $\mu_{\max}(E) > |g-1|$*, où* $g$ *est le genre de* $C$ *relativement à* $k$*, alors on a* $h^0(E) > 0$*.*

*Démonstration* Soit $E_{\mathrm{des}}$ le sous-fibré déstabilisant du fibré vectoriel $E$. On a $\mu_{\min}(E_{\mathrm{des}}) = \mu(E_{\mathrm{des}}) = \mu_{\max}(E) > 0$. D'après le lemme 2.2 (c), on obtient

$$h^0(E) \geqslant h^0(E_{\mathrm{des}}) \geqslant \mathrm{rg}(E_{\mathrm{des}})\mu_{\max}(E) - \mathrm{rg}(E_{\mathrm{des}})|g-1|,$$

d'où le résultat. □

*Remarque 3.2* Soit $L$ un faisceau inversible sur $X$ dont la restriction à la fibre générique est gros. Le lemme précédent montre que, si $\mu^{\pi}_{\max}(L) > 0$, alors pour tout entier $n$ suffisamment positif, le faisceau inversible $L^{\otimes n}$ est effectif. En effet, d'après la définition de $\mu^{\pi}_{\max}(L)$, la pente maximale de $\mu_{\max}(\pi_*(L^{\otimes n}))$ croît linéairement par rapport à $n$ lorsque $n$ tend vers l'infini. Elle dépasse $|g-1|$ lorsque $n$ est assez positif.

**Proposition 3.3** *Soit $L$ un faisceau inversible sur $X$. Alors $L$ est gros si et seulement si $L_\eta$ est gros et $\mu^{\pi}_{\max}(L) > 0$.*

*Démonstration* "$\Longrightarrow$": Soit $L$ un faisceau inversible gros sur $X$. D'après le critère de grosseur que l'on a mentionné plus haut dans la page 14, il existe un entier $n \geqslant 1$, un faisceau inversible ample $A$ et un faisceau inversible effectif $L'$ sur $X$ tels que $L^{\otimes n} \cong A \otimes L'$. La restriction de cette formule à la fibre générique de $X$ donne une décomposition de $L_\eta^{\otimes n}$ en produit tensoriel d'un faisceau inversible ample et un faisceau inversible effectif. Cela montre que $L_\eta$ est gros.

Comme $L$ est un faisceau inversible gros, pour tout entier $n$ assez positif, $L^{\otimes n}$ possède au moins une section globale non-nulle (cf. la remarque 3.2). Par conséquent, on a $\mu_{\max}(\pi_*(L^{\otimes n})) \geqslant 0$ pour tout entier $n$ assez positif. On en déduit $\mu^{\pi}_{\max}(L) \geqslant 0$. Soit $M$ un faisceau inversible sur $C$ tel que $\deg(M) > 0$. Comme $L$ est gros, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $L^{\otimes n} \otimes \pi^*(M^\vee)$ soit gros. On a alors $\mu^{\pi}_{\max}(L^{\otimes n} \otimes \pi^*(M^\vee)) \geqslant 0$. D'après (11), cela implique que

$$n\mu^{\pi}_{\max}(L) \geqslant \deg(M) > 0,$$

d'où $\mu^{\pi}_{\max}(L) > 0$.

"$\Longleftarrow$": On suppose que $L$ est un faisceau inversible sur $X$ dont la restriction à la fibre générique est gros et tel que $\mu^{\pi}_{\max}(L) > 0$. On fixe un faisceau inversible ample $A$ sur $X$. Comme $L_\eta$ est supposé être gros, il existe un entier $d \geqslant 1$ tel que $L_\eta^{\otimes d} \otimes A_\eta^\vee$ possède une section globale non-nulle $s$. La section $s$ se relève en une section rationnelle de $L^{\otimes d} \otimes A^\vee$ dont le diviseur est effectif à un diviseur vertical près. Il existe alors un faisceau inversible ample $M$ sur $C$ tel que $s$ se prolonge en une section globale non-nulle de $L^{\otimes d} \otimes A^\vee \otimes \pi^*(M)$. En outre, comme $\mu^{\pi}_{\max}(L) > 0$, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que

$$\mu^{\pi}_{\max}(L^{\otimes n} \otimes \pi^*(M^\vee)) = n\mu^{\pi}_{\max}(L) - \deg(M) > 0.$$

D'après le lemme précédent (voir aussi la remarque qui le suit), il existe alors un entier $m \geqslant 1$ tel que $L^{\otimes nm} \otimes \pi^*(M^\vee)^{\otimes m}$ soit effectif. On en déduit que le faisceau inversible

$$L^{md+nm} \otimes (A^{\otimes m})^\vee \cong (L^{\otimes d} \otimes A^\vee \otimes \pi^*(M))^{\otimes m} \otimes (L^{\otimes nm} \otimes \pi^*(M^\vee)^{\otimes m})$$

admet une section globale non-nulle. Cela montre que $L$ est un faisceau inversible gros. □

**Corollaire 3.4** *La pente maximale asymptotique est un invariant birationnel pour les faisceaux inversibles $L$ sur $X$ dont les restrictions à la fibre générique $X_\eta$ sont gros.*

*Démonstration* Soit $M$ un faisceau inversible ample sur $C$. On affirme que, pour tout faisceau inversible $L$ sur $X$ dont la restriction à la fibre générique est gros, la valeur $\mu^{\pi}_{\max}(L)$ est égale à

$$\sup\left\{\frac{n\deg(M)}{m}\;\middle|\;(n,m) \in \mathbb{N}^2_{\geqslant 1},\ L^{\otimes m} \otimes \pi^*(M^\vee)^{\otimes n} \text{ est gros}\right\}.$$

En effet, d'après la proposition précédente, $L^{\otimes m} \otimes \pi^*(M^\vee)^{\otimes n}$ est gros si et seulement si

$$\mu^\pi_{\max}(L^{\otimes m} \otimes \pi^*(M^\vee)^{\otimes n}) = m\mu^\pi_{\max}(L) - n \deg(M) > 0,$$

ou de façon équivalente, $\mu^\pi_{\max}(L) > (n/m)\deg(M)$. Comme la fonction volume est un invariant birationnel, on obtient que, pour tout morphisme projectif et birationnel $p : X' \to X$, le faisceau inversible $L^{\otimes m} \otimes \pi^*(M^\vee)^{\otimes n}$ est gros si et seulement si

$$p^*(L^{\otimes m} \otimes \pi^*(M^\vee)^{\otimes n}) \cong p^*(L^{\otimes m}) \otimes (\pi p)^*(M^\vee)^{\otimes n}$$

l'est. D'où $\mu^\pi_{\max}(L) = \mu^\pi_{\max}(p^*L)$. □

**Définition 3.5** Soient $X$ un schéma projectif et intègre sur Spec $k$ et $L$ un faisceau inversible gros sur $X$. Soit $V_\bullet = \bigoplus_{n \geqslant 0} V_n$ un système linéaire gradué de $L$ (i.e. une sous-algèbre graduée de $\bigoplus_{n\geqslant 0} H^0(X, L^{\otimes n})$). On dit que $V_\bullet$ *contient un diviseur ample* (cf. la condition (C) dans [29, définition 2.9]) si $V_n \neq \{0\}$ pour $n$ assez positif et s'il existe un faisceau inversible ample $A$ sur $X$, un entier $p \geqslant 1$ et une section globale non-nulle $s$ de $L^{\otimes p} \otimes A^\vee$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$\mathrm{Im}\big( H^0(X, A^{\otimes n}) \xrightarrow{\cdot s^n} H^0(X, L^{\otimes np})\big) \subset V_{np}.$$

Cette condition est aussi équivalente à $V_n \neq \{0\}$ pour $n$ assez positif et l'existence d'un faisceau inversible gros $M$ sur $X$, un entier $p \geqslant 1$ et une section globale non-nulle $s$ de $L^{\otimes p} \otimes M^\vee$ tels que $V_\bullet$ contienne le système linéaire gradué total de $M$ via la section $s$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Im}\big( H^0(X, M^{\otimes n}) \xrightarrow{\cdot s^n} H^0(X, L^{\otimes np})\big) \subset V_{np}.$$

En effet, pour tout faisceau inversible gros $M$ sur $X$, il existe une puissance de $M$ qui peut s'écrire comme le produit tensoriel d'un faisceau inversible ample et un faisceau inversible effectif (voir [28] corollaire 2.2.7).

Dans le cas où $V_\bullet = \bigoplus_{n\geqslant 0} H^0(X, L^{\otimes n})$ est le système gradué total, la condition comme ci-dessus est équivalente à la grosseur du faisceau inversible $L$. La proposition suivante montre que, similaire à la grosseur, la condition "*contenir un disivseur ample*" est une propriété préservée par passage aux modificiations birationnelles.

**Proposition 3.6** *Soient $X$ un schéma projectif et intègre sur* Spec $k$, *$V_\bullet$ un système linéaire gradué d'un $\mathcal{O}_X$-module inversible $L$, et $\nu : X' \to X$ un $k$-morphisme projectif et birationnel. On suppose que $V_\bullet$ contient un diviseur ample. Alors la $k$-algèbre graduée $V_\bullet$, vue comme un système linéaire gradué de $\nu^*(L)$, contient aussi un diviseur ample.*

*Démonstration* Sans perte de généralité, on peut supposer que $V_\bullet$ est le système linéaire gradué total $\bigoplus_{n\geqslant 0} H^0(X, L^{\otimes n})$. Soit $\varphi : \mathcal{O}_X \to \nu_*(\mathcal{O}_{X'})$ le morphisme de faisceaux d'anneaux défini par le morphisme de schémas $\nu : X' \to X$. C'est un homomorphisme injectif de $\mathcal{O}_X$-modules. On désigne par $Q$ le $\mathcal{O}_X$-module quotient $\nu_*(\mathcal{O}_{X'})/\mathcal{O}_X$ induit par $\varphi$. Comme $\nu$ est un morphisme birationnel, on obtient que le support du faisceau cohérent $Q$ est contenu dans un sous-schéma fermé $Z$ de $X$, c'est-à-dire que le faisceau $Q$ est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{O}_Z$-module cohérent. Soit $I$ un faisceau d'idéaux inversible sur $X$ qui définit un sous-schéma fermé contenant $Z$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\nu_*(\nu^*(I^{\otimes n})) = \nu_*(\mathcal{O}_{X'}) \otimes_{\mathcal{O}_X} I^{\otimes n}$. Donc l'image canonique de $\nu_*(\nu^*(I^{\otimes n}))$ dans $Q$ est nul. Cela montre que $\nu_*(\nu^*(I^{\otimes n}))$ est en fait un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_X$. Comme $L$ est un faisceau inversible gros, il en est de même de $\nu^*(L)$ (voir [28] proposition 2.2.43). Il existe donc un entier $p \geqslant 1$ tel que $\nu^*(I) \otimes \nu^*(L^{\otimes p})$ soit gros. En outre, pour tout entier $n \geqslant 1$ on a

$$\nu_*(\nu^*(I^{\otimes n}) \otimes \nu^*(L^{\otimes pn})) \cong (\nu_*(\mathcal{O}_{X'}) \otimes_{\mathcal{O}_X} I^{\otimes n}) \otimes L^{\otimes pn}$$

qui est en fait un sous-faisceau inversible de $L^{\otimes pn}$. On en déduit que le système linéaire gradué total de $\nu^*(I) \otimes \nu^*(L^{\otimes p})$ est contenu dans $\bigoplus_{n \geqslant 0} H^0(X, L^{\otimes n})$. La démonstration est donc achevée. $\square$

Dans la suite, on généralise la construction de pente maximale asymptotique aux systèmes gradués en fibrés vectoriels. Soit $L$ un faisceau inversible sur $X$. On entend par *système gradué en fibrés vectoriels* de $L$ toute sous-$\mathcal{O}_C$-algèbre graduée de $\bigoplus_{n \geqslant 0} \pi_*(L^{\otimes n})$. Si $E_\bullet$ est un système gradué en fibrés vectoriels de $L$, alors sa *fibre générique* $E_{\bullet,\eta} := \bigoplus_{n \geqslant 0} E_{n,\eta}$ est un système linéaire gradué de $L_\eta$. Si la fibre générique de $E_\bullet$ contient un diviseur ample, alors la suite de pentes maximales normalisée $(\mu_{\max}(E_n)/n)_{n \geqslant 1}$ converge dans $\mathbb{R}$ (cf. [13, théorème 4.3.1]). On désigne par $\mu_{\max}^{\mathrm{asy}}(E_\bullet)$ sa limite. Pour tout entier $n \geqslant 0$, le fibré vectoriel $E_n$ est un sous-fibré vectoriel de $\pi_*(L^{\otimes n})$. On obtient donc $\mu_{\max}(E_n) \leqslant \mu_{\max}(\pi_*(L^{\otimes n}))$. Cela implique que $\mu_{\max}^{\mathrm{asy}}(E_\bullet) \leqslant \mu_{\max}^{\pi}(L)$.

*Remarque 3.7* Comme la fibre générique de $E_\bullet$ est un anneau intègre, on obtient du corollaire 2.7 que, dans le cas où le corps $k$ est de caractéristique 0, si $E_n$ et $E_m$ sont non-nuls, alors on a[2]

$$\mu_{\max}(E_{n+m}) \geqslant \mu_{\max}(E_n) + \mu_{\max}(E_m).$$

Cela montre que $\mu_{\max}^{\mathrm{asy}}(E_\bullet) \geqslant \mu_{\max}(E_n)/n$ dès que $E_n$ est non-nul ($n \geqslant 1$).

Soient $L$ un faisceau inversible sur $X$ et $E_\bullet$ un système gradué en fibrés vectoriels de $L$. On définit le *volume* de $E_\bullet$ comme

$$\mathrm{vol}(E_\bullet) := \limsup_{n \to +\infty} \frac{h^0(E_n)}{n^{\dim(X)}/\dim(X)!}.$$

Lorsque $E_\bullet$ est le système gradué total $\bigoplus_{n \geqslant 0} \pi_*(L^{\otimes n})$, son volume s'identifie au volume de $L$.

Soit $V_\bullet$ un système linéaire gradué d'un faisceau inversible $L$ sur $X$, qui contient un diviseur ample. Rappelons que le *volume* de $V_\bullet$ est défini comme

$$\mathrm{vol}(V_\bullet) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{rg}_k(V_n)}{n^{\dim(X)}/(\dim X)!}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on désigne par $V_{n,K}$ le sous-$K$-espace vectoriel de $H^0(X_\eta, L_\eta^{\otimes n})$ engendré par l'image canonique $V_n$. Il s'avère que, si $V_\bullet$ continent un diviseur ample, alors $V_{\bullet,K} := \bigoplus_{n \geqslant 0} V_{n,K}$ est un système linéaire gradué de $L_\eta$ qui contient un diviseur ample. Dans le théorème suivant, on construit un système gradué en fibrés vectoriels $E_\bullet$ tel que $E_{\bullet,\eta}$ coïncide à $V_{\bullet,K}$ et que $\mathrm{vol}(E_\bullet) = \mathrm{vol}(V_\bullet)$.

**Théorème 3.8** *Soit $V_\bullet$ un système linéaire gradué de $L$ qui contient un diviseur ample. Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit $E_n$ le sous-$\mathcal{O}_C$-module de $\pi_*(L^{\otimes n})$ engendré[3] par $V_n$. Alors*

[2] En effet, l'homomorphisme naturel de $E_{n,\mathrm{des}} \otimes E_{m,\mathrm{des}}$ vers $E_{n+m}$ est non-nul. En outre, le corollaire 2.7 montre que $E_{n,\mathrm{des}} \otimes E_{m,\mathrm{des}}$ est semi-stable de pente $\mu_{\max}(E_n) + \mu_{\max}(E_m)$. On obtient donc l'inégalité souhaitée.

[3] C'est-à-dire que $E_n$ est l'image de l'homomorphisme $\varphi^*(V_n) \to \pi_*(L^{\otimes n})$ induit par l'inclusion $V_n \to H^0(X, L^{\otimes n}) = \varphi_*(\pi_*(L^{\otimes n}))$ via l'adjonction entre les foncteurs $\varphi_*$ et $\varphi^*$, où $\varphi : C \to \operatorname{Spec} k$ désigne le morphisme structurel.

*$E_\bullet = \bigoplus_{n\geqslant 0} E_n$ est un système gradué en fibrés vectoriels de $L$, dont la fibre générique contient un diviseur ample. De plus, on a* $\mathrm{vol}(E_\bullet) = \mathrm{vol}(V_\bullet)$.

*Démonstration* Sans perte de généralité, on peut supposer $X$ normal. En effet, par passage à la normalisation $\nu : \widetilde{X} \to X$, on peut considérer $V_\bullet$ comme un système linéaire gradué de $\nu^*(L)$, qui contient un diviseur ample (voir la proposition 3.6).

On désigne par $\varphi : C \to \operatorname{Spec} k$ le morphisme structurel. Par définition $E_\bullet$ est l'image de l'homomorphisme de $\mathcal{O}_C$-algèbre graduée $\bigoplus_{n\geqslant 0} \varphi^*(V_n) \to \bigoplus_{n\geqslant 0} \pi_*(L^{\otimes n})$. Donc il est une sous-$\mathcal{O}_C$-algèbre graduée de $\bigoplus_{n\geqslant 0} \pi_*(L^{\otimes n})$, i.e., un système gradué en fibrés vectoriels de $L$. En outre, il existe un entier $p \geqslant 1$ et un faisceau inversible ample $A$ sur $X$ tels que le faisceau inversible $L^{\otimes p} \otimes A^\vee$ possède une section globale non-nulle $s$ vérifiant

$$\operatorname{Im}(H^0(X, A^{\otimes n}) \xrightarrow{\cdot s^n} H^0(X, L^{\otimes np})) \subset V_{np} \tag{12}$$

pour tout entier $n \geqslant 1$. Comme $A$ est ample, pour tout entier $m$ suffisamment positif, le $K$-espace vectoriel $H^0(X_\eta, A_\eta^{\otimes m})$ (où $\eta$ est le point générique de $C$) est engendré[4] par $H^0(X, A^{\otimes m})$. Quitte à remplacer $A$ par l'une de ses puissances tensorielles, on peut supposer que cette propriété est vérifiée pour tout entier $m \geqslant 1$. On déduit alors de la relation (12) que

$$\operatorname{Im}(H^0(X_\eta, A_\eta^{\otimes n}) \xrightarrow{\cdot s_\eta^n} H^0(X_\eta, L_\eta^{\otimes np})) \subset E_{np,K}.$$

Cela montre que le système linéaire gradué $E_{\bullet,\eta}$ contient un diviseur ample.

Comme le système linéaire gradué $V_\bullet$ contient un diviseur ample, on obtient que, pour tout entier $n$ assez positif, l'application rationnelle de $X$ vers $\mathbb{P}(V_n)$ défini par le système linéaire est birationnel. Si $p \geqslant 1$ est un entier, on désigne par $u_p : X_p \to X$ l'éclatement de $X$ le long du lieu de base de $V_p$, défini comme

$$X_p = \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{n\geqslant 0} (\varphi\pi)^*(\operatorname{Sym}^n(V_p)) \longrightarrow L^{\otimes np}\right).$$

Soient en outre $j_p : X_p \to \mathbb{P}(V_p)$ le morphisme canonique et $L_p$ le tire en arrière du faisceau universel $\mathcal{O}_{V_p}(1)$ à $X_p$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $j_p$ définisse un morphisme birationnel entre $X_p$ et son image dans $\mathbb{P}(V_p)$ dès que $p > N$. Soit $p$ un tel entier. Considérons les homomorphismes de $k$-espaces vectoriels comme ci-dessous

$$\operatorname{Sym}^n(V_p) \longrightarrow H^0(j_p(X_p), \mathcal{O}_{V_p}(n)) \longrightarrow H^0(X_p, L_p^{\otimes n}) \longrightarrow H^0(X_p, u_p^*(L^{\otimes np})).$$

Le premier homomorphisme est surjectif pour $n$ assez positif car on peut identifier $\operatorname{Sym}^n(V_p)$ à $H^0(\mathbb{P}(V_p), \mathcal{O}_{V_p}(n))$. Le deuxième homomorphisme est injectif car $j_p : X_p \to j_p(X_p)$ est un morphisme birationnel et $L_p^{\otimes n} \cong j_p^*\mathcal{O}_{V_p}(n)$. Le dernier homomorphisme est défini comme la multiplication par la $k^{\text{ième}}$ puissance de la section qui détermine le diviseur exceptionnel de l'éclatement $u_p : X_p \to X$, donc est aussi injectif. Si on identifie $H^0(X_p, u_p^*(L^{\otimes np}))$ à $H^0(X, L^{\otimes np})$ (on peut faire ça car le schéma $X$ est supposé être normal, cf. [22, corollaire 4.3.12]), l'image de l'homomorphisme composé s'identifie à $\operatorname{Im}(\operatorname{Sym}^p V_n \to V_{np})$. En outre, comme le morphisme $j_p : X_p \to j_p(X_p)$ est birationnel,

[4] Cela provient d'un analogue dans le cadre de corps de fonction du corollaire 4.8 de [44]. On peut suivre la stratégie de *loc. cit.*. La démonstration est plus simple car les places archimédienne ne se manifestent pas dans le problème.

on a $\mathrm{vol}(L_p) = \mathrm{vol}(\mathcal{O}_{V_p}(n)|_{j_p(X_p)})$. Cela montre que le volume du faisceau inversible $L_p$ est égale à celui du système linéaire gradué

$$V_\bullet^{[p]} := \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{Im}(\mathrm{Sym}^n(V_p) \longrightarrow V_{np}).$$

Soit $E_\bullet^{[p]} := \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{Im}(\mathrm{Sym}^n(E_p) \to E_{np})$. C'est un système gradué en fibrés vectoriels de $L^{\otimes p}$. Pour tout entier $n$ assez positif, on a $E_n^{[p]} \subset (\pi u_p)_*(L_p^{\otimes n})$. On obtient alors

$$\mathrm{vol}(V_\bullet) \geqslant \frac{\mathrm{vol}(V_\bullet^{[p]})}{p^{\dim(X)}} = \frac{\mathrm{vol}(L_p)}{p^{\dim(X)}} \geqslant \frac{\mathrm{vol}(E_\bullet^{[p]})}{p^{\dim(X)}}.$$

D'après le théorème d'approximation de Fujita pour les systèmes linéaires gradués en fibrés adéliques (qui sont plus généraux que les fibrés vectoriels, cf. [8, théorème 2.9]), on a

$$\sup_{p\geqslant 1} \frac{\mathrm{vol}(E_\bullet^{[p]})}{p^{\dim(X)}} = \mathrm{vol}(E_\bullet).$$

On obtient donc $\mathrm{vol}(V_\bullet) \geqslant \mathrm{vol}(E_\bullet)$. Enfin, comme $V_n \subset H^0(C, E_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $\mathrm{vol}(V_\bullet) \leqslant \mathrm{vol}(E_\bullet)$. La démonstration est donc achevée. □

**Définition 3.9** Soient $X$ un schéma intègre projectif sur $k$ et $L$ un faisceau inversible gros sur $X$. Soit $V_\bullet$ un système linéaire gradué de $L$ qui contient un diviseur ample. Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit $\pi_*(V_n)$ le sous-$\mathcal{O}_C$-module de $\pi_*(L^{\otimes n})$ engendré par $V_n$. On désigne par $\pi_*(V_\bullet)$ le système gradué en fibrés vectoriels $\bigoplus_{n\geqslant 0} \pi_*(V_n)$ et par $\mu_{\max}^{\pi}(V_\bullet)$ la quantité $\mu_{\max}^{\mathrm{asy}}(\pi_*(V_\bullet))$, appelée la *pente maximale asymptotique* de $V_\bullet$ relativement à $\pi$.

*Remarque 3.10* Soient $L$ et $M$ deux faisceau inversibles gros sur $X$, et $V_\bullet$ et $W_\bullet$ des systèmes linéaires gradués de $L$ et $M$ respectivement. On suppose que $V_\bullet$ et $W_\bullet$ contiennent des diviseurs amples. S'il existe une section non-nulle $s$ de $L^\vee \otimes M$ telle que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{Im}(V_n \xrightarrow{s^n\cdot} H^0(X, M^{\otimes n})) \subset W_n,$$

on dit que $V_\bullet$ est *contenu* dans $W_\bullet$ (via la section $s$). Il s'avère que la multiplication par $s^n$ définit aussi un homomorphisme injectif de $\pi_*(V_n)$ vers $\pi_*(W_n)$. On obtient donc $\mu_{\max}(V_n) \leqslant \mu_{\max}(W_n)$, qui implique la relation $\mu_{\max}^{\pi}(V_\bullet) \leqslant \mu_{\max}^{\pi}(W_\bullet)$. Similairement, on a $\mathrm{vol}(V_\bullet) \leqslant \mathrm{vol}(W_\bullet)$.

## 4 Tour de fibrations sur courbes

Soient $k$ un corps et $X$ un schéma projectif et intègre de dimension $d + 1$ sur Spec $k$, où $d$ est un entier, $d \geqslant 0$. Par *tour de fibrations sur courbes* de $X$, on entend toute donnée $(p_i : X_i \to C_i)_{i=0}^d$ où

(a) lorsque $d = 0$, $C_0$ et $X_0$ sont tous les deux la normalisation du schéma $X$ et $p_0 : X_0 \to C_0$ est le morphisme d'identité,
(b) lorsque $d \geqslant 1$, $C_0$ est une courbe régulière qui est projective sur Spec $k$, $X_0 = X$ et $p_0$ est un $k$-morphisme projectif et plat[5] de $X$ vers $C_0$,

[5] Ici la platitude est équivalente à la surjectivité du morphisme, cf. [30, proposition 4.3.9].

(c) de façon récursive, pour tout $i \in \{1, \dots, d-1\}$, $C_i$ est une courbe régulière qui est projective sur le corps $R(C_{i-1})$ des fonctions rationnelles sur $C_{i-1}$, $X_i$ est la fibre générique de $p_{i-1}$ et $p_i : X_i \to C_i$ est un morphisme projectif et plat de $R(C_{i-1})$-schémas (le schéma $X_i$ est encore intègre et porte le même corps des fonctions rationnelles que $X_{i-1}$, qui est égal à celui de $X$ par récurrence),

(d) $C_d$ est la normalisation de la fibre générique de $p_{d-1}$ et $p_d : C_d \to C_d$ est le morphisme d'identité.

S'il existe au moins un tour de fibrations sur courbes de $X$, on dit que $X$ *admet un tour de fibrations sur courbes*.

Usuellement la notion de *fibration* désigne un morphisme propre et plat dont les fibres géométriques sont connexes. Ici la notion de *fibration sur une courbe* porte un sens plus large qui contient tous les morphismes projectifs et plats vers la courbe.

Si $\Theta = (p_i : X_i \to C_i)_{i=0}^d$ est un tour de fibrations sur courbes du schéma $X$, on désigne par $g(\Theta)$ le vecteur $(g(C_0/k), \dots, g(C_d/R(C_{d-1}))) \in \mathbb{N}^{d+1}$, où $g(C_i/R(C_{i-1}))$ est le genre de la courbe $C_i$ relativement à $R(C_{i-1})$. Le vecteur $g(\Theta)$ est appelé le *genre* de $\Theta$.

*Remarque 4.1* Soient $X$ un schéma projectif et intègre de dimension $d+1$ sur Spec $k$, où $d \geqslant 2$. Si $(p_i : X_i \to C_i)_{i=0}^d$ est un tour de fibrations sur courbes du $k$-schéma $X$, alors $(p_j : X_j \to C_j)_{j=i}^d$ est un tour de fibrations sur courbes du $R(C_{i-1})$-schéma $X_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$.

Si le schéma $X$ est normal, alors $C_d$ s'identifie à la fibre générique de $p_{d-1}$ (cela provient de la préservation de la clôture intégrale par la localisation).

On entend par *modification birationnelle* d'un $k$-schéma projectif et intègre $X$ tout morphisme $f : X' \to X$ d'un $k$-schéma projectif et intègre $X'$ vers $X$ qui est birationnel (autrement dit, $f$ induit un isomorphisme entre les corps des fonctions rationnelles de $X$ et de $X'$). La proposition suivante montre que l'existence d'un tour de fibrations sur courbes de genre fixé est une propriété invariante par toute modification birationnelle.

**Proposition 4.2** *Soit $X$ un schéma projectif et intègre de dimension $d+1$ sur* Spec $k$. *On suppose que le schéma $X$ admet un tour de fibrations sur courbes de genre $(g_0, \dots, g_d)$. Alors, pour toute modification birationnelle $f : X' \to X$, le schéma $X'$ admet aussi un tour de fibrations sur courbes de même genre.*

*Démonstration* On suppose que $C_0$ est une courbe régulière qui est projective et de genre $g_0$ sur Spec $k$ et que $p_0 : X \to C_0$ est un $k$-morphisme projectif et plat. Alors le morphisme composé $fp_0$ est un morphisme projectif et plat de $X'$ vers $C_0$. De plus, le morphisme canonique de la fibre générique de $fp_0$ vers celle de $f$ est un $R(C_0)$-morphisme projectif et birationnel, où $R(C_0)$ désigne le corps des fonctions rationnelles sur $C_0$. Par récurrence sur la dimension de $X$, on obtient le résultat. □

Soient $X$ un schéma projectif et intègre sur Spec $k$ et $\Theta$ un tour de fibrations sur courbes du schéma $X$. La proposition précédente non seulement montre que toute modification birationnelle admet un tour de fibrations sur courbes de même genre que celui de $\Theta$, sa démonstration construit effectivement un tel tour de fibrations sur courbes pour toute modification birationnelle $f : X' \to X$, que l'on notera comme $f^*(\Theta)$. Si $\Theta$ est de la forme $(p_i : X_i \to C_i)_{i=0}^d$, alors le $i^{\text{ème}}$ morphisme dans $f^*(\Theta)$ est obtenu comme le composé de $p_i$ avec une modification birationnelle de $X_i$. En outre, on peut vérifier que, si $f_1 : X' \to X$ et $f_2 : X'' \to X'$ sont des modifications birationnelles successives, alors on a $(f_1 f_2)^*\Theta = f_2^*(f_1^*\Theta)$.

*Remarque 4.3* Étant donné un schéma projectif et intègre $X$ sur $k$, le choix d'un tour $\Theta = (p_i : X_i \to C_i)_{i=0}^d$ de fibrations sur courbes de $X$ définit une chaîne

$$k \subset R(C_0) \subset \cdots \subset R(C_d) = R(X)$$

de sous-extension de $R(X)/k$, où $R(X)$ est le corps des fonctions rationnelles sur $X$. Chaque extension consécutive dans la chaîne est transcendante de degré de transcendance 1. Réciproquement, si on fixe une chaîne

$$k = k_{-1} \subset k_0 \subset \cdots \subset k_d = R(X)$$

de sous-extensions de $R(X)/k$ de sorte que chaque extension $k_i/k_{i-1}$ est transcendante de degré de transcendance 1, alors il existe une modification birationnelle $X'$ de $X$ qui admet un tour de fibrations sur courbes $\Theta = (p_i : X'_i \to C_i)_{i=0}^d$ tel que $k_i = R(C_i)$ quel que soit $i \in \{0, \ldots, d\}$. En effet, on peut choisir $C_0$ comme la courbe régulière qui est projective sur Spec $k$ et telle que $R(C_0) = k_0$. L'inclusion de $k_0$ dans $R(X)$ définit une $k$-application rationnelle de $X$ vers $C_0$. Quitte à remplacer $X$ par la fermeture Zariski du graphe de l'application rationnelle $X \dashrightarrow C_0$ dans $X \times_k C_0$, on obtient une modification birationnelle $\widetilde{X}$ de $X$ munie d'un $k$-morphisme projectif et plat vers $C_0$. Par un procédé de récurrence sur la dimension de $X$, on peut construire une modification birationnelle de $X$ qui admet un tour de fibrations sur courbes vérifiant les propriétés comme ce que l'on a décrit plus haut. En effet, par l'hypothèse de récurrence, il existe une modification birationnelle $Y$ de la fibre générique $\widetilde{X}_{k_0}$ qui admet un tour de fibrations sur courbes. Comme $Y$ est un schéma projectif et intègre sur le corps des fonctions rationnelles $k_0 = R(C_0)$, il existe un $k$-schéma intègre $X'$ et un $k$-morphisme projectif et plat de $X'$ vers $C_0$ tel que $Y$ s'identifie à la fibre générique de $X'$. On peut par exemple fixer une immersion fermée de $Y$ dans un espace projectif $\mathbb{P}^N_{k_0}$ sur $k_0$ et prendre $X'$ comme la fermeture Zariski de $Y$ dans $\mathbb{P}^N_{C_0}$. Les schémas $X$ et $X'$ admettent le même corps de fonctions rationnelles et donc il existe un $k$-schéma projectif et intègre $X_0$ et deux modifications birationnelles de $X_0$ vers $X$ et $X'$ respectivement. D'après la proposition 4.2, on obtient que $X_0$ admet un tour de fibrations sur courbes.

Soit $X$ un schéma projectif et intègre de dimension $d+1$ sur Spec $k$. On suppose que $X$ admet un tour de fibrations sur courbes $\Theta = (p_i : X_i \to C_i)_{i=0}^d$. Soient $L$ un faisceau inversible gros sur $X$ et $V_\bullet$ un système linéaire gradué de $L$, qui contient un diviseur ample. Si $d = 0$, on désigne par $\mathrm{vol}^\Theta(V_\bullet)$ le volume de $V_\bullet$ et par $\mu_{\max}^\Theta(V_\bullet)$ la pente maximale asymptotique de $V_\bullet$ relativement au morphisme d'identité de la normalisation de $X$, où on considère $V_\bullet$ comme un système linéaire gradué du tire en arrière du faisceau inversible $L$ sur la normalisation de $X$.

Si $d \geqslant 1$, de façon récursive, on désigne par $\mathrm{vol}^\Theta(V_\bullet)$ le vecteur

$$\big(\mathrm{vol}(V_\bullet), \mathrm{vol}^{\Theta'}(p_{0*}(V_\bullet)_{\eta_0})\big),$$

où $\Theta' = (p_i : X_i \to C_i)_{i=1}^d$ (qui est un tour de fibrations sur courbes de $X_1$), $\eta_0$ est le point générique de la courbe $C_0$ et $p_{0*}(V_\bullet)_{\eta_0}$ est la fibre générique de $p_{0*}(V_\bullet)$, qui est un système linéaire gradué du tire en arrière de $L$ sur $X_1$, contenant un diviseur ample. De façon similaire, on désigne par $\mu_{\max}^\Theta(V_\bullet)$ le vecteur[6]

$$\big(\mu_{\max}^{p_0}(V_\bullet), \mu_{\max}^{\Theta'}(p_{0*}(V_\bullet)_{\eta_0})\big).$$

[6] cf. la définition 3.9 pour la construction de $\mu_{\max}^{p_0}(V_\bullet)$.

Si $f : X' \to X$ est une modification birationnelle du schéma $X$, alors on a

$$\mathrm{vol}^{f^*\Theta}(V_\bullet) = \mathrm{vol}^{\Theta}(V_\bullet) \quad \text{et} \quad \mu_{\max}^{f^*\Theta}(V_\bullet) = \mu_{\max}^{\Theta}(V_\bullet),$$

où on considère $V_\bullet$ comme un système linéaire gradué de $f^*(L)$.

*Remarque 4.4* Soient $X$ un schéma projectif et intègre de dimension $d+1$ sur Spec $k$ et $\Theta = (p_i : X_i \to C_i)_{i=0}^d$ un tour de fibration sur courbes de $X$. Soient $L$ est un faisceau inversible gros sur $X$ et $V_\bullet$ un système linéaire gradué de $L$. Soient $(v_0, \dots, v_d)$ le vecteur $\mathrm{vol}^{\Theta}(V_\bullet)$ et $(\mu_0, \dots, \mu_d)$ le vecteur $\mu_{\max}^{\Theta}(V_\bullet)$. Alors on a

$$\forall\, i \in \{0, \dots, d\}, \quad v_i \leqslant \mathrm{vol}(L|_{X_i}) \quad \text{et} \quad \mu_i \leqslant \mu_{\max}^{p_i}(L|_{X_i})$$

En outre, si $V_\bullet$ est le système linéaire gradué total $\bigoplus_{n \geqslant 0} H^0(X, L^{\otimes n})$, alors on a $\mu_i = \mu_{\max}^{p_i}(L|_{X_i})$ pour tout $i \in \{0, \dots, d\}$. Cependant, en général l'égalité $v_i = \mathrm{vol}(L|_{X_i})$ n'est pas vraie lorsque $i \geqslant 1$. En effet, le système gradué en fibrés vectoriels $p_{0*}(V_\bullet)$ ne tient compte que la partie positive du système gradué total $\bigoplus_{n \geqslant 0} p_{0*}(L^{\otimes n})$ (qui permet cependant de retrouver le volume de $V_\bullet$). Les égalités $v_i = \mathrm{vol}(L|_{X_i})$ $(i \in \{0, \dots, d\})$ sont vérifiées notamment lorsque $L$ est ample.

## 5 Estimation explicite de la fonction de Hilbert–Samuel

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème 1.1 dans le cas où le corps de base est de caractéristique zéro. On fixe un corps commutatif $k$ de caractéristique zéro. Soit $X$ un schéma projectif et intègre de dimension $d+1$ sur Spec $k$. On suppose donné un tour de fibrations sur courbes $\Theta = (p_i : X_i \to C_i)_{i=0}^d$ de $X$. Pour tout système linéaire gradué $V_\bullet$ d'un faisceau inversible gros $L$ sur $X$, on introduit un invariant birationnel $\varepsilon^{\Theta}(V_\bullet)$, construit dans la suite. Si $d = 0$, alors on définit

$$\varepsilon^{\Theta}(V_\bullet) := \max(g(C_0/k) - 1, 1).$$

Lorsque $d \geqslant 1$, on désigne par $W_\bullet$ la fibre générique de $p_{0*}(V_\bullet)$, qui est un système linéaire gradué de $L|_{X_1}$ contenant un diviseur ample. Soit en outre $\Theta' := (p_i : X_i \to C_i)_{i=1}^d$, qui est un tour de fibrations sur courbes de $X_1$. Alors l'invariant $\varepsilon^{\Theta}(V_\bullet)$ est définie de façon récursive comme

$$\varepsilon^{\Theta}(V_\bullet) = \mu_0 \varepsilon^{\Theta'}(W_\bullet) + \left(\frac{\mathrm{vol}(W_\bullet)}{d!} + \varepsilon^{\Theta'}(W_\bullet)\right) \max(g_0 - 1, 1), \tag{13}$$

où $\mu_0$ et $g_0$ sont respectivement les premières coordonnées des vecteurs $\mu_{\max}^{\Theta}(V_\bullet)$ et $g(\Theta)$.

**Théorème 5.1** *Soit $X$ un schéma projectif et intègre sur* Spec $k$ *qui admet un tour de fibrations sur courbes $\Theta = (p_i : X_i \to C_i)_{i=0}^d$, et $L$ un faisceau inversible sur $X$, où $k$ est un corps de caractéristique zéro. Si $V_\bullet = \bigoplus_{n \geqslant 0} V_n$ est un système linéaire gradué de $L$, qui contient un diviseur ample, alors on a*

$$\mathrm{rg}_k(V_1) \leqslant \frac{\mathrm{vol}(V_\bullet)}{(d+1)!} + \varepsilon^{\Theta}(V_\bullet). \tag{14}$$

*De plus, si $V_\bullet$ est contenu dans un autre système linéaire gradué $V'_\bullet$, alors on a*

$$\varepsilon^{\Theta}(V_\bullet) \leqslant \varepsilon^{\Theta}(V'_\bullet). \tag{15}$$

*En outre, pour tout entier $m \geqslant 1$, on a*

$$\varepsilon^{\Theta}(V_{\bullet}^{(m)}) \leqslant m^d \varepsilon^{\Theta}(V_{\bullet}), \tag{16}$$

*où $V_{\bullet}^{(m)}$ désigne le système linéaire gradué $\bigoplus_{n\geqslant 0} V_{nm}$ de $L^{\otimes m}$.*

*Démonstration* L'inégalité (15) découle de la remarque 3.10. Si on désigne par $W_{\bullet}$ la fibre générique de $p_{0*}(V_{\bullet})$, alors la fibre générique de $p_{0*}(V_{\bullet}^{(m)})$ s'identifie à $W_{\bullet}^{(m)}$. On a $\mathrm{vol}(W_{\bullet}^{(m)}) = m^d\,\mathrm{vol}(W_{\bullet})$ et $\mu_{\max}^{\Theta}(V_{\bullet}^{(m)}) = m\mu_{\max}^{\Theta}(V_{\bullet})$. L'inégalité (16) découle donc de la formule récursive (13) par récurrence sur la dimension de $X$.

Les invariants figurant à droite de l'inégalité (14) sont des invariants birationnels. Quitte à passer à la normalisation de $X$, on peut supposer que $X$ est un schéma normal. On raisonne par récurrence sur $d$. Dans le cas où $d = 0$, le schéma $X$ est une courbe régulière de genre $g(\Theta)$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit $L_n$ le sous-$\mathcal{O}_X$-module de $L^{\otimes n}$ engendré par $V_n$. D'après le théorème 3.8, $L_{\bullet} = \bigoplus_{n\geqslant 0} L_n$ est un système gradué en fibrés vectoriels de $L$, qui contient un diviseur ample et vérifie $\mathrm{vol}(L_{\bullet}) = \mathrm{vol}(V_{\bullet})$. En outre, l'homomorphisme $L_n \otimes L_m \to L_{n+m}$ est non-nul dès que $L_n$ et $L_m$ sont tous non-nuls. On obtient alors (cf. la remarque 3.7)

$$\mathrm{vol}(V_{\bullet}) = \mathrm{vol}(L_{\bullet}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\deg(L_n)}{n} = \sup_{n\geqslant 1} \frac{\deg(L_n)}{n}$$

En particulier, si $V_1$ est non-nul, alors

$$\mathrm{rg}_k(V_1) \leqslant h^0(L_1) \leqslant \deg(L_1) + \max(g(X) - 1, 1) \leqslant \mathrm{vol}(V_{\bullet}) + \max(g(X) - 1, 1).$$

Cette inégalité est aussi vraie lorsque $\mathrm{rg}_k(V_1) = 0$. Le théorème est donc démontré pour le cas où $d = 0$.

Traitons maintenant le cas général. Soient

$$(v_0, \ldots, v_d) = \mathrm{vol}^{\Theta}(V_{\bullet}),\ \ (\mu_0, \ldots, \mu_d) = \mu_{\max}^{\Theta}(V_{\bullet})\ \text{ et }\ (g_0, \ldots, g_d) = g(\Theta).$$

Soient $E_{\bullet} := p_{0*}(V_{\bullet})$ et $W_{\bullet}$ la fibre générique de $E_{\bullet}$. D'après le théorème 3.8, $E_{\bullet} = \bigoplus_{n\geqslant 0} E_n$ est un système gradué en fibrés vectoriels de $L$ dont la fibre générique contient un diviseur ample et vérifie la relation $\mathrm{vol}(E_{\bullet}) = \mathrm{vol}(V_{\bullet})$. Soit $\eta$ la fibre générique de $C_0$. Pour tout nombre réel $t$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, soit $W_n^t := (\mathcal{F}^{nt} E_n)_{\eta}$, où $\mathcal{F}$ est la $\mathbb{R}$-filtration de Harder–Narasimhan sur $E_n$. D'après le corollaire 2.7, $W_{\bullet}^t = \bigoplus_{n\geqslant 0} W_n^t$ est un système linéaire gradué de $L_{\eta}$. En outre, $W_{\bullet}^t$ contient un diviseur ample lorsque $t < \mu_0$, et devient trivial lorsque $t > \mu_0$ (cf. [8, lemme 1.6]), et on a (cf. [8, corollaire 1.13])

$$\mathrm{vol}(E_{\bullet}) = (d+1) \int_0^{\mu_0} \mathrm{vol}(W_{\bullet}^t)\,\mathrm{d}t. \tag{17}$$

Si $E_1$ est un fibré vectoriel non-nul, d'après la formule (6) on obtient[7]

$$\deg_+(E_1) = \int_0^{\mu_0} \mathrm{rg}(W_1^t)\,\mathrm{d}t.$$

On applique l'hypothèse de récurrence à $W_{\bullet}^t$ pour chaque $t$ et obtient

$$\deg_+(E_1) \leqslant \int_0^{\mu_0} \Big(\frac{\mathrm{vol}(W_{\bullet}^t)}{d!} + \varepsilon^{\Theta'}(W_{\bullet}^t)\Big)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{vol}(E_{\bullet})}{(d+1)!} + \mu_0 \varepsilon^{\Theta'}(W_{\bullet}), \tag{18}$$

[7] D'après la remarque 3.7, on a $\mu_{\max}(E_1) \leqslant \mu_{\max}^{\mathrm{asy}}(E_{\bullet}) = \mu_0$. Donc $W_1^t = \{0\}$ lorsqe $t > \mu_0$.

où $\Theta' = (p_i : X_i \to C_i)_{i=1}^d$. Dans la deuxième inégalité, on a utilisé les relations (17) et (15). Enfin, le théorème 2.4 montre que

$$\begin{aligned} h^0(E_1) &\leqslant \deg_+(E_1) + \mathrm{rg}(W_1)\max(g_0 - 1, 1) \\ &\leqslant \frac{\mathrm{vol}(E_\bullet)}{(d+1)!} + \mu_0 \varepsilon^{\Theta'}(W_\bullet) + \Big(\frac{v_1}{d!} + \varepsilon^{\Theta'}(W_\bullet)\Big)\max(g_0 - 1, 1), \end{aligned}$$

où on a appliqué l'hypothèse de récurrence à $W_\bullet$ dans la deuxième inégalité. Comme $\mathrm{rg}(V_1) \leqslant h^0(E_1)$ et comme $\mathrm{vol}(E_\bullet) = \mathrm{vol}(V_\bullet)$, on obtient

$$\mathrm{rg}(V_1) \leqslant \frac{\mathrm{vol}(V_\bullet)}{(d+1)!} + \mu_0 \varepsilon^{\Theta'}(W_\bullet) + \Big(\frac{v_1}{d!} + \varepsilon^{\Theta'}(W_\bullet)\Big)\max(g_0 - 1, 1).$$

La démonstration est donc achevée, compte tenu de la formule récursive (13) définissant $\varepsilon^{\Theta}(V_\bullet)$. □

Dans la démonstration de l'inégalité (18), on a seulement utilisé le fait que l'algèbre graduée $W_\bullet$ est filtrée par la $\mathbb{R}$-filtration de Harder–Narasimhan. Ainsi le théorème se généralise naturellement dans le cadre de système linéaire gradué filtré et conduit au corollaire suivant qui sera utile plus loin dans l'étude des systèmes linéaires gradués arithmétiques.

**Corollaire 5.2** *Soit $X$ un schéma projectif et intègre sur* Spec $k$ *qui admet un tour de fibrations sur courbes $\Theta$. Soient $L$ un faisceau inversible gros sur $X$ et $V_\bullet$ un système linéaire gradué de $L$ qui contient un diviseur ample. On suppose que chaque espace vectoriel $V_n$ est muni d'une $\mathbb{R}$-filtration $\mathcal{F}$ de sorte que*

$$(\mathcal{F}^a V_n) \cdot (\mathcal{F}^b V_m) \subset \mathcal{F}^{a+b} V_{n+m} \tag{19}$$

*pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Soit en outre*

$$\lambda_{\max}^{\mathrm{asy}}(V_\bullet) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{\sup\{t \mid \mathcal{F}^t V_n \neq \{0\}\}}{n}.$$

*Alors on a*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{rg}_k(\mathcal{F}^t V_1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{vol}(V_\bullet^t)}{\dim(X)!}\,\mathrm{d}t + \lambda_{\max}^{\mathrm{asy}}(V_\bullet)\varepsilon^{\Theta}(V_\bullet), \tag{20}$$

*où $V_\bullet^t = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathcal{F}^{nt} V_n$.*

*Démonstration* Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note

$$\lambda_{\max}(V_n) = \sup\{t \mid \mathcal{F}^t V_n \neq \{0\}\}.$$

La condition (19) montre que la suite $(\lambda_{\max}(V_n))_{n \geqslant 1}$ est sur-additive, d'où $\lambda_{\max}(V_n) \leqslant n\lambda_{\max}^{\mathrm{asy}}(V_\bullet)$. Par conséquent, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $t > \lambda_{\max}^{\mathrm{asy}}(V_\bullet)$, on a $V_n^t = \mathcal{F}^{nt} V_n = \{0\}$. En outre, d'après [8, lemme 1.6], pour tout $t < \lambda_{\max}^{\mathrm{asy}}(V_\bullet)$, le système linéaire gradué $V_\bullet^t$ contient un diviseur ample. On applique le théorème 5.1 à $V_\bullet^t$ et obtient

$$\mathrm{rg}_k(\mathcal{F}^t V_1) \leqslant \frac{\mathrm{vol}(V_\bullet^t)}{\dim(X)!} + \varepsilon^{\Theta}(V_\bullet^t) \leqslant \frac{\mathrm{vol}(V_\bullet^t)}{\dim(X)!} + \varepsilon^{\Theta}(V_\bullet), \quad t < \lambda_{\max}^{\mathrm{asy}}(V.).$$

L'intégration de cette inégalité pour $t \in [0, \lambda_{\max}^{\mathrm{asy}}(V_\bullet)[$ conduit à l'inégalité souhaitée. □

## 6 Fibrés vectoriels adéliques

Dans ce paragraphe, l'expression $K$ désigne un corps de nombres. Soit $\mathcal{O}_K$ la fermeture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $K$. On entend par *place* de $K$ toute classe d'équivalence de valeurs absolues non-triviales sur $K$, où deux valeurs absolues sont dites équivalentes si elles définissent la même topologie sur $K$. On désigne par $M_K$ l'ensemble de toutes les places de $K$. Pour toute place $v$ de $K$, on désigne par $|.|_v$ une valeur absolue dans la place $v$ qui prolonge soit la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{Q}$, soit l'une des valeurs absolues $p$-adiques. On désigne par $K_v$ le complété de $K$ par rapport à la valeur absolue $|.|_v$. Il s'avère que $|.|_v$ s'étend de façon unique sur la clôture algébrique $\overline{K}_v$. On désigne par $\mathbb{C}_v$ le complété de $\overline{K}_v$, qui est à la fois algébriquement clos et complet. On rappelle que la famille $(|.|_v)_{v\in M_K}$ de valeurs absolues vérifie la formule du produit

$$\forall\, a\in K^{\times},\quad \sum_{v\in M_K}\frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}\ln|a|_v=0. \tag{21}$$

Il s'avère que l'ensemble des places de $K$ qui ne prolongent pas $\infty\in M_{\mathbb{Q}}$ (représentant la valeur absolue usuelle de $\mathbb{Q}$) correspond biunivoquement à l'ensemble des points fermés de Spec $\mathcal{O}_K$.

Soit $E$ un espace vectoriel de rang fini sur $K$. Si $\boldsymbol{e}=(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de $E$, alors elle définit pour chaque place $v\in M_K$ une norme $\|.\|_{\boldsymbol{e},v}$ sur $E\otimes_K\mathbb{C}_v$ telle que

$$\|\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n\|_{\boldsymbol{e},v}=\begin{cases}\max\{|\lambda_1|_v,\ldots,|\lambda_n|_v\}, & \text{si } v \text{ est non-archimédienne},\\ (|\lambda_1|_v^2+\cdots+|\lambda_n|_v^2)^{1/2}, & \text{si } v \text{ est archimédienne}.\end{cases}$$

Cette norme est invariante sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}_v/K_v)$.

**Définition 6.1** On appelle *fibré vectoriel adélique* (cf. [16]) sur Spec $K$ toute donnée $\overline{E}=(E,(\|.\|_v)_{v\in M_K})$ d'un espace vectoriel de rang fini $E$ sur $K$ et une famille de normes, où $\|.\|_v$ est une norme sur $E\otimes_K\mathbb{C}_v$, qui est invariante sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}_v/K_v)$, et est ultramétrique lorsque $v$ est une place non-archimédienne. On demande en plus l'existence d'une base $\boldsymbol{e}$ de $E$ telle que $\|.\|_v=\|.\|_{\boldsymbol{e},v}$ pour toute sauf un nombre fini de places $v\in M_K$. Si $E$ est de rang 1 sur $K$, on dit que $\overline{E}$ est un *fibré inversible adélique*. Si, pour toute place archimédienne $v$, la norme $\|.\|_v$ est hermitienne, on dit que $\overline{E}$ est *hermitien*.

Soit $\overline{L}$ un fibré inversible adélique sur Spec $K$. On définit le *degré d'Arakelov* de $\overline{L}$ comme

$$\widehat{\deg}(\overline{L}):=-\sum_{v\in M_K}[K_v:\mathbb{Q}_v]\ln\|s\|_v, \tag{22}$$

où $s$ est un élément non-nul de $L$. D'après la formule du produit (21), cette définition ne dépend pas du choix de $s$. On introduit aussi la version normalisée du degré d'Arakelov comme

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{L}):=\frac{\widehat{\deg}(\overline{L})}{[K:\mathbb{Q}]}. \tag{23}$$

La notion de *fibré vectoriel normé* (ou *hermitien*) sur Spec $\mathcal{O}_K$ est aussi largement utilisée dans la littérature. Rappelons qu'un fibré vectoriel normé sur Spec $\mathcal{O}_K$ est la donnée $\overline{\mathcal{E}}$ d'un $\mathcal{O}_K$-module projectif et de type fini muni d'une famille de normes $(\|.\|_v)_{v\in M_{K,\infty}}$ indexée par l'ensemble des places archimédiennes de $K$, où chaque $\|.\|_v$ est une norme sur $\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathbb{C}_v$, invariante sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/K_v)$. Le fibré vectoriel normé $\overline{\mathcal{E}}$ est dit hermitien si chaque norme $\|.\|_v$ est hermitienne. Étant donné un fibré vectoriel normé $\overline{\mathcal{E}}$ sur

Spec $\mathcal{O}_K$, on obtient naturellement une structure de fibré vectoriel adélique pour $E = \mathcal{E}_K$ (qui est hermitienne lorsque $\overline{\mathcal{E}}$ est hermitien), où la norme en une place non-archimédienne $\mathfrak{p}$ est induite par la structure de $\mathcal{O}_K$-module de $\mathcal{E}$: la boule unité fermée de $\|.\|_{\mathfrak{p}}$ est $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, où $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ est l'anneau de valuation de $\mathbb{C}_{\mathfrak{p}}$. Réciproquement, un fibré vectoriel adélique sur Spec $K$ provient nécessairement d'un fibré vectoriel normé sur Spec $\mathcal{O}_K$ pourvu que toutes ses normes indexées par les places non-archimédiennes sont pures.[8] On renvoie les lecteurs dans [17, proposition 3.10] pour une démonstration.

## 6.1 Filtration de Harder–Narasimhan

Soit $\overline{E} = (E, (\|.\|_v)_{v \in M_K})$ un fibré vectoriel adélique sur Spec $K$ qui est hermitien. Pour toute place $v \in M_K$, la norme $\|.\|_v$ sur $E_{\mathbb{C}_v}$ induit une norme sur $\det(E_{\mathbb{C}_v})$ qui est une ultranorme (resp. une norme hermitienne) lorsque $v$ est une place ultramétrique (resp. une place archimédienne), et telle que

$$\forall\, (s_1, \ldots, s_r) \in E^r, \quad \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_v = \prod_{i=1}^{r} \|s_i\|_v,$$

où $r$ est le rang de $E$. Ainsi $\det(\overline{E}) := (\det E, (\|.\|_v)_{v \in M_K})$ devient un fibré inversible adélique sur Spec $K$. On définit le *degré d'Arakelov normalisé* de $\overline{E}$ comme celui de $\det(\overline{E})$, noté comme $\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{E})$. Si de plus $E$ est non-nul, on désigne par $\widehat{\mu}(\overline{E})$ le quotient $\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{E})/\operatorname{rg}(E)$, appelé la *pente* de $\overline{E}$. Le formalisme de la théorie de Harder–Narasimhan est encore valable dans le cadre des fibrés vectoriels adéliques hermitiens. En particulier, il existe un sous-espace vectoriel $E_{\mathrm{des}}$ de $E$ tel que

$$\widehat{\mu}(\overline{E_{\mathrm{des}}}) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) := \sup_{0 \neq F \subset E} \widehat{\mu}(\overline{F})$$

et que $E_{\mathrm{des}}$ contienne tous les sous-espaces vectoriels non-nuls $F$ de $E$ tel que $\overline{F}$ admet $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$ comme pente. On renvoie les lecteurs dans [16, §5.1] pour les détails. Similairement au cas de fibrés vectoriels sur une courbe, on peut construire de façon récursive un drapeau

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_n = E$$

de sous-espaces vectoriels de $E$ de sorte que $E_i/E_{i-1} = (E/E_{i-1})_{\mathrm{des}}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, où on a considéré des normes quotients sur $E/E_{i-1}$. Si on désigne par $\alpha_i$ la pente de $\overline{E_i/E_{i-1}}$, alors on a

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n.$$

La dernière pente $\alpha_n$ est appelée la *pente minimale* de $\overline{E}$, notée comme $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$. On désigne par $P_{\overline{E}}$ la fonction concave et affine par morceau définie sur l'intervalle $[0, \operatorname{rg}(E)]$, qui est affine sur chaque intervalle $[\operatorname{rg}(E_{i-1}), \operatorname{rg}(E_i)]$ et de pente $\alpha_i$. Cette fonction est appelée le *polygone de Harder–Narasimhan* de $\overline{E}$. On désigne par $\mathcal{F}_{\mathrm{HN}}$ la $\mathbb{R}$-filtration décroissante sur $E$ telle que

$$\mathcal{F}_{\mathrm{HN}}^t(E) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ t \leqslant \alpha_i}} E_i. \tag{24}$$

Cette filtration est appelée la *filtration de Harder–Narasimhan* de $\overline{E}$.

[8] Soit $\overline{E} = (E, (\|.\|_v)_{v \in M_K})$ un fibré vectoriel adélique sur Spec $K$. Pour toute place non-archimédienne $\mathfrak{p}$, la norme $\|.\|_{\mathfrak{p}}$ est dite pure si l'image de sa restriction à $E$ s'identifie à l'image de la valeur absolue $|.|_{\mathfrak{p}} : K \to \mathbb{R}$.

**Définition 6.2** Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique hermitien sur Spec $K$. Soit $r$ le rang de $E$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on désigne par $\widehat{\mu}_i(\overline{E})$ la pente du polygone de Harder–Narasimhan $P_{\overline{E}}$ sur l'intervalle $[i-1, i]$, appelée la $i^{\text{ème}}$ *pente* de $\overline{E}$. En outre, on désigne par $\widehat{\deg}_{\mathrm{n}+}(\overline{E})$ la valeur maximale du polygone $P_{\overline{E}}$ sur l'intervalle $[0, r]$.

**Proposition 6.3** *Avec les notation de la définition précédente, on a*

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{n}+}(\overline{E}) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ \widehat{\mu}_i(\overline{E}) \geqslant 0}} \widehat{\mu}_i(\overline{E}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{rg}(\mathcal{F}^t_{\mathrm{HN}}(E))\,\mathrm{d}t. \tag{25}$$

*Démonstration* Comme la fonction $P_{\overline{E}}$ est affine sur chaque intervalle $[i-1, i]$, on obtient que

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{n}+}(\overline{E}) = \max_{i \in \{0,\ldots,r\}} P_{\overline{E}}(i) = \max_{i \in \{0,\ldots,r\}} \sum_{1 \leqslant j \leqslant i} \widehat{\mu}_j(\overline{E}).$$

En outre, comme la fonction $P_{\overline{E}}$ est concave, on a $\widehat{\mu}_1(\overline{E}) \geqslant \cdots \geqslant \widehat{\mu}_r(\overline{E})$. La première égalité de (25) est donc démontrée.

Soit $0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_n = E$ le drapeau de Harder–Narasimhan de $\overline{E}$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, soit $\alpha_j$ la pente de la fonction $P_{\overline{E}}$ sur l'intervalle $[\mathrm{rg}(E_{j-1}), \mathrm{rg}(E_j)]$. Par la définition de $\mathcal{F}^t_{\mathrm{HN}}$, on a

$$\mathrm{d}\,\mathrm{rg}(\mathcal{F}^t_{\mathrm{HN}}(E)) = -\sum_{j=1}^{n} \big(\mathrm{rg}(E_j) - \mathrm{rg}(E_{j-1})\big)\delta_{\alpha_j} = -\sum_{i=1}^{r} \delta_{\widehat{\mu}_i(\overline{E})}$$

comme mesures boréliennes sur $\mathbb{R}$, où $\delta_x$ désigne la mesure de Dirac en $x$. On obtient alors

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{rg}(\mathcal{F}^t_{\mathrm{HN}}(E))\,\mathrm{d}t = -\int_{[0,+\infty[} t\,\mathrm{d}\,\mathrm{rg}(\mathcal{F}^t_{\mathrm{HN}}(E)) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ \widehat{\mu}_i(\overline{E}) \geqslant 0}} \widehat{\mu}_i(\overline{E}).$$

□

Le résultat suivant relie la fonction $\widehat{\deg}_{\mathrm{n}+}(.)$ au nombre d'éléments effectifs dans un fibré vectoriel adélique. Pour tout fibré vectoriel adélique $\overline{E}$ sur Spec $K$, on désigne par $\widehat{H}^0(\overline{E})$ l'ensemble des éléments $s \in E$ tels que $\sup_{v \in M_K} \|s\|_v \leqslant 1$ (un tel élément est appelé une *section effective* de $\overline{E}$). C'est un ensemble fini. On désigne par $\widehat{h}^0(\overline{E})$ le nombre réel $\ln(\#\widehat{H}^0(\overline{E}))$. Rappelons d'abord un résultat de Gillet et Soulé [21, théorème 2]. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on introduit une constante $C(K, n)$ comme la suite

$$\begin{aligned} &n d_K \ln(3) + n(r_1 + r_2)\ln(2) + \frac{n}{2}\ln|\Delta_K| - r_1 \ln(V(B_n)n!) \\ &-r_2 \ln(V(B_{2n})(2n)!) + \ln((d_K n)!), \end{aligned}$$

où $d_K = [K : \mathbb{Q}]$, $\Delta_K$ est le discriminant du corps $K$, $B_n$ désigne la boule unité dans $\mathbb{R}^n$, $V(.)$ est la mesure de Lebesgue, et $r_1$ et $r_2$ sont respectivement les nombres des places réelles et complexes de $K$. Rappelons que la formule de Sterling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n \quad (n \to +\infty)$$

et la relation

$$V(B_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$$

montrent que

$$C(K,n)=\frac{1}{2}[K:\mathbb{Q}]n\ln(n)+O(n),\qquad n\to+\infty.$$

**Théorème 6.4** (Gillet-Soulé) *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique sur* Spec $K$ *qui provient d'un fibré vectoriel hermitien sur* Spec $\mathcal{O}_K$. *Soit $n$ le rang de $E$ sur $K$. Alors on a*

$$\left|\widehat{h}^0(\overline{E})-\widehat{h}^0(\overline{\omega_{K/\mathbb{Q}}}\otimes\overline{E}^\vee)-\widehat{\deg}(\overline{E})\right|\leqslant C(K,n),\tag{26}$$

*où $\overline{\omega_{K/\mathbb{Q}}}$ est le fibré inversible adélique associé à $\omega_{\mathcal{O}_K}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_K,\mathbb{Z})$ muni de la famille de normes $(\|.\|_v)_{v\in M_{K,\infty}}$ telles que $\|\mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}}\|_v=1$ pour tout $v\in M_{K,\infty}$.*

Le fibré inversible adélique $\overline{\omega_{K/\mathbb{Q}}}$ devrait être considéré comme le faisceau dualisant relative arithmétique de Spec $K\to$ Spec $\mathbb{Q}$. Son degré d'Arakelov est $\ln|\Delta_K|$.

**Lemme 6.5** *Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique non-nul sur* Spec $K$ *qui provient d'un fibré vectoriel hermitien sur* Spec $\mathcal{O}_K$.

(a) *Si $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})<0$, alors $\widehat{h}^0(\overline{E})=0$.*
(b) *Si $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})>[K:\mathbb{Q}]^{-1}\ln|\Delta_K|$, alors $|\widehat{h}^0(\overline{E})-\widehat{\deg}(\overline{E})|\leqslant C(K,\mathrm{rg}(E))$.*
(c) *Si $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})\geqslant 0$, alors $|\widehat{h}^0(\overline{E})-\widehat{\deg}(\overline{E})|\leqslant\ln|\Delta_K|\,\mathrm{rg}(E)+C(K,\mathrm{rg}(E))$.*

*Démonstration* Pour tout nombre réel $t$, on désigne par $\mathcal{O}(t)$ le fibré inversible adélique sur Spec $K$ dont l'espace vectoriel sous-jacent s'identifie à $K$ et telle que $\|1\|_{\mathfrak{p}}=1$ pour toute place non-archimédienne $\mathfrak{p}$ et que $\|1\|_\sigma=\mathrm{e}^{-1}$ pour toute place archimédienne $\sigma$. Le degré d'Arakelov du fibré inversible adélique $\mathcal{O}(t)$ est alors $[K:\mathbb{Q}]t$.

(a) On suppose que $\overline{E}$ possède une section effective non-nulle, qui définit un homomorphisme injectif de $\mathcal{O}(0)$ vers $\overline{E}$. D'après l'inégalité de pentes (cf. [16, lemme 6.4]), on obtient $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})\geqslant 0$.
(b) Comme $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})>[K:\mathbb{Q}]^{-1}\ln|\Delta_K|$, on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{\omega_{K/\mathbb{Q}}}\otimes\overline{E}^\vee)=\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{\omega_{K/\mathbb{Q}}})+\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}^\vee)=[K:\mathbb{Q}]^{-1}\ln|\Delta_K|-\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})<0.$$

Par le résultat obtenu dans (a), on obtient $\widehat{h}^0(\overline{\omega_{K/\mathbb{Q}}}\otimes\overline{E}^\vee)=0$. L'inégalité annoncée provient donc de la formule (26).
(c) Soient $\varepsilon>0$ un nombre réel et $t=[K:\mathbb{Q}]^{-1}\ln|\Delta_K|+\varepsilon$. On a alors $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}\otimes\mathcal{O}(t))>[K:\mathbb{Q}]^{-1}\ln|\Delta_K|$. D'après (b), on obtient

$$\widehat{h}^0(\overline{E}\otimes\mathcal{O}(t))\leqslant\widehat{\deg}(\overline{E}\otimes\mathcal{O}(t))+C(K,\mathrm{rg}(E))=\widehat{\deg}(\overline{E})+t\,\mathrm{rg}(E)+C(K,\mathrm{rg}(E)).$$

En outre, comme $t>0$, on a $\widehat{h}^0(\overline{E})\leqslant\widehat{h}^0(\overline{E}\otimes\mathcal{O}(t))$. On obtient donc

$$\widehat{h}^0(\overline{E})-\widehat{\deg}(\overline{E})\leqslant t\,\mathrm{rg}(E)+C(K,\mathrm{rg}(E)).$$

De plus, l'inégalité (26) implique que

$$\widehat{h}^0(\overline{E})-\widehat{\deg}(\overline{E})\geqslant\widehat{h}^0(\overline{\omega_{K/\mathbb{Q}}}\otimes\overline{E}^\vee)-C(K,\mathrm{rg}(E))\geqslant -C(K,\mathrm{rg}(E)).$$

On obtient alors

$$|\widehat{h}^0(\overline{E})-\widehat{\deg}(\overline{E})|\leqslant t\,\mathrm{rg}(E)+C(K,\mathrm{rg}(E)).$$

Comme $\varepsilon$ est arbitraire, on obtient le résultat souhaité. □

**Théorème 6.6** *Soit* $\overline{E}$ *un fibré vectoriel adélique non-nul sur* Spec $K$ *qui provient d'un fibré vectoriel hermitien sur* Spec $\mathcal{O}_K$. *Alors on a*

$$\left|\widehat{h}^0(\overline{E}) - [K:\mathbb{Q}]\,\widehat{\deg}_{n+}(\overline{E})\right| \leqslant \mathrm{rg}(E)\ln|\Delta_K| + C(K, \mathrm{rg}(E)). \tag{27}$$

*Démonstration* Soient $0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_n = E$ le drapeau de Harder–Narasimhan de $E$, et $\alpha_i = \widehat{\mu}(\overline{E}_i/\overline{E}_{i-1})$. Soit $j$ le dernier indice dans $\{1, \ldots, n\}$ tel que $\alpha_j \geqslant 0$. Si un tel indice n'existe pas, on prend $j = 0$ par convention. Par définition on a $\widehat{\deg}_{n+}(\overline{E}) = \widehat{\deg}_n(\overline{E}_j)$. Si $j = 0$, alors $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = 0$, et donc $\widehat{h}^0(\overline{E}) = 0$. En outre, par convention on a $\widehat{\deg}_{n+}(\overline{E}) = 0$. L'inégalité (27) est donc triviale. Si $j > 0$, alors $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}/\overline{E}_j) = \alpha_{j-1} < 0$. Par conséquent, on a $\widehat{h}^0(\overline{E}/\overline{E}_j) = 0$ et donc $\widehat{h}^0(\overline{E}) = \widehat{h}^0(\overline{E}_j)$. En outre, on a $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_j) = \alpha_j \geqslant 0$, et par le lemme 6.5.(c), on obtient

$$\begin{aligned}\left|\widehat{h}^0(\overline{E}) - [K:\mathbb{Q}]\,\widehat{\deg}_{n+}(\overline{E})\right| &= \left|\widehat{h}^0(\overline{E}_j) - [K:\mathbb{Q}]\,\widehat{\deg}_{n+}(\overline{E}_j)\right| \\ &\leqslant \mathrm{rg}(E_j)\ln|\Delta_K| + C(K, \mathrm{rg}(E_j)) \leqslant \mathrm{rg}(E)\ln|\Delta_K| + C(K, \mathrm{rg}(E)).\end{aligned}$$

Le résultat est donc démontré. □

## 6.2 Filtration par hauteur

Soit $\overline{E} = (E, (\|.\|_v)_{v\in M_K})$ un fibré vectoriel adélique sur Spec $K$ (qui n'est pas nécessairement hermitien). Pour tout élément non-nul $s$ de $E$, on désigne par $h_{\overline{E}}(s)$ le nombre $-\widehat{\deg}_n(\overline{Ks})$, appelé la *hauteur normalisée* de $s$. Plus généralement, si $K'$ est une extension finie de $K$, on peut construire un fibré vectoriel adélique $\overline{E}\otimes_K K'$ sur Spec $K'$ dont l'espace vectoriel sous-jacent est $E_{K'} := E\otimes_K K'$ et dont la norme en $v' \in M_{K'}$ s'identifie à $\|.\|_v$ avec $v \in M_K$, où $v'$ prolonge $v$. Ainsi on peut définir la hauteur normalisée pour tout élément non-nul de $E_{K'}$. En outre, pour toute extension finie $K''$ de $K'$, la hauteur normalisée de $s \in E_{K'}$ s'identifie à celle de son image canonique dans $E_{K''}$. Cette observation permet d'étendre $h_{\overline{E}}$ en une fonction sur l'ensemble des vecteurs non-nuls dans $E_{K^{\mathrm{a}}}$, où $K^{\mathrm{a}}$ désigne la clôture algébrique de $K$. En outre, d'après la formule du produit, la fonction $h_{\overline{E}}$ est invariante sous la multiplication par un scalaire non-nul dans $K^{\mathrm{a}}$. Ainsi on peut la considérer comme une fonction définie sur l'ensemble des points algébriques de $\mathbb{P}(E^\vee)$. Il s'avère que cette fonction s'identifie à la hauteur absolue par rapport au faisceau inversible universel $\mathcal{O}_{E^\vee}(1)$ muni des métriques de Fubini-Study.

Pour tout nombre réel $t$, on désigne par $\mathcal{F}^t_{\mathrm{ht}}(E_{K^{\mathrm{a}}})$ le sous-$K^{\mathrm{a}}$-espace vectoriel de $E_{K^{\mathrm{a}}}$ engendré par tous les vecteurs non-nuls $s$ vérifiant $h_{\overline{E}}(s) \leqslant -t$. La famille $(\mathcal{F}^t_{\mathrm{ht}}(E_{K^{\mathrm{a}}}))_{t\in\mathbb{R}}$ définit une $\mathbb{R}$-filtration décroissante de l'espace vectoriel $E_{K^{\mathrm{a}}}$. Ses points de saut successifs (où on compte les multiplicités) sont la version logarithmique des minima absolus définis par Roy et Thunder [35] ( voir aussi [18] pour une présentation détaillée de différentes notions de minima) dans le cadre de la géométrie des nombres adéliques, et par Soulé dans le cadre de la géométrie d'Arakelov[9]. Pour tout entier $i \in \{1, \ldots, \mathrm{rg}(E)\}$, on désigne par $\Lambda_i(\overline{E})$ le nombre

$$\sup\{t \in \mathbb{R} : \mathrm{rg}_{K^{\mathrm{a}}}(\mathcal{F}^t_{\mathrm{ht}}(E_{K^{\mathrm{a}}})) \geqslant i\},$$

appelé le $i^{\text{ème}}$ minimum absolu logarithmique de $\overline{E}$.

La comparaison entre les minima successifs et les pentes successives d'un fibré vectoriel adélique hermitien est un problème naturel. Les inégalités $\Lambda_i(.) \leqslant \widehat{\mu}_i(.)$ sont relativement

[9] Dans son exposé au colloque "*Arakelov theory and its arithmetic applications.*" le 22 février 2010 à Regensbourg.

standards et résultent de l'inégalité de pentes. Cependant la comparaison au sens inverse est beaucoup plus délicate. Conjecturalement on a

$$\widehat{\mu}_i(\overline{E}) \leqslant \Lambda_i(\overline{E}) + \frac{1}{2}\ln(\mathrm{rg}(E)), \quad i \in \{1, \dots, \mathrm{rg}(E)\} \tag{28}$$

pour tout fibré vectoriel adélique hermitien $\overline{E}$ sur Spec $K$. Une approche possible pour attaquer ce problème est d'établir une version absolue du théorème de transférence à la Banaszczyk [2], qui n'est malheureusement pas encore disponible.

Dans la suite, on établit une version plus faible de l'inégalité (28). Il s'agit d'une comparaison explicite entre

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E)} \max(\widehat{\mu}_i(\overline{E}), 0) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E)} \max(\Lambda_i(\overline{E}), 0)$$

qui provient du lemme de Siegel absolu dû à Bombieri-Vaaler [5] et Zhang [44].

**Proposition 6.7** *Si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel adélique hermitien sur* Spec $K$*, alors on a*

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E)} \max(\widehat{\mu}_i(\overline{E}), 0) \leqslant \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E)} \max(\Lambda_i(\overline{E}), 0) + \frac{1}{2}\mathrm{rg}(E)\ln(\mathrm{rg}(E)). \tag{29}$$

*Démonstration* Rappelons que le lemme de Siegel absolu montre que, pour tout fibré vectoriel adélique hermitien $\overline{E}$ sur Spec $K$, on a (cf. [16, théorème 4.14] et [17, §2.1.3][10])

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E)} \Lambda_i(\overline{E}) \geqslant \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{E}) - \frac{1}{2}\mathrm{rg}(E)\ln(\mathrm{rg}(E)). \tag{30}$$

L'inégalité est donc vraie lorsque $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) \geqslant 0$.

Dans le cas général, il existe un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ tel que $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{F}) \geqslant 0$ et que

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{F}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(F)} \widehat{\mu}_i(\overline{F}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E)} \max(\widehat{\mu}_i(\overline{E}), 0). \tag{31}$$

On peut choisir $F$ comme le dernier sous-espace vectoriel dans le drapeau de Harder–Narasimhan de $E$ vérifiant $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{F}) \geqslant 0$. Comme $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$, on a $\Lambda_i(\overline{F}) \leqslant \Lambda_i(\overline{E})$ pour tout $i \in \{1, \dots, \mathrm{rg}(F)\}$. L'inégalité (30) appliquée à $\overline{F}$ montre alors que

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(F) \leqslant \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(F)} \Lambda_i(\overline{F}) + \frac{1}{2}\mathrm{rg}(F)\ln(\mathrm{rg}(F)) \leqslant \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(F)} \Lambda_i(\overline{E}) + \frac{1}{2}\mathrm{rg}(E)\ln(\mathrm{rg}(E)).$$

D'après la formule (31), on en déduit l'inégalité (29). □

*Remarque 6.8* L'inégalité (29) est une conséquence immédiate de (28). En outre, en utilisant le lemme de Siegel absolu, on peut montrer que, si $\overline{E}$ est un fibré vectoriel adélique sur Spec $K$ qui est hermitien, alors on a

$$\widehat{\mu}_1(\overline{E}) \leqslant \Lambda_1(\overline{E}) + \frac{1}{2}\ln(\mathrm{rg}(E)). \tag{32}$$

On renvoie les lecteurs dans [19, §3.2] pour une démonstration.

[10] Comme on considère les minima absolus, le défaut de pureté est anodin ici.

### 6.3 Le cas non-hermitien

Soit $\overline{E}$ un fibré vectoriel adélique général. Gaudron a défini dans [16] le degré d'Arakelov[11] de $\overline{E}$ comme la différence entre la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\overline{E}$ et celle du fibré vectorial adélique trivial dont le rang est $\mathrm{rg}(E)$. Cela permet de généraliser la notion des pentes successives dans un cadre plus général des fibrés vectoriels adéliques non nécessairement hermitiens. Comme dans le cas hermitien, les pentes successives de $\overline{E}$ sont définies comme les pentes du polygone de Harder–Narasimhan de $\overline{E}$, dont le graphe est le bord supérieur de l'enveloppe convexe des points dans $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(\mathrm{rg}(F), \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{F}))$, où $F$ parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $E$. À l'aide de la méthode d'ellipsoïde de John-Löwner,[12] on peut associer à $E$ une structure de fibré vectoriel adélique hermitien $(\|.\|'_v)_{v\in M_K}$ de sorte que $\|.\|'_v = \|.\|_v$ si $v$ est une place non-archimédienne, et

$$\|.\|'_v \leqslant \|.\|_v \leqslant (\mathrm{rg}(E))^{1/2}\|.\|'_v$$

lorsque $v$ est archimédienne. Si on note $\overline{E}'$ le fibré vectoriel adélique $(E, (\|.\|'_v)_{v\in M_K})$, on a $\widehat{\mu}_i(\overline{E}) \leqslant \widehat{\mu}_i(\overline{E}')$ et $\Lambda_i(\overline{E}') \leqslant \Lambda_i(\overline{E}) + \frac{1}{2}\ln(\mathrm{rg}(E))$ pour tout $i \in \{1, \ldots, \mathrm{rg}(E)\}$. On obtient à partir de l'inégalité (29) (appliquée à $\overline{E}'$) la relation suivante

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E)} \max(\widehat{\mu}_i(\overline{E}), 0) \leqslant \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E)} \max(\Lambda_i(\overline{E}), 0) + \mathrm{rg}(E)\ln(\mathrm{rg}(E)). \tag{33}$$

## 7 Majoration de la fonction de Hilbert–Samuel arithmétique

Soit $K$ un corps de nombres. Dans ce paragraphe, on établit un analogue arithmétique du corollaire 5.2 pour un système gradué en fibrés vectoriels adéliques sur Spec $K$.

Soit $X$ un schéma projectif et intègre de dimension $d \geqslant 1$ sur Spec $K$, $L$ un faisceau inversible gros sur $X$. On entend par *système linéaire gradué* de $L$ *en fibrés vectoriels adéliques* tout système linéaire gradué $E_\bullet = \bigoplus_{n\geqslant 0} E_n$ de $L$ dont chaque composante homogène $E_n$ est muni d'une structure de fibré vectoriel adélique sur Spec $K$ de telle sorte que

$$\|s \cdot s'\|_v \leqslant \|s\|_v \cdot \|s'\|_v \tag{34}$$

pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et tous $s \in E_{n,\mathbb{C}_v}$, $s' \in E_{m,\mathbb{C}_v}$. Cette inégalité montre que la suite $(\Lambda_1(\overline{E}_n))_{n\geqslant 1}$ est sur-additive. Donc la suite $(\Lambda_1(\overline{E}_n)/n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un élément dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ pourvu que $E_n \neq \{0\}$ pour tout entier $n$ suffisamment positif. On désigne par $\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(\overline{E}_\bullet)$ cette limite, appelée la *pente maximale asymptotique* de $\overline{E}_\bullet$. Cette expression peut être justifiée par l'observation suivante: pour tout fibré vectoriel adélique non-nul (non nécessairement hermitien) $\overline{F}$ sur Spec $K$, on a $\Lambda_1(\overline{F}) \leqslant \widehat{\mu}_1(\overline{F}) \leqslant \Lambda_1(\overline{F}) + \ln(\mathrm{rg}(F))$, et donc $\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(\overline{E}_\bullet)$ est égal à $\lim_{n\to+\infty} \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_n)/n$. En outre, si $E_\bullet$ contient un diviseur ample et si $\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(\overline{E}_\bullet) < +\infty$, il est démontré dans [8, théorème 2.8] que la suite

[11] Si on fixe un isomorphisme d'espaces vectoriels $\phi : E \to K^n$, où $n = \mathrm{rg}_K(E)$, alors le degré d'Arakelov de $\overline{E}$ est défini comme

$$\widehat{\deg}(\overline{E}) = \ln\frac{\mathrm{vol}(\phi(\mathbb{B}(\overline{E})))}{\mathrm{vol}(\mathbb{B}(\overline{K}^n))},$$

où $\mathbb{B}(.)$ désigne la boule unité adélique, et vol désigne une mesure de Haar sur l'espace adélique $\mathbb{A}^n_K$. Cette définition ne dépend pas du choix de $\phi$ et vol.

[12] On renvoie les lecteurs dans [16, §4] pour les détails.

$$\frac{(d+1)!}{n^{d+1}}\sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E_n)}\max(\Lambda_i(\overline{E}_n),0),\qquad n\geqslant 1.$$

converge vers un nombre réel que l'on notera comme $\widehat{\mathrm{vol}}_{\mathrm{n}}(\overline{E}_\bullet)$.

**Théorème 7.1** *Soit $X$ un schéma projectif et géométriquement intègre de dimension $d$ sur* $\operatorname{Spec} K$, *$L$ un faisceau inversible gros sur $X$ et $\overline{E}_\bullet=\bigoplus_{n\geqslant 0}\overline{E}_n$ un système linéaire gradué de $L$ en fibrés vectoriels adéliques. On suppose que le système linéaire gradué $E_\bullet$ contient un diviseur ample et que $X_{K^{\mathrm{a}}}$ admet un tour de fibrations sur courbes $\Theta$. Alors on a*

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E_1)}\max(\Lambda_i(\overline{E}_1),0)\leqslant\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_{\mathrm{n}}(\overline{E}_\bullet)}{(d+1)!}+\widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{E}_\bullet)\varepsilon^{\Theta}(E_{\bullet,K^{\mathrm{a}}}).\tag{35}$$

*Démonstration* Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ et tout nombre réel $t$, on désigne par $\mathcal{F}^tE_{n,K^{\mathrm{a}}}$ le sous-$K^{\mathrm{a}}$-espace vectoriel engendré par les vecteurs non-nuls $s\in E_{n,K^{\mathrm{a}}}$ tels que $h_{\overline{E}_n}(s)\leqslant -t$. Il s'avère que $(\mathcal{F}^tE_{n,K^{\mathrm{a}}})_{t\in\mathbb{R}}$ est une $\mathbb{R}$-filtration décroissante de $E_{n,K^{\mathrm{a}}}$. En outre, la relation (34) montre que

$$(\mathcal{F}^{t_1}E_{n_1,K^{\mathrm{a}}})\cdot(\mathcal{F}^{t_2}E_{n_2,K^{\mathrm{a}}})\subset\mathcal{F}^{t_1+t_2}E_{n_1+n_2,K^{\mathrm{a}}}$$

pour tous $(n_1,n_2)\in\mathbb{N}^2$ et $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $E_\bullet^t:=\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathcal{F}^{nt}E_{n,K^{\mathrm{a}}}$ est alors un système linéaire gradué de $L_{K^{\mathrm{a}}}$. D'après [8, lemme 1.6], ce système linéaire gradué contient un diviseur ample dès que $t<\widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{E}_\bullet)$. En outre, on a (d'après le corollaire 1.13 du *loc. cit.*)

$$\widehat{\mathrm{vol}}_{\mathrm{n}}(\overline{E}_\bullet)=(d+1)\int_0^{+\infty}\mathrm{vol}(E_\bullet^t)\,\mathrm{d}t=(d+1)\int_0^{\widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{E}_\bullet)}\mathrm{vol}(E_\bullet^t)\,\mathrm{d}t,$$

où $d$ est la dimension de $X$. Le théorème 5.1 appliqué à $E_\bullet^t$ montre que

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}^tE_{1,K^{\mathrm{a}}})\leqslant\frac{\mathrm{vol}(E_{\bullet,K^{\mathrm{a}}}^t)}{d!}+\varepsilon^{\Theta}(E_{\bullet,K^{\mathrm{a}}}^t)\leqslant\mathrm{vol}(E_{\bullet,K^{\mathrm{a}}}^t)+\varepsilon^{\Theta}(E_{\bullet,K^{\mathrm{a}}}).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E_1)}\max(\Lambda_i(\overline{E}_1),0)&=\int_0^{\Lambda_1(\overline{E}_1)}\mathrm{rg}(\mathcal{F}^tE_{1,K^{\mathrm{a}}})\,\mathrm{d}t=\int_0^{\widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{E}_\bullet)}\mathrm{rg}(\mathcal{F}^tE_{1,K^{\mathrm{a}}})\,\mathrm{d}t\\&\leqslant\int_0^{\widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{E}_\bullet)}\frac{\mathrm{vol}(E_\bullet^t)}{d!}\,\mathrm{d}t+\widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{E}_\bullet)\varepsilon^{\Theta}(E_{\bullet,K^{\mathrm{a}}})=\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_{\mathrm{n}}(\overline{E}_\bullet)}{(d+1)!}+\widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{E}_\bullet)\varepsilon^{\Theta}(E_{\bullet,K^{\mathrm{a}}}),\end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient du fait que $\Lambda_1(\overline{E}_1)\leqslant\widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{E}_\bullet)$. La démonstration est donc achevée. □

On déduit du théorème précédent et l'inégalité (33) le résultat suivant.

**Corollaire 7.2** *Avec les notations du théorème précédent, on a*

$$\sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E_1)}\max(\widehat{\mu}_i(\overline{E}_1),0)\leqslant\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_{\mathrm{n}}(\overline{E}_\bullet)}{(d+1)!}+\widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{E}_\bullet)\varepsilon^{\Theta}(E_{\bullet,K^{\mathrm{a}}})+\mathrm{rg}(E_1)\ln(\mathrm{rg}(E_1)).\tag{36}$$

Soit $\pi : \mathscr{X} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ un morphisme projectif et plat d'un schéma intègre $\mathscr{X}$ vers $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. Par faisceau inversible hermitien sur $\mathscr{X}$, on entend un $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-module inversible $\mathscr{L}$ dont le tire en arrière sur $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ est muni d'une métrique continue qui est invariante par la conjugaison complexe, où $\mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ désigne l'espace analytique complexe associé à $\mathscr{X} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. Étant donné un faisceau inversible hermitien $\overline{\mathscr{L}}$ sur $\mathscr{X}$, on peut construire une structure de fibré vectoriel adélique sur $H^0(X, \mathscr{L}_K)$. En une place finie $\mathfrak{p}$, la norme $\|.\|_{\mathfrak{p}}$ sur $H^0(X, \mathscr{L}_K) \otimes_K \mathbb{C}_{\mathfrak{p}}$ provient de la structure de $\mathcal{O}_K$-module de $\pi_*(\mathscr{L})$: la boule unité fermé pour la norme $\|.\|_{\mathfrak{p}}$ s'identifie à $\pi_*(\mathscr{L}) \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, où $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ désigne l'anneau de valuation de $\mathbb{C}_{\mathfrak{p}}$. En une place infinie $\sigma : K \to \mathbb{C}$, la norme $\|.\|_\sigma$ est la norme sup: pour tout élément $s \in H^0(X, \mathscr{L}_K) \otimes_{K,\sigma} \mathbb{C}$, on a

$$\|s\|_\sigma := \sup_{x \in \mathscr{X}_\sigma(\mathbb{C})} \|s(x)\|.$$

On utilise l'expression $\pi_*(\overline{\mathscr{L}})$ pour désigner ce fibré vectoriel adélique. Ainsi

$$\overline{E}_\bullet = \bigoplus_{n \geqslant 0} \pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})$$

devient un système linéaire gradué en fibrés vectoriels adéliques sur Spec $K$. Dans le cas où $\mathscr{L}_K$ est un faisceau inversible gros, le système linéaire gradué $E_\bullet$ contient un diviseur ample (voir la définition 3.5). On utilise l'expression $\widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{\mathscr{L}})$ pour désigner la pente maximale asymptotique de $\overline{E}_\bullet$ (voir la page 33 pour la définition de $\widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{E}_\bullet)$). Il s'avère que la relation $\widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}) = n\widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{\mathscr{L}})$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant 1$. Le nombre $\widehat{\mathrm{vol}}_{\mathrm{n}}(\overline{E}_\bullet)$ décrit le comportement asymptotique du nombre de sections effectives de $\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}$ lorsque $n \to +\infty$. En effet, en utilisant l'inégalité (27) et la méthode d'ellipsoïde de John-Löwner, on peut montrer que

$$\widehat{\mathrm{vol}}_{\mathrm{n}}(\overline{E}_\bullet) = \frac{1}{[K : \mathbb{Q}]} \lim_{n \to +\infty} \frac{\widehat{h}^0(\overline{E}_n)}{n^{d+1}/(d+1)!},$$

où $d$ est la dimension relative de $\pi$. Rappelons que la limite figurant dans le terme de droite de la formule est appelée le *volume arithmétique*, notée comme $\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}})$. On renvoie les lecteurs dans [31] où cette notion a été proposée. Dans le cas où le faisceau inversible hermitien $\overline{\mathscr{L}}$ est arithmétiquement nef, c'est-à-dire que $\mathscr{L}$ est nef relativement à $\pi$, la métrique de $\overline{\mathscr{L}}$ est plurisous-harmonique, et la fonction hauteur sur l'ensemble des points algébriques de $\mathscr{X}_K$ définie par $\overline{\mathscr{L}}$ est à valeurs positives, le volume arithmétique de $\overline{\mathscr{L}}$ s'identifie au nombre d'autointersection arithmétique $\widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}})^{d+1}$. On déduit alors du corollaire 7.2 le résultat suivant.

**Théorème 7.3** *Soit $\pi : \mathscr{X} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ un morphisme projectif et plat. On suppose que la fibre générique géométrique $\mathscr{X}_{K^{\mathrm{a}}}$ est intègre et admet un tour de fibrations sur courbes $\Theta$. Alors, pour tout faisceau inversible hermitien arithmétiquement nef $\overline{\mathscr{L}}$ sur $\mathscr{X}$ tel que $\mathscr{L}_K$ soit gros, il existe une fonction explicite $F_{\overline{\mathscr{L}}} : \mathbb{N} \to [0, +\infty[$ telle que*

$$F_{\overline{\mathscr{L}}}(n) = [K : \mathbb{Q}] \frac{c_1(\mathscr{L}_K)^d}{(d-1)!} n^d \ln(n) + O(n^d), \quad n \to +\infty, \tag{37}$$

*et que*

$$\widehat{\deg}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})) \leqslant \frac{\widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}})^{d+1}}{(d+1)!} n^{d+1} + F_{\overline{\mathscr{L}}}(n) \tag{38}$$

*pour tout entier $n \geqslant 1$, où $d$ est la dimension relative de $\pi$.*

*Démonstration* Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $r_n = \mathrm{rg}_{\mathcal{O}_K}(\pi^*(\mathscr{L}^{\otimes n}))$. Comme $\mathscr{L}_K$ est nef et gros, on a (cf. [28, corollaire 1.4.38])

$$r_n = \frac{c_1(\mathscr{L}_K)^d}{d!} n^d + O(n^{d-1}). \tag{39}$$

Soit $\overline{E}_\bullet = \bigoplus_{n \geqslant 0} \pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})$. Compte tenu de [8, lemme 2.6], la relation $\widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{E}_\bullet) < +\infty$ est satisfaite. D'après le corollaire 7.2, on obtient

$$\widehat{\deg}(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})) \leqslant \sum_{i=1}^{r_n} \max(\widehat{\mu}_i(\overline{E}_n), 0) \leqslant [K:\mathbb{Q}]\,\widehat{\mathrm{vol}}_{\mathrm{n}}(\overline{E}_\bullet) \frac{n^{d+1}}{(d+1)!} + F_{\overline{\mathscr{L}}}(n)$$

avec

$$F_{\overline{\mathscr{L}}}(n) = [K:\mathbb{Q}]\big(n \widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{E}_\bullet)\varepsilon^{\Theta}(E_{\bullet,K^{\mathrm{a}}}^{(n)}) + r_n \ln(r_n)\big)$$

Comme $\varepsilon^{\Theta}(E_{\bullet,K^{\mathrm{a}}}^{(n)}) \leqslant n^{d-1}\varepsilon^{\Theta}(E_{\bullet,K^{\mathrm{a}}})$, on déduit de (39) la relation (37). Enfin, comme $\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}}) = [K:\mathbb{Q}]\,\widehat{\mathrm{vol}}_{\mathrm{n}}(\overline{E}_\bullet)$, l'inégalité (38) est démontrée. □

*Remarque 7.4* Si on remplace $\widehat{\deg}(.)$ par la somme des minima absolus successifs dans le théorème précédent, on peut obtenir une majoration asymptotique où le terme d'erreur est $O(n^d)$. Plus précisément, il existe une fonction explicite $\widetilde{F}_{\overline{\mathscr{L}}} : \mathbb{N} \to [0, +\infty[$ telle que $\widetilde{F}_{\overline{\mathscr{L}}}(n) = O(n^d)$ et que

$$\sum_{i=1}^{r_n} \Lambda_i(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})) \leqslant \frac{\widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}})^{d+1}}{(d+1)!} n^{d+1} + \widetilde{F}_{\overline{\mathscr{L}}}(n).$$

Cela suggère que le terme sous-dominant (de l'ordre $n^d \ln(n)$) dans le théorème de Riemann–Roch arithmétique (cf. [37, §2.2]) peut provenir du choix de métrique et de la comparaison entre certains invariants arithmétiques de fibré vectoriel hermitien sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$. Des phénomènes similaires existent aussi dans l'étude des surfaces arithmétiques, comme par exemple [14, théorème 3] (voir aussi [1, §5.1]).

Dans la suite, on établit un analogue du théorème 7.3 pour la fonction $\widehat{h}^0$. En utilisant le deuxième théorème de Minkowski et la filtration par les minima (usuels), on peut majorer $\widehat{h}^0(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}))$ par une fonction explicite.

Soit $\overline{M}$ un fibré vectoriel normé sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ (i.e. un réseau dans un espace vectoriel normé de dimension fini sur $\mathbb{R}$). Pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, on définit le $i^{\text{ème}}$ *minimum logarithmique* de $\overline{M}$ comme

$$\lambda_i(\overline{M}) := \sup\Big\{t \in \mathbb{R} \,\Big|\, \mathrm{rg}_{\mathbb{Q}}\big(\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}\{s \in M \mid \|s\| \leqslant \mathrm{e}^{-t}\}\big) \geqslant i\Big\}.$$

Rappelons que la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\overline{M}$ est définie comme

$$\chi(\overline{M}) = \ln \frac{\mathrm{vol}(B(M_{\mathbb{R}}, \|.\|))}{\mathrm{covol}(M)},$$

où $B(M_{\mathbb{R}}, \|.\|)$ désigne la boule unité fermée dans $M_{\mathbb{R}}$, vol est une mesure de Haar sur $M_{\mathbb{R}}$ et $\mathrm{covol}(M)$ est la mesure de $M_{\mathbb{R}}/M$ par rapport à la mesure induite par vol.

**Lemme 7.5** *Soit $\overline{M}$ un réseau de rang $r > 0$ dans un espace vectoriel normé. On a*

$$\widehat{h}^0(\overline{M}) \leqslant \sum_{i=1}^{r} \max(\lambda_i(\overline{M}), 0) + r\ln(2) + \ln(2r!). \tag{40}$$

*Démonstration* Quitte à remplacer $M$ par le sous-réseau engendré par les éléments $s \in M$ vérifiant $\|s\| \leqslant 1$, on peut supposer que $\lambda_i(\overline{M}) \geqslant 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. Rappelons que le deuxième théorème de Minkowski montre que

$$r\ln(2) - \ln(r!) \leqslant \chi(\overline{M}) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(\overline{M}) \leqslant r\ln(2).$$

En outre, si on fixe une base de $M$ sur $\mathbb{Z}$ et identifie $M_{\mathbb{R}}$ à $\mathbb{R}^r$ via cette base, alors $B(M_{\mathbb{R}}, \|.\|)$ est un corps convexe symétrique dans $\mathbb{R}^r$ dont le volume est $\chi(\overline{M})$ (où on a considéré la mesure de Haar standard sur $\mathbb{R}^r$). D'après un résultat de Blichfeldt (cf. [24, page 372]), on a

$$\widehat{h}^0(\overline{M}) \leqslant \ln(r!\exp(\chi(\overline{M})) + r) \leqslant \ln(2r!) + \chi(\overline{M}), \tag{41}$$

où la deuxième inégalité provient de l'hypothèse $\forall i,\ \ \lambda_i(\overline{M}) \geqslant 0$. En effet, sous cette hypothèse on a $r!\exp(\chi(\overline{M})) \geqslant 2^r > r$. D'après la deuxième inégalité de (41), on obtient le résultat. □

**Théorème 7.6** *Soient* $\pi : \mathscr{X} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ *un morphisme projectif et plat de dimension relative* $d$ *d'un schéma intègre vers* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$*, et* $\overline{\mathscr{L}}$ *un faisceau inversible hermitien sur* $\mathscr{X}$ *tel que* $\mathscr{L}_K$ *soit gros. On suppose*[13] *que* $\mathscr{X}_{\mathbb{Q}}$ *admet un tour de fibrations sur courbes* $\Theta$*. Alors on a*

$$\sum_{i=1}^{R_n} \max(\lambda_i(\overline{E}_n), 0) \leqslant \frac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}})}{(d+1)!} n^{d+1} + n^d\, \widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{\mathscr{L}})\varepsilon^{\Theta}(E_{\bullet,\mathbb{Q}}), \tag{42}$$

*où*

$$E_{\bullet,\mathbb{Q}} := \bigoplus_{n \geqslant 0} H^0(\mathscr{X}_{\mathbb{Q}}, \mathscr{L}_{\mathbb{Q}});$$

*et*

$$\widehat{h}^0(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})) \leqslant \frac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}})}{(d+1)!} n^{d+1} + G_{\overline{\mathscr{L}}}(n), \tag{43}$$

*où*

$$G_{\overline{\mathscr{L}}}(n) = n^d\, \widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{\mathscr{L}})\varepsilon^{\Theta}(E_{\bullet,\mathbb{Q}}) + (R_n + 1)\ln(2) + R_n \ln(R_n)$$

*avec* $R_n = \mathrm{rg}_{\mathbb{Q}}(E_n)$*. De plus, la fonction* $G_{\overline{\mathscr{L}}}$ *vérifie la relation*

$$G_{\overline{\mathscr{L}}} = [K:\mathbb{Q}]\frac{\mathrm{vol}(\mathscr{L}_K)}{(d-1)!} n^d \ln(n) + O(n^d), \quad n \to +\infty.$$

*Démonstration* Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par $R_n$ le rang de $\pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n})$ sur $\mathbb{Z}$. Comme $\mathscr{L}_K$ est gros, d'après le théorème 5.1 on a

$$R_n \leqslant [K:\mathbb{Q}]\frac{\mathrm{vol}(\mathscr{L}_K)}{d!} n^d + O(n^{d-1}). \tag{44}$$

Soit $\overline{E}_\bullet = \bigoplus_{n \geqslant 0} \pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})$. On considère chaque $\overline{E}_n$ comme un réseau dans l'espace vectoriel normé $E_n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, qui s'identifie à

$$\bigoplus_{v \in M_{K,\infty}} E_n \otimes_K K_v.$$

[13] Le passage à une modification birationnelle augement éventuellement $\widehat{h}^0(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}))$ ou la somme des minima logarithmiques positifs, mais laisse $\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}})$ invariant. Dans le cas général, quitte à passer à une modification birationnelle, on peut se ramener au cas où $\mathscr{X}_{\mathbb{Q}}$ admet un tour de fibrations sur courbes.

Si $s = (s_v)_{v\in M_{K,\infty}}$ est un élément de $E_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, la norme de $s$ est définie comme

$$\max_{v\in M_{K,\infty}} \|s_v\|_v.$$

On considère $\mathscr{X}_K$ comme un schéma projectif sur Spec $\mathbb{Q}$ (que l'on notera comme $\mathscr{X}_{\mathbb{Q}}$ dans la suite). De même, on considère $\mathscr{L}_K$ comme un faisceau inversible sur $\mathscr{X}_{\mathbb{Q}}$ (que l'on notera comme $\mathscr{L}_{\mathbb{Q}}$). Ainsi $E_{\bullet,\mathbb{Q}}$ devient le système linéaire gradué total de $\mathscr{L}_{\mathbb{Q}}$. Pour chaque entier $n \geqslant 0$, on munit $E_{n,\mathbb{Q}}$ (comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$) de la $\mathbb{R}$-filtration $\mathcal{F}$ par les minima:

$$\mathcal{F}^t(E_{n,\mathbb{Q}}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}\{s \in \pi_*(\mathscr{L}^{\otimes n}) \ : \ \|s\| \leqslant \mathrm{e}^{-t}\}.$$

D'après le corollaire 5.2 (appliqué à $\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n}$), on obtient (cf. [7] proposition 3.2.2 pour la comparaison entre le premier minima et la pente maximale)

$$\sum_{i=1}^{R_n} \max(\lambda_i(\overline{E}_n), 0) \leqslant \frac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}})}{(d+1)!} n^{d+1} + n^d\, \widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{E}_\bullet)\varepsilon^{\Theta}(E_{\bullet,\mathbb{Q}}),$$

où on a utilisé les relations $\widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{E}_\bullet^{(n)}) = n\, \widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{E}_\bullet)$ et $\varepsilon^{\Theta}(E_{\bullet,\mathbb{Q}}^{(n)}) \leqslant n^{d-1}\varepsilon^{\Theta}(E_{\bullet,\mathbb{Q}})$. D'après le lemme précédent, on obtient

$$\widehat{h}^0(\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^{\otimes n})) \leqslant \frac{\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{\mathscr{L}})}{(d+1)!} n^{d+1} + G_{\overline{\mathscr{L}}}(n)$$

avec

$$G_{\overline{\mathscr{L}}}(n) = n^d\, \widehat{\mu}_{\max}^{\mathrm{asy}}(\overline{E}_\bullet)\varepsilon^{\Theta}(E_{\bullet,\mathbb{Q}}) + (R_n+1)\ln(2) + R_n \ln(R_n).$$

Enfin, la relation (44) montre aussitôt que

$$G_{\overline{\mathscr{L}}}(n) = [K:\mathbb{Q}] \frac{\mathrm{vol}(\mathscr{L}_K)}{(d-1)!} n^d \ln(n) + O(n^d).$$

Le théorème est donc achevé. □

*Remarque 7.7* Dans le cas où $\mathscr{X}$ est une surface arithmétique, il est intéressant de comparer le théorème précédent à la majoration obtenu dans [41] (voir aussi l'analogue de ce travail dans le cadre de corps de fonctions [42]). Asymptotiquement le terme $G_{\overline{\mathscr{L}}}(n)$ est meilleur que le terme d'erreur

$$4n[K:\mathbb{Q}]\deg(\mathscr{L}_K)\ln(n[K:\mathbb{Q}]\deg(\mathscr{L}_K)) \tag{45}$$

dans le théorème A du *loc. cit.*. Cependant le terme (45) ne dépend que de l'information géométrique de la fibre générique $\mathscr{L}_K$. On se demande si une combinaison des deux méthodes ne donne pas une majoration effective de la somme des minima logarithmiques positifs de $\pi_*(\overline{\mathscr{L}}^n)$ dont le terme d'erreur est d'ordre $n^d$ et ne dépend que de la géométrie de $\mathscr{L}_K$ dans le cas où $\mathscr{X}$ est une surface arithmétique.

## 8 Le cas de caractéristique positif

Dans ce paragraphe, on établit l'analogue du théorème 5.1 dans le cas où la caractéristique du corps de base est strictement positif. Soit $k$ un corps de caractéristique quelconque. La conclusion de la proposition 2.6, qui est équivalente à la semi-stabilité du produit tensoriel de tout couple de fibrés vectoriels semi-stables sur la courbe régulière qui est projective sur $k$, n'est cependant pas vrai en général. On renvoie les lecteurs dans [20] pour un contre-exemple. La méthode de $\mathbb{R}$-filtration de Harder–Narasimhan que l'on a développée dans § 5 n'est plus valable dans ce cadre-là. On propose d'utiliser les minima successifs dans le cadre de corps de fonction pour surmonter cette difficulté.

Soient $C$ une courbe projective et régulière sur $\operatorname{Spec} k$. On désigne par $K$ le corps des fonctions rationnelles sur $C$. Si $E$ est un fibré vectoriel sur $C$, on désigne par $\mathcal{O}_E(1)$ le faisceau inversible universel du schéma $\mathbb{P}(E)$. On peut définir une fonction de hauteur sur l'ensemble des $k$-points de $\mathbb{P}(E)$ à valeurs dans $K$ comme la suite. Si $x$ est un point dans $\mathbb{P}(E)_k(K)$, il se prolonge en une section $\mathscr{P}_x : C \to \mathbb{P}(E)$ de $\mathbb{P}(E)$. On définit la hauteur $x$ comme

$$h_E(x) := \deg(\mathscr{P}_x^* \mathcal{O}_E(1)).$$

La fonction de hauteur nous permet de définir une filtration $\mathcal{F}$ sur l'espace $K$-vectoriel $E_K$ (la fibre générique de $E$) comme la suite[14]

$$\mathcal{F}^t(E_K) := \operatorname{Vect}_K \left\{ x \in \mathbb{P}(E^\vee)_k(K) \mid h_{E^\vee}(x) \leqslant -t \right\}. \tag{46}$$

Pour tout entier $i \in \{1, \dots, \operatorname{rg}(E)\}$, on désigne par $\lambda_i(E)$ le plus grand nombre réel $t$ tel que $\operatorname{rg}(\mathcal{F}^t(E_K)) \geqslant i$. Les nombres $\lambda_i(E)$ et la filtration $\mathcal{F}$ sont reliés par la formule suivante:

$$\sum_{i=1}^{\operatorname{rg}(E)} \max(\lambda_i(E), 0) = \int_0^{+\infty} \operatorname{rg}_K(\mathcal{F}^t(E_K))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\lambda_1(E)} \operatorname{rg}_K(\mathcal{F}^t(E_K))\,\mathrm{d}t. \tag{47}$$

Les quantités $\lambda_i(E)$ devraient être considérées comme l'analogue des minima successifs dans le cadre de corps de fonctions. On désigne par $M_K$ l'ensemble des points fermés dans la courbe $C$, considéré comme l'ensemble des places du corps de fonctions $K$. Pour tout point $v \in M_K$, on désigne par $|.|_v$ la valeur absolue sur $K$ définie comme

$$\forall\, f \in K^\times \quad |f|_v = \exp(-[k(v) : k]\operatorname{ord}_v(f)),$$

où $k(v)$ est le corps résiduel de $v$ et $\operatorname{ord}_v(f)$ désigne l'ordre d'annulation de $f$ en $v$. Comme dans le cas de corps de nombres, on désigne par $K_v$ le complété de $K$ par rapport à cette valeur absolue et $\mathbb{C}_v$ le complété d'une clôture algébrique de $K_v$, sur lequel la valeur absolue $|.|_v$ s'étend de façon unique. On désigne par $\mathcal{O}_v$ l'anneau de valuation de $\mathbb{C}_v$ par rapport à cette valeur absolue (qui est non-archimédienne).

Si $E$ est un fibré vectoriel sur $C$, alors sa structure de $\mathcal{O}_C$-module définit, pour chaque place $v \in M_K$, une norme $\|.\|_{E,v}$ sur $E \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathbb{C}_v$ dont la boule unité fermée est $E \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_v$. Cette norme est invariante par l'action du groupe de Galois $\operatorname{Gal}(\mathbb{C}_v/K_v)$. On obtient alors un fibré vectoriel adélique sur $\operatorname{Spec} K$ au sens de [16, §3], et il s'avère que l'on peut exprimer le degré de $E$ sous la forme

$$\deg(E) = -\sum_{v \in M_K} \ln \|s_1 \wedge \cdots \wedge s_r\|_{E,v},$$

où $(s_1, \dots, s_r)$ est une base quelconque de $E_K$. En outre, les nombres $\lambda_i(E)$ sont précisément les minima successifs logarithmiques suivant Thunder [39] dans le cadre de corps de fonctions.

D'après un résultat de Roy et Thunder [35, théorème 2.1]: on a

$$\sum_{i=1}^{\operatorname{rg}(E)} \lambda_i(E) \geqslant \deg(E) - \operatorname{rg}(E)\ell(g(C/k)), \tag{48}$$

[14] Rappelons qu'un élément dans $\mathbb{P}(E^\vee)_k(K)$ correspond à un sous-espace $K$-vectoriel de rang 1 de $E_K$.

où $g(C/k)$ le genre de $C$ relativement à $k$ et $\ell$ est une fonction affine qui ne dépend que du degré effectif du corps de fonction $K$. On renvoie les lecteur dans [35, page 5] pour la forme explicite de cette fonction. On en déduit le résultat suivant.

**Proposition 8.1** *Soit $C$ une courbe régulière qui est projective sur un corps $k$. Si $E$ est un fibré vectoriel sur $C$, on a*

$$\deg_+(E) = \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E)} \max(\mu_i(E), 0) \leqslant \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E)} \max(\lambda_i(E), 0) + \mathrm{rg}(E)\ell(g(C/k)). \tag{49}$$

*Démonstration* Quitte à remplacer $E$ par le dernier sous-fibré vectoriel de pente minimale positive dans le drapeau de Harder–Narasimhan de $E$, on peut supposer que $\mu_{\min}(E) \geqslant 0$. Dans ce cas-là on a

$$\begin{aligned}\deg_+(E) = \deg(E) &= \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E)} \lambda_i(E) + \mathrm{rg}(E)\ell(g(C/k)) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\mathrm{rg}(E)} \max(\lambda_i(E), 0) + \mathrm{rg}(E)\ell(g(C/k)),\end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient de (48). Le résultat est donc démontré. □

Soient $E$ et $F$ deux fibrés vectoriels sur $C$. Si $x$ et $y$ sont respectivement deux $k$-points de $\mathbb{P}(E^\vee)$ et $\mathbb{P}(F^\vee)$ à valeurs dans $K$, alors $x \otimes y$ (vu comme un sous-espace vectoriel de rang un de $E_K \otimes F_K$) est un $k$-point de $\mathbb{P}(E^\vee \otimes F^\vee)$ à valeurs dans $K$ qui vérifie la relation suivante

$$h_{E^\vee \otimes F^\vee}(x \otimes y) = h_{E^\vee}(x) + h_{F^\vee}(y).$$

On obtient donc le résultat suivant:

**Proposition 8.2** *Soit $E_\bullet = \bigoplus_{n \geqslant 0} E_n$ un $\mathcal{O}_C$-algèbre graduée. On suppose que chaque $E_n$ est un fibré vectoriel sur $C$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, la relation suivante est vérifiée:*

$$\mathcal{F}^a(E_{n,K})\mathcal{F}^b(E_{m,K}) \subset \mathcal{F}^{a+b}(E_{n+m,K}), \tag{50}$$

*où $\mathcal{F}$ désigne la $\mathbb{R}$-filtration par minima définie dans (46).*

*Remarque 8.3* On fixe un faisceau inversible ample $M$ sur $C$. Soit $a$ le degré de $M$. Si $E$ est un fibré vectoriel non-nul sur $C$, les inégalités

$$\lambda_1(E) \leqslant \mu_{\max}(E) \leqslant \lambda_1(E) + g - 1 + a$$

sont toujours vérifiées, où $g = g(C/k)$ est le genre de $C$ relativement à $k$. La première inégalité est triviale. Pour la deuxième inégalité, on peut utiliser l'invariance de la quantité $\mu_{\max}(E) - \lambda_1(E)$ par le produit tensoriel d'un $\mathcal{O}_C$-module inversible. Quitte à remplacer $E$ par le produit tensoriel de $E$ avec une puissance tensorielle (éventuellement d'exposant négatif) du faisceau inversible $M$, on peut supposer $g - 1 < \mu_{\max}(E) \leqslant g - 1 + a$. D'après le théorème de Riemann–Roch, on obtient que $\lambda_1(E) \geqslant 0$ (cf. [11, lemme 2.1]). On obtient donc $\mu_{\max}(E) - \lambda_1(E) \leqslant g - 1 + a$. Cette inégalité montre que, si $E_\bullet$ est une $\mathcal{O}_C$-algèbre graduée en fibrés vectoriels sur $C$ telle que $E_n$ soit non-nul pour $n$ assez grand, alors on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mu_{\max}(E_n)}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\lambda_1(E_n)}{n}\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}.$$

En outre, la relation (50) montre que la suite $\lambda_1(E_n)$ est sur-additive. On obtient donc

$$\forall\, p\geqslant 1,\quad \lambda_1(E_p)\leqslant p\lim_{n\to+\infty}\frac{\mu_{\max}(E_n)}{n}. \tag{51}$$

La proposition précédente nous permet de retrouver les résultats présentés dans § 5, quitte à remplacer la filtration de Harder–Narasimhan par la filtration par minima. Soit $X$ un schéma projectif et intègre sur Spec $k$, qui admet un tour de fibrations sur courbes $\Theta$. On suppose que la dimension de Krull de $X$ est $d+1$. Soient $L$ un faisceau inversible gros sur $X$ et $V_\bullet$ un système linéaire gradué de $L$, qui contient un diviseur ample. Si $d=0$, on définit

$$\widetilde{\varepsilon}^{\Theta}(V_\bullet):=\max(g(C_0/k)-1,1).$$

Si $d\geqslant 1$, on définit $\widetilde{\varepsilon}^{\Theta}(V_\bullet)$ de façon récursive comme la suite. On suppose que $\Theta$ est de la forme $(p_0:X\to C_0,\Theta')$, où $\Theta'$ est un tour de fibrations sur courbes de la fibre générique de $p_0$. Soient en outre $g_0$ le genre de la courbe $C_0$ relativement à $k$, $\mu_0:=\mu_{\max}^{p_0}(V_\bullet)$ (cf. la définition 3.9), et $W_\bullet$ la fibre générique de $p_{0*}(V_\bullet)$. On définit

$$\widetilde{\varepsilon}^{\Theta}(V_\bullet)=\mu_0\widetilde{\varepsilon}^{\Theta'}(W_\bullet)+\Big(\frac{\mathrm{vol}(W_\bullet)}{d!}+\widetilde{\varepsilon}^{\Theta'}(W_\bullet)\Big)(\max(g_0-1,1)+\ell(g_0)).$$

On voit aussitôt que $\widetilde{\varepsilon}^{\Theta}(V_\bullet)\leqslant\widetilde{\varepsilon}^{\Theta}(V'_\bullet)$ si $V_\bullet$ est contenu dans un autre système linéaire gradué $V'_\bullet$ d'un autre faisceau inversible gros $L'$. En outre, par récurrence sur $d$ on peut vérifier que $\widetilde{\varepsilon}^{\Theta}(V_\bullet^{(p)})\leqslant p^d\widetilde{\varepsilon}^{\Theta}(V_\bullet)$ pour tout entier $p\geqslant 1$.

**Théorème 8.4** *Soit $X$ un schéma projectif et intègre de dimension $d+1$ sur* Spec $k$*, qui admet un tour de fibrations sur courbes $\Theta=(p_i:X_i\to C_i)_{i=0}^d$, et $L$ un faisceau inversible sur $X$. Si $V_\bullet=\bigoplus_{n\geqslant 0}V_n$ est un système linéaire gradué de $L$, qui contient un diviseur ample, alors on a*

$$\mathrm{rg}_k(V_1)\leqslant\frac{\mathrm{vol}(V_\bullet)}{(d+1)!}+\widetilde{\varepsilon}^{\Theta}(V_\bullet). \tag{52}$$

*Démonstration* La démonstration est presque identique à celle du théorème 5.1. Il suffit de remplacer les filtrations de Harder–Narasimhan par les filtrations par minima. La démonstration du cas où $d=0$ utilise notamment les estimés démontrées dans le théorème 2.4 qui sont valables pour tout corps $k$, et l'argument reste donc inchangé.

Dans la suite, on suppose $d\geqslant 1$. On suppose en outre que $\Theta$ est de la forme $(p_0:X\to C_0,\Theta')$, où $\Theta'$ est un tour de fibrations sur courbes de la fibre générique de $p_0$. Soient $g_0$ le genre de la courbe $C_0$ relativement à $k$, $\mu_0:=\mu_{\max}^{p_0}(V_\bullet)$, et $W_\bullet$ la fibre générique de $E_\bullet=p_{0*}(V_\bullet)$. On munit $W_\bullet$ de la filtration par minima $\mathcal{F}$ et on note $W_\bullet^t=\bigoplus_{n\geqslant 0}\mathcal{F}^{nt}W_n$. On a encore

$$\mathrm{vol}(V_\bullet)=\mathrm{vol}(E_\bullet)=(d+1)\int_0^{\mu_0}\mathrm{vol}(W_\bullet^t)\,\mathrm{d}t,$$

où la première égalité provient du théorème 3.8 et on a utilisé la relation $\lambda_1(E_1)\leqslant\mu_0$ (cf. la remarque 8.3) dans la deuxième égalité. En outre, les relations (49) et (47) montre que

$$\deg_+(E_1)\leqslant\int_0^{\mu_0}\mathrm{rg}(W_1^t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{rg}(W_1)\ell(g_0).$$

On applique l'hypothèse de récurrence à $W_\bullet^t$ et obtient

$$\begin{aligned}\deg_+(E_1) &\leqslant \int_0^{\mu_0}\Big(\frac{\mathrm{vol}(W_\bullet^t)}{d!}+\widetilde{\varepsilon}^{\Theta'}(W_\bullet^t)\Big)\,\mathrm{d}t+\mathrm{rg}(W_1)\ell(g_0)\\ &\leqslant \frac{\mathrm{vol}(V_\bullet)}{(d+1)!}+\mu_0\widetilde{\varepsilon}^{\Theta'}(W_\bullet^t)+\mathrm{rg}(W_1)\ell(g_0).\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(V_1)\leqslant h^0(E_1)&\leqslant \deg_+(E_1)+\mathrm{rg}(W_1)\max(g_0-1,1)\\ &\leqslant \frac{\mathrm{vol}(V_\bullet)}{(d+1)!}+\mu_0\widetilde{\varepsilon}^{\Theta'}(W_\bullet^t)+\mathrm{rg}(W_1)(\ell(g_0)+\max(g_0-1,1)).\end{aligned}$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence à $W_\bullet$ et obtient le résultat souhaité. □

**Remerciements** Je voudrais remercier Éric Gaudron pour des remarques qui m'ont beaucoup aidé à améliorer la rédaction de l'article. Pendant la préparation et la rédaction de l'article, j'ai bénéficié des discussions avec Sebastien Boucksom, je tiens à lui exprimer mes gratitudes. Je suis aussi reconnaissant à Xinyi Yuan et Tong Zhang pour m'avoir communiqué leur article et pour des discussions très intéressantes. Enfin, je voudrais remercier le rapporteur anonyme pour sa lecture soigneuse de l'article et pour ses suggestions précieuses. Ce travail a été soutenu par le fond de recherche NSFC11271021.

## Références

1. Abbes, A., Bouche, T.: Théorème de Hilbert–Samuel "arithmétique". Université de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier **45**(2), 375–401 (1995)
2. Banaszczyk, W.: Inequalities for convex bodies and polar reciprocal lattics in $R^n$. Discrete Comput. Geom. **13**(2), 217–231 (1995)
3. Betke, U., Böröczky Jr, K.: Asymptotic formulae for the lattice point enumerator. Can. J. Math. **51**(2), 225–249 (1999)
4. Blichfeld, H.F.: Notes on geometry of numbers. Announcement to the October meeting of the San Francisco Section. Bull. Am. Math. Soc. **27**(4), 152–153 (1921)
5. Bombieri, E., Vaaler, J.: On Siegel's lemma. Invent. Math. **73**(1), 11–32 (1983)
6. Bost, J.-B., Chen, H.: Concerning the semistability of tensor products in Arakelov geometry. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Neuvième Série **99**(4), 436–488 (2013)
7. Bost, J.-B., Künnemann, K.: Hermitian vector bundles and extension groups on arithmetic schemes. I. Geometry of numbers. Adv. Math. **223**(3), 987–1106 (2010)
8. Boucksom, S., Chen, H.: Okounkov bodies of filtered linear series. Compos. Math. **147**(4), 1205–1229 (2011)
9. Chardin, M.: Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique. Bulletin de la Société Mathématique de France **117**(3), 305–318 (1989)
10. Chen, H.: Positive degree and arithmetic bigness (2008). arXiv:0803.2583
11. Chen, H.: Maximal slope of tensor product of Hermitian vector bundles. J. Algebraic Geom. **18**(3), 575–603 (2009)
12. Chen, H.: Arithmetic Fujita approximation. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série **43**(4), 555–578 (2010)
13. Chen, H.: Convergence des polygones de Harder–Narasimhan. Mémoires de la Société Mathématique de France **120**, 1–120 (2010)
14. Faltings, G.: Calculus on arithmetic surfaces. Ann. Math. Second Ser. **119**(2), 387–424 (1984)
15. Fujita, T.: Approximating Zariski decomposition of big line bundles. Kodai Math. J. **17**(1), 1–3 (1994)
16. Gaudron, É.: Pentes de fibrés vectoriels adéliques sur un corps globale. Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova **119**, 21–95 (2008)
17. Gaudron, É.: Géométrie des nombres adélique et lemmes de Siegel généralisés. Manuscr. Math. **130**(2), 159–182 (2009)
18. Gaudron, É., Rémond, G.: Corps de siegel, à paraître dans Journal für die reine und angewandte Mathematik. Prépublication (2013)
19. Gaudron, É., Rémond, G.: Minima, pentes et algèbre tensorielle. Isr. J. Math. **195**(2), 565–591 (2013)

20. Gieseker, D.: Stable vector bundles and the Frobenius morphism. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série **6**, 95–101 (1973)
21. Gillet, H., Soulé, C.: On the number of lattice points in convex symmetric bodies and their duals. Isr. J. Math. **74**(2–3), 347–357 (1991)
22. Grothendieck, A., Dieudonné, J.: Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I, Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques (11), 167 (1961)
23. Henk, M.: Successive minima and lattice points, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Serie II. Supplemento, (2002). no. 70, part I, pp. 377–384. IV International Conference in Stochastic Geometry, Convex Bodies, Empirical Measures and Applications to Engineering Science, vol. I (Tropea, 2001)
24. Henze, M.: A Blichfeldt-type inequality for centrally symmetric convex bodies. Monatshefte für Mathematik **170**(3–4), 371–379 (2013)
25. Huybrechts, D., Lehn, M.: The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves. Aspects of Mathematics, E31, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig (1997)
26. Kaveh, K., Khovanskii, A.: Algebraic equations and convex bodies. In: Itenberg, I., Jöricke, B., Passare, M. (eds.) Perspectives in Analysis, Geometry, and Topology, Progress in Mathematics, vol. 296, pp. 263–282. Birkhäuser/Springer, New York (2012)
27. Kollár, J., Matsusaka, T.: Riemann–Roch type inequalities. Am. J. Math. **105**(1), 229–252 (1983)
28. Lazarsfeld, R.: Positivity in algebraic geometry. I, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 48. Springer, Berlin (2004). Classical setting: line bundles and linear series
29. Lazarsfeld, R., Mustaţă, M.: Convex bodies associated to linear series. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, Quatrième Série **42**(5), 783–835 (2009)
30. Liu, Q.: Algebraic geometry and arithmetic curves. Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 6, Oxford University Press, Oxford (2002). Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications
31. Moriwaki, A.: Continuity of volumes on arithmetic varieties. J. Algebraic Geom. **18**(3), 407–457 (2009)
32. Narasimhan, M.S., Seshadri, C.S.: Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface. Ann. Math. Second Ser. **82**, 540–567 (1965)
33. Nesterenko, Y., Philippon, P. (eds.): Introduction to Algebraic Independence Theory. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1752. Springer, Berlin (2001)
34. Nesterenko, Y.V.: Estimates for the characteristic function of a prime ideal. Math. USSR-Sbornik **51**(1), 9–32 (1985)
35. Roy, D., Thunder, J.L.: An absolute Siegel's lemma. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **476**, 1–26 (1996)
36. Sombra, M.: Bounds for the Hilbert function of polynomial ideals and for the degrees in the Nullstellensatz. J. Pure Appl. Algebra **117/118**, 565–599 (1997) Algorithms for algebra (Eindhoven, 1996)
37. Soulé, C., Abramovich, D., Burnol, J.-F., Kramer, J.: Lectures on Arakelov Geometry, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 33. Cambridge University Press, Cambridge (1992)
38. Takagi, S.: Fujita's approximation theorem in positive characteristics. J. Math. Kyoto Univ. **47**(1), 179–202 (2007)
39. Thunder, J.L.: An adelic Minkowski-Hlawka theorem and an application to Siegel's lemma. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik **475**, 167–185 (1996)
40. Yuan, X.: On volumes of arithmetic line bundles. Compos. Math. **145**(6), 1447–1464 (2009)
41. Yuan, X., Zhang, T.: Effective bound of linear series on arithmetic surfaces. Duke Math. J. **162**(10), 1723–1770 (2013)
42. Yuan, X., Zhang, T.: Relative Noether inequality on fibered surfaces. Prépublication (2013)
43. Yuan, X., Zhang, T.: Effective bounds of linear series on algebraic varieties and arithmetic varieties. Prépublication (2014)
44. Zhang, S.: Positive line bundles on arithmetic varieties. J. Am. Math. Soc. **8**(1), 187–221 (1995)