Université Pierre et Marie Curie
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2014 - 2015

Introduction à la topologie des variétés algébriques réelles

Exercices, feuille 2

Exercice 1 Soit ε un nombre réel strictement positif, et soit $(A_t)_{t\in[-\varepsilon,\varepsilon]}$ une famille de courbes algébriques réelles dans $\mathbb{R}P^2$ telle que

— la courbe A_0 a un unique point singulier, et cette singularité est un point double non dégénéré ;
— la courbe A_t pour tout $t \neq 0$ est non singulière ;
— la courbe A_t est de type I pour tout $t < 0$.

Montrer que le nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}A_{t_1}$ est supérieur ou égal au nombre de composantes connexes de $\mathbb{R}A_{t_2}$, où $-\varepsilon \leq t_1 < 0 < t_2 \leq \varepsilon$.

Exercice 2 Courbes hyperboliques

Une *courbe hyperbolique* dans $\mathbb{R}P^2$ est une courbe algébrique non singulière A dans $\mathbb{R}P^2$ telle que la partie réelle $\mathbb{R}A$ de A contient un nid de profondeur $\left[\frac{d}{2}\right]$, où d est le degré de A. Soit A une courbe hyperbolique de degré d dans $\mathbb{R}P^2$.

(a) Montrer que $\mathbb{R}A$ n'a pas d'autre ovale que ceux constituant le nid de profondeur $\left[\frac{d}{2}\right]$.

(b) Soit p un point à l'intérieur du l'ovale le plus profond du nid, et soit L une droite réelle qui ne contient pas p. Soit $\pi : \mathbb{C}A \to \mathbb{C}L$ la restriction à $\mathbb{C}A$ de la projection de centre p sur $\mathbb{C}L$. Montrer que $\mathbb{R}A = \pi^{-1}(\mathbb{R}L)$, et en déduire que A est de type I.

(c) Déterminer le schéma complexe de $\mathbb{R}A$.

Exercice 3 Soit d un nombre entier strictement positif, et soit A une courbe non singulière de degré d et de type I dans $\mathbb{R}P^2$.

(a) Montrer que $\mathbb{R}A$ possède au moins $\left[\frac{d}{2}\right]$ ovales.

(b) Supposons que $\mathbb{R}A$ possède exactement $\left[\frac{d}{2}\right]$ ovales. Montrer que A est hyperbolique.

Exercice 4 Type I et perturbations Soit A_0 une courbe algébrique dans $\mathbb{R}P^2$ telle que les seules singularités de A sont des points doubles non dégénérés réels à tangentes réelles (c'est à dire, la courbe A_0 est localement donnée en chaque point double par l'équation $x^2 - y^2 = 0$). On dit que A_0 est *de type I* si, pour toute composante irréductible C de A_0, l'ensemble $\mathbb{C}C \setminus \mathbb{R}C$ n'est pas connexe (ici $\mathbb{R}C$ est ensemble des points réels de C, et $\mathbb{C}C$ est l'ensemble des points complexes de C).

(a) Soit A une courbe algébrique réelle non singulière obtenue par une petite perturbation de A_0. Supposons que A est de type I. Montrer que A_0 est aussi de type I, et toute semi-orientation de A est induite par une semi-orientation de A_0.

Note : si la courbe A_0 est réductible et de type I, alors elle possède plus de deux semi-orientations. En effet, chacune des composantes irréductibles de A_0 est de type I et possède deux semi-orientations. La courbe A_0 possède donc 2^n semi-orientations, où n est le nombre de composantes irréductibles de A_0.

(b) Supposons que A_0 est de type I. Montrer qu'il existe une petite perturbation de A_0 qui produit une courbe non singulière de type I.

(c) **Application**. Soit A une courbe non singulière de degré impair et de type I dans $\mathbb{R}P^2$. Supposons que la partie réelle $\mathbb{R}A$ de A a un ovale positif ; notons O cet ovale. Montrer que O ne peut pas s'attacher à la composante non contractile de $\mathbb{R}A$.

Exercice 5 Classifier les schémas complexes des quintiques non singulières dans $\mathbb{R}P^2$.

Exercice 6 Soit A une courbe non singulière maximale de degré 8 dans $\mathbb{R}P^2$ telle que le schéma réel de A soit de la forme $\langle 1\langle 1\rangle \sqcup 1\langle\alpha\rangle \sqcup 1\langle\beta\rangle\rangle$, où α et β sont des nombres entiers strictement positifs. Montrer que les nombres α et β sont impairs.

Exercice 7 Soit A une quintique non singulière maximale dans $\mathbb{R}P^2$, et soient O_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, les ovales de $\mathbb{R}A$. Pour deux points distincts quelconques p et q de $\mathbb{R}P^2$, notons $[pq]$ le segment ayant p et q pour extrémités et coupant la composante non contractile de $\mathbb{R}A$ en un nombre pair de points (comptés avec multiplicités si la droite (pq) n'est pas transverse à la courbe A). Pour tout nombre entier i entre 1 et 6, choisissons un point p_i à l'intérieur de l'ovale O_i.

(a) Soit $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Montrer que les segments $[p_ip_j]$, $[p_ip_k]$ et $[p_jp_k]$ forment le bord d'un disque dans $\mathbb{R}P^2$. Ce disque s'appelle le *triangle* à sommets p_i, p_j et p_k.

(b) On dit que les points $p_1, \ldots, p_6$ sont *en position convexe* si, pour tout choix d'indices $1 \leq i < j < k \leq 6$, l'intérieur du triangle à sommets p_i, p_j, p_k ne contient aucun des points $p_1, \ldots, p_6$. On dit que les ovales de $\mathbb{R}A$ sont en position convexe, si, pour tout choix de points $q_1, \ldots, q_6$ à l'intérieur de ces ovales (q_i est à l'intérieur de O_i, $i = 1, \ldots, 6$), les points $q_1, \ldots, q_6$ sont en position convexe.

Montrer que les ovales de $\mathbb{R}A$ sont en position convexe.

Exercice 8 Montrer que le schéma réel $\langle J \sqcup 1\langle 14\rangle\rangle$ n'est pas réalisable par une courbe non singulière de degré 7 dans $\mathbb{R}P^2$.

Indication : on pourra commencer par montrer que les ovales vides sont en position convexe (la définition de position convexe est complètement similaire à la définition donnée dans l'exercice précédent).