Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques*, M1
Année 2023 - 2024
Cours MU4MA001

GÉOMÉTRIE AFFINE ET PROJECTIVE

I. Itenberg

1. Géométrie affine

1.1. **Groupes agissant sur un ensemble.** Soit G un groupe, dont on note $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ la loi de composition, e l'élément neutre, et $g \mapsto g^{-1}$ la loi d'inversion. Soit par ailleurs X un ensemble. Une *action* (à gauche) de G sur X est la donnée d'une application $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g.x$ telle que, pour tous éléments g_1 et g_2 de G et pour tout élément x de X, on ait

$$(g_1 g_2).x = g_1.(g_2.x) \text{ et } e.x = x.$$

Pour tout $g \in G$, l'application $\rho(g) : x \mapsto g.x$ est alors une bijection de X sur X (d'inverse $x \mapsto g^{-1}.x$), et $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2)$. Si S_X désigne le groupe des bijections de X sur X, il revient ainsi au même de se donner une action de G sur X ou un morphisme de groupes ρ de G dans S_X. On écrit ρ_g ou simplement g au lieu de $\rho(g)$. Souvent, les éléments de X sont appelés *points*.

Exemples.

- Soit G un groupe. Les translations à gauche dans G donnent lieu à un morphisme injectif $G \to S_G$ qui est une action de G sur lui-même (c'est-à-dire, ici $X = G$).
- Soit K un corps, et soit V un espace vectoriel sur K. Le groupe $G = GL(V)$ des automorphismes linéaires de V agit sur V, sur l'ensemble des droites de V (par $\rho_g(d) = g(d)$ pour tout élément g de G et toute droite d de V), sur l'ensemble des endomorphismes linéaires de V (par $\rho_g(f) = g \circ f$ pour tout élément g de G et tout endomorphisme linéaire $f : V \to V$).

Il est utile de considérer aussi les actions à droite. Une *action à droite* de G sur X est la donnée d'une application $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g.x$ telle que, pour tous éléments g_1 et g_2 de G et pour tout élément x de

X, on ait

$$(g_1 g_2).x = g_2.(g_1.x) \text{ et } e.x = x.$$

Il est bien sûr naturel et commode de noter $(g, x) \mapsto x.g$ une action à droite. Remarquons qu'un groupe agit sur lui-même à droite par translations à droite.

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Un sous-ensemble Y de X est dit *stable*, ou *invariant*, sous G, si, pour tout élément g de G, on a $g(Y) \subset Y$.

Remarque 1. *Une action d'un groupe G sur un ensemble X permet souvent de fabriquer d'autres actions en considérant des groupes reliés à G ou des ensembles reliés à X. Par exemple,*

- *pour tout sous-groupe H de G, il y a une action restreinte de H sur X obtenue par la composition $H \hookrightarrow G \to S_X$;*
- *si un sous-ensemble Y de X est stable sous G, il y a une action induite de G sur Y. (Attention : pour un sous-ensemble quelconque Y de X, l'ensemble des éléments g de G tels que $g(Y) \subset Y$ n'est pas forcement un sous-groupe de G.)*

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Si Y est un sous-ensemble de X, alors le *stabilisateur* de Y dans G est le sous-ensemble de G composé des éléments g tels que $g(Y) = Y$. La vérification du fait qu'il s'agit d'un sous-groupe est un exercice facile. En particulier, le stabilisateur d'un point x de X est le sous-groupe G_x de G défini par $G_x = \{g \in G \mid g.x = x\}$.

Si Y est un sous-ensemble de X, alors le *fixateur* de Y dans G est le sous-groupe de G composé des éléments g de G tels que, pour tout point y de Y, on ait $g(y) = y$. Le fixateur de Y est donc l'intersection des stabilisateurs G_y des points $y \in Y$. Lorsque Y est un point, le stabilisateur de Y coïncide avec le fixateur de Y.

Exemple. Soit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et soit $X = \mathbb{R}^2$. Considérons l'application $\rho : G \to S_{\mathbb{R}^2}$ définie par

$$0 \mapsto \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}, \quad 1 \mapsto f,$$

où $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ est l'application identité de $\mathbb{R}^2$ et $f(x, y) = (x, -y)$ pour tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$. Cette application est un morphisme de groupes, il s'agit donc d'une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$. Le fixateur (et le stabilisateur) de l'axe $y = 0$ est le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tout entier. L'axe $x = 0$ est un sous-ensemble stable de $\mathbb{R}^2$ (sous l'action considérée de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$), mais le fixateur de cet axe est le sous-groupe trivial $\{0\} \subset \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. L'*orbite* d'un point x de X sous le groupe G (ou la *G-orbite* de x), est le sous-ensemble

$\mathcal{O}_G(x) = \{g.x \mid g \in G\}$ de X. Considérons la relation binaire sur X définie de la façon suivante : $x \sim y$ si et seulement si il existe un élément g de G tel que $y = g.x$. C'est une relation d'équivalence. Deux points x et y de X appartiennent à la même classe d'équivalence si et seulement si $\mathcal{O}_G(x) = \mathcal{O}_G(y)$, c'est-à-dire, les classes d'équivalence pour cette relation sont les orbites de l'action de G sur X. La partition en classes pour la relation d'équivalence considérée est appelée la *partition en orbites* de X.

Exemple. Soit G un groupe, et soit H un sous-groupe de G. Les classes **à droite** de G modulo H peuvent être vues comme les orbites d'une action (à gauche) de H sur G. En effet, considérons l'action de H sur G donnée par les translations à gauche : $\rho : H \to S_G$ et $\rho_h(g) = hg$. Alors, pour tout élément g de G, l'orbite de g est la classe Hg. De façon similaire, les classes **à gauche** de G modulo H peuvent être vues comme les orbites de l'action **à droite** de H sur G par les translations à droite. (Attention : pour une action générale, les classes de la partition en orbites n'ont pas toujours le même nombre d'éléments.)

Pour tout élément $y \in \mathcal{O}_G(x)$, on dit que y est un *représentant* de l'orbite $\mathcal{O}_G(x)$. On note $G\backslash X$ l'ensemble des orbites (ou X/G quand il s'agit d'une action à droite).

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Pour tout point x de X, considérons l'application $\mathrm{ev}_x : G \to X$ définie par $g \mapsto g(x)$. Nous l'appellerons l'*application d'évaluation en x*.

Théorème 1. *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Alors, pour tout point x de X, l'application d'évaluation en x induit une bijection entre G/G_x (l'ensemble des classes à gauche modulo G_x) et $\mathcal{O}_G(x)$.*

Démonstration. Soit x un point de X. Par définition de l'orbite, l'image de ev_x est l'orbite $\mathcal{O}_G(x)$. Donc, ev_x est une application surjective de G dans $\mathcal{O}_G(x)$. Pour cette application, deux éléments g et h ont la même image si et seulement si $g^{-1}h \in G_x$. Par conséquent, d'après la définition de l'ensemble G/G_x des classes à gauche modulo G_x, l'application ev_x induit une application bijective entre G/G_x et $\mathcal{O}_G(x)$. $\square$

Corollaire 2. *Si un groupe fini G agit sur un ensemble X, alors, pour tout point x de X, l'orbite de x sous G est finie et son cardinal est égal à l'indice de G_x dans G.* $\square$

Proposition 3. (*Formule des classes*) *Considérons un groupe fini G agissant sur un ensemble fini X. On pose $n = card(G\backslash X)$ et on désigne par x_1, ..., x_n un système de représentants des orbites. Alors, on a*

$$\frac{card(X)}{|G|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|G_{x_i}|},$$

où $|G|$ et $|G_{x_i}|$ sont les ordres de G et G_{x_i}, respectivement.

Démonstration. Considérons la partition de l'ensemble X en orbites. Pour tout entier i entre 1 et n, l'orbite contenant x_i est formée de $\frac{|G|}{|G_{x_i}|}$ points. Donc,

$$card(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|G|}{|G_{x_i}|},$$

ce qui démontre la proposition. □

On dit que G agit *transitivement* sur X s'il n'y a qu'une seule orbite. Ceci signifie que, pour deux points quelconques x et y de X, il existe un élément g de G tel que $y = g.x$, ou encore, que, pour tout point x de X, l'application d'évaluation $\mathrm{ev}_x : G \to X$ est surjective. Par exemple, en partant d'une action quelconque d'un groupe G sur un ensemble X, et d'un point quelconque x de X, on obtient une action de G sur l'orbite $\mathcal{O}_G(x)$ de x, et cette action est transitive.

On dit que G agit *librement* sur X si, pour tout élément x de X, on a $G_x = \{e\}$; chaque orbite est alors en bijection avec G. Lorsque G agit librement et transitivement sur X, on dit que X est un *espace homogène principal*, ou encore, un *torseur*, sous G. En choisissant un élément x de X, on peut dans ce cas identifier $X = G.x$ et G, mais il n'y a en général aucun choix naturel pour x, et une telle identification doit être maniée avec précaution.

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X, et soit x un point de X. Si $\mathcal{O}_G(x) = \{x\}$, on dit que l'orbite de x est *ponctuelle*, ou *réduite à un point*, ou *triviale*. Dans ce cas, on dit que x est un *point fixe* sous l'action de G.

1.2. **Espaces affines.** Dans tout ce cours, on désigne par K un corps, que (sauf mention du contraire) on suppose commutatif. On note $K^\times = K \setminus \{0\}$ le groupe multiplicatif de K. En général, K sera $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou un corps fini, par exemple $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p est un nombre premier.

Si E_1 et E_2 sont deux espaces vectoriels sur K, on note $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ le K-espace vectoriel formé par les applications K-linéaires de E_1 dans E_2. Par exemple, le dual $\mathcal{L}(E, K) = E^*$ de E est l'espace vectoriel des formes K-linéaires sur E. Pour $E = E_1 = E_2$, l'espace vectoriel

$End(E) = \mathcal{L}(E, E)$ est un anneau. L'ensemble $GL(E) \subset End(E)$ des automorphismes de E est le groupe des unités de l'anneau $End(E)$. Pour tout entiers strictement positifs n et m, on identifie $\mathcal{L}(K^n, K^m)$ à l'espace $Mat_{m,n}(K)$ des matrices $A = (a_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ à m lignes et n colonnes, à coefficients dans K. Si n est un entier strictement positif, le groupe $GL(K^n)$ est noté $GL_n(K)$ et s'appelle le *groupe linéaire d'ordre* n.

Soient K un corps et E un espace vectoriel sur K. On appelle *espace affine* sous E la donnée d'un ensemble non vide $\mathcal{E}$, muni d'une application $E \times \mathcal{E} \to \mathcal{E} : (\overrightarrow{u}, P) \mapsto \ P + \overrightarrow{u}$, vérifiant les trois conditions suivantes :

- pour tous $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$ et pour tout $P \in \mathcal{E}$, on a
$$P + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = (P + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} \ ;$$
- pour tout $P \in \mathcal{E}$, on a $P + \overrightarrow{0} = P$, où $\overrightarrow{0}$ est l'élément neutre de E ;
- pour tous $P, Q \in \mathcal{E}$, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $Q = P + \overrightarrow{u}$.

C'est donc la donnée d'une action sur $\mathcal{E}$ du groupe additif $G = E$ sous-jacent à l'espace vectoriel E, la troisième condition signifiant que cette action est transitive et libre. Comme E est commutatif, il n'y a ici pas besoin de préciser que l'action est à gauche (et cela justifie la notation $P + \overrightarrow{u}$ au lieu de $\overrightarrow{u} + P$).

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sous l'espace vectoriel E. Pour tout couple ordonné (P, Q) de points de $\mathcal{E}$, on note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ}$ l'unique vecteur de E associé à (P, Q) par la troisième condition : $Q = P + \overrightarrow{PQ}$. Alors, on a, pour tous $P, Q, R, P', Q' \in \mathcal{E}$, les identités suivantes entre vecteurs de E :
$$\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{0}, \ \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ},$$
$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} \text{ (relation de Chasles)},$$
ainsi que la *loi du parallélogramme* :
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \Leftrightarrow \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}.$$

1.3. **Espaces projectifs.** Soit E un espace vectoriel sur K. Le groupe multiplicatif $K^\times$ agit librement sur l'ensemble $X = E \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. On note
$$\mathbb{P}(E) = (E \setminus \{\overrightarrow{0}\})/K^\times$$
l'ensemble des orbites de X sous cette action de $K^\times$, et on l'appelle l'*espace projectif* associé à E. L'orbite $K^\times.\overrightarrow{x}$ d'un point $\overrightarrow{x}$ de X est

l'ensemble des vecteurs non nuls de E colinéaires à $\overrightarrow{x}$. Par conséquent, $\mathbb{P}(E)$ s'identifie à l'ensemble des droites de E.

Soit n un entier positif ou nul. Lorsque $E = K^{n+1}$, on utilise la notation $\mathbb{P}_n(K)$ pour $\mathbb{P}(K^{n+1})$.

Si K est un corps fini, de cardinal q, et si $E = K^{n+1}$, on a $card(X) = q^{n+1} - 1$. Comme chaque orbite a $q - 1$ éléments, on en déduit :

$$card(\mathbb{P}_n(K)) = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = q^n + ... + q + 1.$$

Par exemple, $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_2)$ a 7 éléments.

1.4. **Sous-espaces affines.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, d'espace vectoriel E. On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ est un *sous-espace affine* de $\mathcal{E}$ s'il existe un point P de $\mathcal{F}$ et un sous-espace vectoriel F de E tel que

$$\mathcal{F} = \{P + \overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{u} \in F\}.$$

Pour tout point $Q \in \mathcal{F}$, on a alors $\mathcal{F} = Q + F$, et F est l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{QR}$ tels que $Q, R \in \mathcal{F}$. En particulier, F, qu'on appelle la *direction* de $\mathcal{F}$, est entièrement déterminé par $\mathcal{F}$. L'application

$$\begin{aligned} F \times \mathcal{F} &\to \mathcal{F} \\ (\overrightarrow{u}, P) &\mapsto P + \overrightarrow{u} \end{aligned}$$

fait alors de $\mathcal{F}$ un espace affine sous l'espace vectoriel F. On appelle *(co-)dimension* de $\mathcal{F}$ la (co-)dimension de sa direction F. Un point (respectivement, droite, plan) de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de dimension 0 (respectivement, 1, 2). Un hyperplan de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de codimension 1.

Exemple. Soit E un espace vectoriel. On peut le voir comme un espace affine sous lui-même, en définissant, pour tout élément $\overrightarrow{p}$ de $\mathcal{E} = E$ et tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E, l'élément $\overrightarrow{p} + \overrightarrow{u}$ de $\mathcal{E} = E$ comme cette somme, calculée dans E. Soit alors $f \in \mathcal{L}(E, E')$ une application linéaire de E vers un espace vectoriel E', et soit

$$F = \{\overrightarrow{u} \in E \mid f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}\}$$

le noyau de f. Pour tout $\overrightarrow{b} \in E'$, l'ensemble $\mathcal{F}_{\overrightarrow{b}}$ des solutions $\overrightarrow{v}$ de l'équation $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{b}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, de direction F.

Si $E = K^n$, tout sous-espace affine $\mathcal{F}$ de K^n, de dimension m et de direction F, est ainsi défini par un *système d'équations affines* de la forme $A\overrightarrow{x} = A\overrightarrow{p}$, où $A \in Mat_{n-m,n}(K) \simeq \mathcal{L}(K^n, K^{n-m})$ est une matrice de rang $n - m$ à coefficients dans K, de noyau F, et $\overrightarrow{p}$ est un

point de $\mathcal{F}$. En particulier, $\mathcal{F}$ est l'intersection de $n-m$ hyperplans affines de K^n.

Une façon différente de décrire $\mathcal{F}$ consiste à en donner une *paramétrisation*: on choisit une base $\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m}\}$ de $F \subset K^n$, et un point $\overrightarrow{p}$ de $\mathcal{F} \subset K^n$. Alors,

$$\mathcal{F} = \{\overrightarrow{p} + t_1\overrightarrow{a_1} + \ldots + t_m\overrightarrow{a_m} \mid (t_1, \ldots, t_m) \in K^m\}.$$

Cette dernière approche s'étend en un sens à tout espace affine $\mathcal{E}$. Choisissons-en, de façon non canonique, un point O, qu'on appellera origine de $\mathcal{E}$. Alors, l'application

$$\begin{aligned} \theta_O : \mathcal{E} &\to E \\ P &\mapsto \overrightarrow{OP} \end{aligned}$$

est une bijection, d'inverse $\overrightarrow{u} \mapsto O + \overrightarrow{u}$, et permet de munir $\mathcal{E}$ d'une structure non canonique d'espace vectoriel $\mathcal{E}_O$, appelée *vectorialisé* de $\mathcal{E}$ en O, par les formules suivantes :

- $P + Q = R$, où $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$,
- $\lambda.P = T$, où $\overrightarrow{OT} = \lambda\overrightarrow{OP}$.

Son élément neutre est $\overrightarrow{0_{\mathcal{E}_O}} = O$. Pour E de dimension n, choisissons une base $\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\}$ de E. L'application

$$(t_1, ..., t_n) \in K^n \mapsto P = O + t_1\overrightarrow{a_1} + \ldots + t_n\overrightarrow{a_n} \in \mathcal{E}$$

est alors un isomorphisme de K^n sur $\mathcal{E}_O$. On dit que $(t_1, \ldots, t_n)$ sont les *coordonnées cartésiennes* du point P de $\mathcal{E}$ relativement à l'origine O et à la base $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ choisis.

1.5. **Coordonnées barycentriques.** Dans cette partie, on suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie n.

Proposition 4. *Soient $\mathcal{F} = P + F$ et $\mathcal{G} = Q + G$ deux sous-espaces affines (de directions F et G, respectivement) d'un espace affine $\mathcal{E}$ de direction E.*

(i) *L'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est ou bien vide, ou bien un sous-espace affine, de direction $F \cap G$. Dans ce deuxième cas,*

$$dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = dim\mathcal{F} + dim\mathcal{G} - dim(F + G).$$

(ii) *L'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide si et seulement si $\overrightarrow{PQ} \in F + G$. En particulier, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est non vide si $E = F + G$, et $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est réduite à un point si $E = F \oplus G$.*

Démonstration.
(i) Si R est un point de $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, alors $\mathcal{F} = R + F$ et $\mathcal{G} = R + G$, donc $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = R + (F \cap G)$. Par ailleurs, pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E, on a

$$dim(F + G) + dim(F \cap G) = dimF + dimG.$$

ii) Un tel point R existe si et seulement si il existe un vecteur $\overrightarrow{u} \in F$ et un vecteur $\overrightarrow{v} \in G$ tels que $R = P + \overrightarrow{u} = Q + \overrightarrow{v}$. La dernière condition est à son tour équivalente à $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \in F + G$. Si F et G sont en somme directe dans E, leur intersection est de dimension nulle, et $dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}) = 0$. $\square$

On dit que deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont *parallèles* si leurs directions coïncident : $F = G$. On dit que $\mathcal{G}$ est *faiblement parallèle* à $\mathcal{F}$ si $G \subset F$. On déduit de la proposition précédente que :

- si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles, alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont soit disjoints, soit confondus;
- si $\mathcal{G}$ est faiblement parallèle à $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{G} \cap \mathcal{F} = \emptyset$ ou $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

L'intersection $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ d'un nombre quelconque de sous-espace affines $\mathcal{F}_i$, $i \in I$, de $\mathcal{E}$ est vide ou un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, de direction $\bigcap_{i \in I} F_i$. Étant donnée une partie non vide $S \subset \mathcal{E}$, on peut donc parler du plus petit sous-espace affine $< S >$ de $\mathcal{E}$ contenant S. On appelle $< S >$ *le sous-espace affine de* $\mathcal{E}$ *engendré par* S (parfois, on parle de l'*enveloppe affine* de S).

Supposons que $S = \{P_j, j \in J = \{0, \ldots, k\}\}$. Alors, la direction de $< S >$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\overrightarrow{P_j P_{j'}}, j, j' \in J$. Les éléments de $< S >$ s'appellent les *combinaisons affines* des points $P_j, j \in J$. On dit que les points de S sont *affinement indépendants* si pour un choix (ou de façon équivalente, pour tout choix) d'indice $j \in J$, les vecteurs $\{\overrightarrow{P_j P_{j'}}, j' \in J, j' \neq j\}$ sont linéairement indépendants. Dans ce cas, le sous-espace affine $\mathcal{F} =< S >$ est de dimension $k = card(J) - 1$, et tout point P de $< S >$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$P = P_0 + \lambda_1 \overrightarrow{P_0 P_1} + \ldots + \lambda_k \overrightarrow{P_0 P_k},\ \lambda_j \in K,$$

de sorte qu'en posant $\lambda_0 = 1 - (\lambda_1 + ... + \lambda_k)$, on a pour tout point O de $\mathcal{E}$:

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{j=0,\ldots,k} \lambda_j \overrightarrow{OP_j}, \quad \text{où } \lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1.$$

Les coefficients λ_0, ..., λ_k sont indépendants du choix de O : pour tout $O' \in \mathcal{E}$, on a

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = (\Sigma_{j=0,\ldots,k}\lambda_j)\overrightarrow{O'O} + \Sigma_{j=0,\ldots,k}\lambda_j\overrightarrow{OP_j} = \Sigma_{j=0,\ldots,k}\lambda_k\overrightarrow{O'P_j}.$$

Les coefficients λ_0, ..., λ_k s'appellent *coordonnées barycentriques* du point $P \in < S >$ relativement aux points affinement indépendants $P_0, \ldots, P_k$. On s'autorise à écrire:

$$P = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k, \ (\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1).$$

Inversement, soient $P_0, \ldots, P_k$ des points de $\mathcal{E}$, que l'on ne suppose plus nécessairement affinement indépendants, et soient $p_0, \ldots, p_k$ des éléments de K de somme $p = p_0 + \ldots + p_k$ *non nulle*. Il existe alors un unique point P de $\mathcal{E}$ tel que

$$\Sigma_{j=0}^k p_j \overrightarrow{PP_j} = \overrightarrow{0}.$$

En effet, soit $P' \in \mathcal{E}$ un point. On pose

$$P = P' + \frac{1}{p_0 + \ldots + p_k}\Sigma_{j=0}^k p_j \overrightarrow{P'P_j} \ ,$$

et on a

$$\Sigma_{j=0}^k p_j \overrightarrow{PP_j} = \Sigma_{j=0}^k p_j (\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'P_j})) = \overrightarrow{0}.$$

De plus, si $P'' \in \mathcal{E}$ est un point tel que

$$\Sigma_{j=0}^k p_j \overrightarrow{P''P_j} = \overrightarrow{0},$$

alors

$$(p_0 + \ldots + p_k)\overrightarrow{PP''} = \Sigma_{j=0}^k p_j \overrightarrow{PP_j} - \Sigma_{j=0}^k p_j \overrightarrow{P''P_j} = \overrightarrow{0}.$$

On appelle P le *barycentre* des points pondérés $(P_j, p_j), j \in J = \{0, \ldots, k\}$. On parle d'*isobarycentre* si tous les poids p_j sont égaux (ce qui impose $card(J) = k + 1$ premier à la caractéristique de K). Pour tout $O \in \mathcal{E}$, le barycentre P vérifie

$$p\overrightarrow{OP} = \Sigma_j p_j \overrightarrow{OP_j},$$

de sorte que si $P_0, ..., P_k$ sont affinement indépendants, les coordonnées barycentriques de P relativement aux P_j sont les quotients $\lambda_j = p_j/p$.

Proposition 5. *Soit $(P_j, p_j), j \in J$, un ensemble fini de points pondérés tel que $\Sigma_{j\in J} p_j \neq 0$, et soit $J' \subset J$ une partie de J telle que $\Sigma_{j\in J'} p_j = p'$ soit non nul. Le barycentre P des $(P_j, p_j), j \in J$, ne change pas quand on remplace le sous-ensemble $(P_j, p_j), j \in J'$, par son barycentre P', affecté du poids p'.*

Démonstration. On a

$$p'\overrightarrow{PP'} + \Sigma_{j\notin J'} p_j \overrightarrow{PP_j} = \Sigma_{j\in J} p_j \overrightarrow{PP_j} = \overrightarrow{0}.$$

Donc P est le barycentre du système de points pondérés (P', p'), (P_j, p_j), $j \notin J'$. □

Supposons que la caractéristique de K est différente de 2 et 3. L'isobarycentre de deux points P_0 et P_1, s'appelle le *milieu* du segment $[P_0P_1]$. Un *triangle* de $\mathcal{E}$ est la donnée de trois points P_0, P_1, P_2 de $\mathcal{E}$ affinement indépendants. Ses médianes sont les droites joignant un sommet P_j au milieu M_j du côté opposé. On déduit de la proposition précédente que les médianes concourent en un point M, isobarycentre des 3 sommets, et que $\overrightarrow{P_jM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{P_jM_j}$ pour tout $j = 0, 1, 2$.

Une *base* ou un *repère affine* de $\mathcal{E}$ est une famille $S = \{P_j, j \in J\}$ de points de $\mathcal{E}$ affinement indépendants, tels que $< S >= \mathcal{E}$. On a alors nécessairement $card(J) = n + 1$, où $n = dimE$. Soit $\{P_0, \ldots, P_n\}$ un repère affine de $\mathcal{E}$, et soit P un point de $\mathcal{E}$ de coordonnées barycentriques $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ relativement à ce repère :

$$P = \Sigma_{j=0,\ldots,n} \lambda_j P_j, \quad \lambda_0 + \ldots + \lambda_n = 1.$$

Autrement dit, P est le barycentre du système de points pondérés $\{(P_0, \lambda_0), \ldots, (P_n, \lambda_n)\}$. Pour tout entier j entre 0 et n, on a $\overrightarrow{P_jP} = \Sigma_{j'=0,\ldots,n, j'\neq j} \lambda_{j'} \overrightarrow{P_jP_{j'}}$, de sorte que les coordonnées cartésiennes de P relativement à l'origine P_j de $\mathcal{E}$ et à la base $\{\overrightarrow{P_jP_{j'}}, j' \neq j\}$ de E sont données par les $\lambda_{j'}, j' \neq j$.

Proposition 6. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Alors, pour toute partie non vide $S \subset \mathcal{E}$, le sous-espace affine $< S >$ coïncide avec l'ensemble des barycentres de systèmes finis de points pondérés de S (pour chaque système, les poids sont tels que leur somme soit non nulle).*

Démonstration. Notons $\widetilde{S}$ l'ensemble des barycentres de systèmes finis de points pondérés de S.

Supposons, d'abord, que S est fini, $S = \{P_0, \ldots, P_k\}$. Pour tous scalaires p_0, …, p_k dans K tels que $p_0 + \ldots + p_k = 1$, on a

$$\overrightarrow{P_0P} = p_1\overrightarrow{P_0P_1} + \ldots + p_k\overrightarrow{P_0P_k},$$

où P est le barycentre du système de points pondérés

$$\{(P_0, p_0), \ldots, (P_k, p_k)\}.$$

Donc, $\widetilde{S} \subset < S >$. Inversement, si $P' \in < S >$, on a

$$\overrightarrow{P_0P'} = p'_1\overrightarrow{P_0P_1} + \ldots + p'_k\overrightarrow{P_0P_k}$$

pour certains scalaires $p'_1, \ldots, p'_k$ dans K. On pose $p'_0 = 1 - p'_1 - \ldots - p'_k$. Le point P' est le barycentre du système de points pondérés

$$\{(P_0, p'_0), \ldots, (P_k, p'_k)\},$$

ce qui montre l'inclusion $< S > \subset \widetilde{S}$.

Considérons, maintenant, le cas général. D'après le cas fini, pour tout système fini de points pondérés de S dont la somme des poids est non nulle, le barycentre de ce système appartient à l'enveloppe affine des points du système. Donc, on a $\widetilde{S} \subset < S >$. Pour montrer l'inclusion $< S > \subset \widetilde{S}$, remarquons que $\widetilde{S}$ est un espace affine. En effet, soit A un point de $\widetilde{S}$.

- Si $x \in E$ est un vecteur tel que $A + x \in \widetilde{S}$, alors, en utilisant le résultat dans le cas fini (plus précisément, le cas de deux points), on obtient que, pour tout $\lambda \in K$, le point $A + \lambda x$ est le barycentre d'un système de points pondérés formé par A et $A + x$; la Proposition 5 implique que $A + \lambda x \in \widetilde{S}$.
- Si $x, y \in E$ sont des vecteurs tels que $A + x \in \widetilde{S}$ et $A + y \in \widetilde{S}$, alors, en utilisant le résultat dans le cas fini (plus précisément, le cas de trois points), on obtient que le point $A + x + y$ est le barycentre d'un système de points pondérés formé par A, $A + x$ et $A + y$; la Proposition 5 implique que $A + x + y \in \widetilde{S}$.

Ceci montre que $\widetilde{S}$ est un sous-espace affine. Puisque, de plus, $\widetilde{S}$ contient S, on obtient l'inclusion $< S > \subset \widetilde{S}$. □

Exemple. Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$, et soit (AB) la droite affine qu'ils engendrent. Pour tout point C de (AB), il existe un unique scalaire λ tel que C soit le barycentre du système des points pondérés (A, λ), $(B, 1 - \lambda)$. Si $C \neq A$ (c'est-à-dire, si $\lambda \neq 1$), alors

$$\overrightarrow{CB} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \overrightarrow{CA},$$

et on écrit $\frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{CA}} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$; cette notation n'a pas de sens si A, B, C ne sont pas alignés. (Plus généralement, $\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = \mu$ signifie que $B \neq A$ et $\overrightarrow{A'B'} = \mu \overrightarrow{AB}$.)

1.6. **Applications affines.** Les applications affines sont une contrepartie en géométrie affine des applications linéaires en algèbre linéaire.

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines, de directions E et F, respectivement. On dit que $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une *application affine* s'il existe une

application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et un point O de $\mathcal{E}$ tels que, pour tout $P \in \mathcal{E}$, on ait

$$\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)} = f(\overrightarrow{OP}),$$

ou de façon équivalente, pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, on ait

$$\varphi(O + \overrightarrow{u}) = \varphi(O) + f(\overrightarrow{u}).$$

Cette dernière condition exprime que φ est une application linéaire du vectorialisé $\mathcal{E}_O$ vers le vectorialisé $\mathcal{F}_{\varphi(O)}$. L'application f est indépendante du choix de l'origine O de $\mathcal{E}$. En effet, pour tout point O' de $\mathcal{E}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(O' + \overrightarrow{u}) &= \varphi(O + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{u}) = \varphi(O) + f(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{u}) \\ &= \varphi(O) + f(\overrightarrow{OO'}) + f(\overrightarrow{u}) = \varphi(O') + f(\overrightarrow{u}).\end{aligned}$$

On note $\overrightarrow{\varphi}$ l'application f, et on dit que $\overrightarrow{\varphi}$ est la *partie linéaire* de φ.

Exemples.

(1) L'application constante entre deux espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ envoyant $\mathcal{E}$ sur un point est affine. La partie linéaire de cette application est l'application nulle.

(2) Soit $\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathbb{R}$. Les applications affines de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ sont les applications de la forme $x \mapsto ax + b$ (la parti linéaire d'une telle application est $x \mapsto ax$).

Proposition 7. *Soient E et F deux espaces vectoriels munis de leurs structures affines naturelles. Alors, une application $\varphi : E \to F$ est affine si et seulement si il existe un vecteur $\overrightarrow{v} \in F$ et une application linéaire $f : E \to F$ tels que $\varphi(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v}$ pour tout $\overrightarrow{u} \in E$.*

Démonstration. Supposons que $\varphi : E \to F$ est affine. Posons $f = \overrightarrow{\varphi}$ et $\overrightarrow{v} = \varphi(\overrightarrow{0})$, où $\overrightarrow{0} \in E$ est le vecteur nul. Alors, pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in E$, on a

$$\varphi(\overrightarrow{u}) = \varphi(\overrightarrow{0}) + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v}.$$

Inversement, si $\varphi : E \to F$ est de la forme $\overrightarrow{u} \mapsto f(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v}$ (où $f : E \to F$ est une application linéaire), alors φ est affine. $\square$

Proposition 8. *Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine.*

(1) *Pour tout sous-espace affine $\mathcal{W} \subset \mathcal{E}$, l'image $\varphi(\mathcal{W})$ de $\mathcal{W}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{F}$. De plus, si $\mathcal{W}$ est de dimension finie, alors $dim\varphi(\mathcal{W}) \leq dim\mathcal{W}$. En particulier, φ préserve*

l'alignement : si A, B et C sont trois points alignés de $\mathcal{E}$, alors les points $\varphi(A)$, $\varphi(B)$ et $\varphi(C)$ sont aussi alignés.

(2) *L'application φ préserve le parallélisme : si $\mathcal{W}_1$ et $\mathcal{W}_2$ sont deux sous-espaces affines parallèles de $\mathcal{E}$, alors $\varphi(\mathcal{W}_1)$ et $\varphi(\mathcal{W}_2)$ sont des sous-espaces affines parallèles de $\mathcal{F}$.*

(3) *L'application φ préserve les barycentres : si $P \in \mathcal{E}$ est le barycentre d'un système $\{(P_j, p_j)_{j\in J}\}$ (où J est un ensemble fini), alors le point $\varphi(P) \in \mathcal{F}$ est le barycentre du système $\{(\varphi(P_j), p_j)_{j\in J}\}$. En particulier, si $\mathcal{R} = \{P_j\}$ est un repère affine de $\mathcal{E}$, et si φ est bijective, alors $\varphi(\mathcal{R}) = \{\varphi((P_j)\}$ est un repère affine de $\mathcal{F}$ et les coordonnées barycentriques de $\varphi(P)$ relativement à $\varphi(\mathcal{R})$ sont égales à celles de P relativement à $\mathcal{R}$.*

Démonstration. (1) et (2) L'image d'un sous-espace affine $\mathcal{W} = P + W$ de $\mathcal{E}$, de direction W, par l'application affine φ est le sous-espace affine $\varphi(\mathcal{W}) = \varphi(P) + \overrightarrow{\varphi}(W)$ de $\mathcal{F}$, de direction $\overrightarrow{\varphi}(W)$.

(3) On a $\Sigma_{j\in J} p_j \overrightarrow{PP_j} = \overrightarrow{0}$. Donc,

$$\Sigma_{j\in J}\, p_j \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(P_j)} = \Sigma_{j\in J}\, p_j\, \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{PP_j}) = \overrightarrow{\varphi}(\Sigma_{j\in J}\, p_i \overrightarrow{PP_j}) = \overrightarrow{0}.$$

Par conséquent, $\varphi(P)$ est le barycentre du système de points pondérés $\{(\varphi(P_j), p_j), j \in J\}$. □

Soient $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ et $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ deux applications affines. Alors,

$$(\psi \circ \varphi)(P) = \psi(\varphi(O)) + \overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OP}))$$

pour tout point P et tout point O de $\mathcal{E}$. Donc, $\psi \circ \varphi$ est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{G}$ de partie linéaire $\overrightarrow{\psi \circ \varphi} = \overrightarrow{\psi} \circ \overrightarrow{\varphi}$. En particulier, *une application affine φ est bijective si et seulement si sa partie linéaire $\overrightarrow{\varphi}$ l'est*. En effet, si φ admet une application réciproque $\psi = \varphi^{-1}$, celle-ci induit une application linéaire entre les vectorialisés $\mathcal{F}_{\varphi(O)}$ et $\mathcal{E}_O$, donc est affine, et sa partie linéaire vérifie $\overrightarrow{\psi} \circ \overrightarrow{\varphi} = id_E$, donc $\overrightarrow{\varphi}$ est inversible. Si $\overrightarrow{\varphi}$ admet une application réciproque $g = \overrightarrow{\varphi}^{-1}$, celle-ci est linéaire et l'application affine ψ, de partie linéaire g, qui envoie $O' = \varphi(O)$ sur O est réciproque de φ. On dit alors que φ est un isomorphisme affine. Quand $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, on parle d'automorphisme (ou *transformation*) affine.

L'ensemble des automorphismes affines de $\mathcal{E}$ forme un groupe, noté $GA(\mathcal{E})$ et appelé *groupe affine* de $\mathcal{E}$. L'application canonique $\pi : \varphi \mapsto \overrightarrow{\varphi}$ est un morphisme de groupes de $GA(\mathcal{E})$ sur $GL(E)$.

Soit $T(\mathcal{E}) = \{\varphi \in GA(\mathcal{E}) \mid \overrightarrow{\varphi} = id_E\}$ le noyau du morphisme $\pi : GA(\mathcal{E}) \to GL(E)$. Un élément φ de $T(\mathcal{E})$ vérifie $\varphi(P) = P + \overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{O\varphi(O)}$ ne dépend que de φ. On dit que $\varphi = t_{\overrightarrow{v}}$ est la *translation de vecteur* $\overrightarrow{v}$. L'application $\overrightarrow{v} \mapsto t_{\overrightarrow{v}}$ est un isomorphisme du groupe additif sous-jacent à l'espace vectoriel E vers $T(\mathcal{E})$.

Outre les translations, plusieurs applications affines de $\mathcal{E}$ dans lui-même jouent un rôle particulier. Notons tout d'abord que l'ensemble

$$Fix(\varphi) = \{P \in \mathcal{E} \mid \varphi(P) = P\}$$

des points fixes d'une telle application φ est soit vide, soit un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $Ker(\overrightarrow{\varphi} - id_E)$.

Proposition 9. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie, et soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. Alors, $Fix(\varphi)$ consiste d'exactement un point si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{\varphi}$.*

Démonstration. Supposons que $Fix(\varphi)$ consiste d'exactement un point. Alors, $Ker(\overrightarrow{\varphi} - id_E) = \{0\}$, où E est la direction de $\mathcal{E}$. Donc, 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{\varphi}$.

Réciproquement, supposons que $Ker(\overrightarrow{\varphi} - id_E) = \{0\}$. Dans ce cas, si φ possède un point fixe, ce point fixe est unique. Puisque $\mathcal{E}$ est de dimension finie, on obtient $Im(\overrightarrow{\varphi} - id_E) = E$. Soit O un point de $\mathcal{E}$. Posons $O' = \varphi(O)$. Puisque l'application $\overrightarrow{\varphi} - id_E$ est surjective, il existe un vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{O'O}$. On a

$$\varphi(O + \overrightarrow{u}) = O' + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{u}) = O' + \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{u} = O + \overrightarrow{u},$$

donc, $O + \overrightarrow{u}$ est un point fixe de φ. $\square$

Exemples d'applications affines. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie.

(i) *Les homothéties*. Ce sont les automorphismes affines φ de $\mathcal{E}$ dont la partie linéaire $\overrightarrow{\varphi} = \mu\ id_E$ est une homothétie vectorielle de rapport $\mu \in K^\times, \mu \neq 1$. Une homothétie φ admet donc un unique point fixe O_φ, et s'écrit $\varphi(P) = O_\varphi + \mu\ \overrightarrow{O_\varphi P}$. Le point O_φ s'appelle le *centre* de l'homothétie φ.

Soit φ une homothétie. Pour tout sous-espace affine $\mathcal{W}$ de $\mathcal{E}$, l'image $\varphi(\mathcal{W})$ est parallèle à $\mathcal{W}$, car la direction W de $\mathcal{W}$ coïncide avec $\mu W = \overrightarrow{\varphi}(W)$. Inversement, soit φ un automorphisme affine tel que $\varphi(\mathcal{H})$ soit parallèle à $\mathcal{H}$ pour tout hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathcal{E}$. Alors, les droites (qui sont des intersections d'hyperplans) vérifient la même propriété, et tous les vecteurs non nuls de E sont propres pour $\overrightarrow{\varphi}$. On en déduit que $\overrightarrow{\varphi}$ est

une homothétie vectorielle $\mu\, id_E$, et φ est une homothétie si $\mu \neq 1$, une translation sinon.

Soient φ_1 et φ_2 deux homothéties de $\mathcal{E}$, de points fixes O_1, O_2 et de rapports μ_1 et μ_2, respectivement. Leur composée $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ est une translation si $\mu_1\mu_2 = 1$, tandis que si $\mu_1\mu_2 \neq 1$, c'est une homothétie de rapport $\mu_1\mu_2$. Dans ce cas, on a $O_\varphi = O_1$ si $O_1 = O_2$ (et alors, φ_1 et φ_2 commutent) ; sinon, O_φ se trouve sur la droite $\mathcal{D} = (O_1O_2)$, car $\mathcal{D}$ est stable sous φ_1 et φ_2, donc sous φ, de sorte que φ induit sur $\mathcal{D}$ une homothétie.

Exercice. Déterminer les coordonnées barycentriques de O_φ dans le repère affine $\{O_1, O_2\}$ de $\mathcal{D}$.

Si la caractéristique de K est différente de 2, une homothétie de rapport -1 s'appelle une *symétrie centrale*, et son point fixe s'appelle le *centre de la symétrie*. Le composé de deux symétries centrales $\varphi' \circ \varphi$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{O_\varphi O_{\varphi'}}$.

(ii) *Les projections affines*. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, de direction F, et soit F' un supplémentaire de F dans $E = F \oplus F'$. Pour tout point P de $\mathcal{E}$, les sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $P + F'$ se rencontrent en un unique point P'. L'application $\pi : P \mapsto P'$ s'appelle la *projection sur $\mathcal{F}$ parallèlement à F'*. C'est un endomorphisme affine de $\mathcal{E}$, dont la partie linéaire est la projection vectorielle $\overrightarrow{\pi}$ de E sur F attachée à la décomposition $E = F \oplus F'$. On a $\pi \circ \pi = \pi$, et $Fix(\pi) = \mathcal{F}$. Inversement, tout endomorphisme affine π vérifiant $\pi \circ \pi = \pi$ est une projection affine, d'image le sous-espace affine $\mathcal{F} = \pi(\mathcal{E})$ (de direction $F = \overrightarrow{\pi}(E)$), parallèlement à $F' = Ker(\overrightarrow{\pi})$. En effet, on a $(\overrightarrow{\pi} - id_E) \circ \overrightarrow{\pi} = 0$, donc

$$F = Im(\overrightarrow{\pi}) = Ker(\overrightarrow{\pi} - id_E),$$

et $E = F \oplus F'$. Pour tout $P \in \mathcal{E}$, le point $P' = \pi(P)$ appartient à $\mathcal{F}$, et il reste à voir que $\overrightarrow{PP'} \in F'$. Mais $\pi(P') = \pi(\pi(P)) = \pi(P) = P'$, donc $\overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{PP'}) = \overrightarrow{\pi(P)\pi(P')} = \overrightarrow{0}$, et $\overrightarrow{PP'} \in Ker\,\overrightarrow{\pi} = F'$.

(iii) *Les symétries affines* (on suppose ici que $car(K) \neq 2$). Reprenons les données $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ et $E = F \oplus F'$, ainsi que les notations P et P' de l'exemple (ii). L'application s qui associe à $P \in \mathcal{E}$ le point $s(P) = P + 2\overrightarrow{PP'}$ s'appelle la *symétrie affine par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à F'*. C'est une involution de $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire, une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ telle que la composée de cette application avec elle-même est l'identité), qui vérifie $Fix(s) = \mathcal{F}$, et dont la partie linéaire est la symétrie vectorielle

$$\overrightarrow{s} : \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'} \in F \oplus F' \mapsto \overrightarrow{s}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u'}.$$

Inversement, toute involution affine s de $\mathcal{E}$ admet au moins un point fixe (par exemple, le milieu M d'un segment $[P, s(P)]$, où P est un point de $\mathcal{E}$), et est une symétrie affine par rapport au sous-espace affine $\mathcal{F} = Fix(s)$, de direction $F = Ker(\overrightarrow{s} - id_E)$, parallèlement au noyau $Ker(s + id_E) = F'$. En effet, on a $E = F \oplus F'$. Pour tout point $P \in \mathcal{E}$ (en notant M le milieu du segment $[P, s(P)]$), on a alors

$$(\overrightarrow{s} + id_E)\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{s(P)M} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{0},$$

donc $\overrightarrow{PM} \in F'$, le point M est le projeté $P' = p(P)$ de P, et $\overrightarrow{Ps(P)} = 2\overrightarrow{PP'}$.

Lemma 10. *Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une transformation d'un espace affine $\mathcal{E}$, et soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur de la direction E de $\mathcal{E}$. Alors, la conjuguée $\varphi \circ t_{\overrightarrow{v}} \circ \varphi^{-1}$ de la translation $t_{\overrightarrow{v}}$ de vecteur $\overrightarrow{v}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{v})$.*

Démonstration. Soit P un point de $\mathcal{E}$. Posons $Q = \varphi^{-1}(P)$. On a

$$\overrightarrow{P(\varphi \circ t_{\overrightarrow{v}} \circ \varphi^{-1}(P))} = \overrightarrow{\varphi(Q)\varphi(Q + \overrightarrow{v})} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{Q(Q + \overrightarrow{v})}) = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{v}).$$

□

Ce lemme implique qu'un automorphisme affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ commute avec une translation $t_{\overrightarrow{v}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ si et seulement si $\overrightarrow{v} \in Ker(\overrightarrow{\varphi} - id_E)$. En particulier, la symétrie affine s commute avec une translation $t_{\overrightarrow{u}}$ si et seulement si $\overrightarrow{u} \in F$. Si $\overrightarrow{u} \in F$ est non nul, la composée $S = t_{\overrightarrow{u}} \circ s = s \circ t_{\overrightarrow{u}}$ s'appelle une *symétrie glissée*. Bien que sa partie linéaire $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{s}$ soit une symétrie vectorielle, S n'a aucun point fixe, et n'est donc pas une symétrie affine. En revanche, si $\overrightarrow{u}' \in F'$, alors $t_{\overrightarrow{u}'} \circ s$ est une involution donc une symétrie.

(iv) *Les affinités.* Toujours avec les données $\mathcal{F}$, $E = F \oplus F'$ et la notation $P' = \pi(P)$, on appelle *affinité de rapport $\mu \in K^\times$, de base $\mathcal{F}$, parallèlement à F'*, l'automorphisme affine φ_μ qui associe à tout point $P \in \mathcal{E}$ le point $\varphi(P) = P' + \mu\overrightarrow{P'P}$. Ainsi, φ_{-1} est la symétrie s, et π correspond au cas limite $\mu = 0$. Si $\mu \neq 1$, on a toujours

$$Fix(\varphi_\mu) = \mathcal{F}, \quad F = Ker(\overrightarrow{\varphi_\mu} - id_E), \quad F' = Ker(\overrightarrow{\varphi_\mu} - \mu\, id_E),$$

de sorte que $\overrightarrow{\varphi_\mu}$ est diagonalisable.

Quand $F = H$ est un hyperplan et $\mu \neq 1$, l'affinité φ_μ s'appelle une *dilatation*. Dans ce cas, $Im(\overrightarrow{\varphi_\mu} - id_E)$ est la droite $F' \not\subset H$.

(v) *Les transvections affines.* Une *transvection vectorielle* de E est un élément f de $GL(E)$ tel que 1 soit la seule valeur propre de f et tel que

$Ker(f - id_E)$ soit un hyperplan H de E. En particulier, f n'est pas diagonalisable, $(f - id_E)^2 = 0$, et $Im(f - id_E)$ est une droite $D \subset H$. Si $\overrightarrow{h} \in H$ désigne un vecteur non nul porté par D, il existe une forme linéaire $\ell = \ell_{\overrightarrow{h}}$ sur E, de noyau H, telle que, pour tout $\overrightarrow{v} \in E$, on ait

$$f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} + \ell(\overrightarrow{v})\,\overrightarrow{h}.$$

Si $\mathcal{H}$ est un hyperplan de $\mathcal{E}$ de direction H, on appelle *transvection affine* de base $\mathcal{H}$ tout automorphisme affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tel que $Fix(\varphi) = \mathcal{H}$ et dont la partie linéaire $\overrightarrow{\varphi}$ soit une transvection vectorielle (pour laquelle on aura nécessairement $Ker(\overrightarrow{\varphi} - id_E) = H$).

Tout automorphisme affine φ de $\mathcal{E}$ tel que $Fix(\varphi)$ soit un hyperplan est une dilatation ou une transvection affine.

1.7. **Trois théorèmes de géométrie plane.** Les applications affines peuvent être utilisées pour démontrer des théorèmes classiques de géométrie plane. On donne ici trois exemples.

Théorème 2. (Thalès). *Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. Soient d_1, d_2 et d_3 trois droites deux à deux parallèles et deux à deux distinctes de $\mathcal{E}$, et soient $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{D}' \subset \mathcal{E}$ deux droites distinctes dont aucune n'est parallèle à d_i, $i = 1, 2, 3$. Notons A_1, A_2 et A_3 les points d'intersection de $\mathcal{D}$ avec d_1, d_2 et d_3, respectivement. Notons B_1, B_2 et B_3 les points d'intersection de $\mathcal{D}'$ avec d_1, d_2 et d_3, respectivement.*

(1) *On a* $\frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{\overrightarrow{A_1A_3}} = \frac{\overrightarrow{B_1B_2}}{\overrightarrow{B_1B_3}}$.
(2) *Réciproquement, si un point M de la droite $\mathcal{D}$ vérifie l'égalité* $\frac{\overrightarrow{A_1M}}{\overrightarrow{A_1A_3}} = \frac{\overrightarrow{B_1B_2}}{\overrightarrow{B_1B_3}}$, *alors $M = A_2$.*

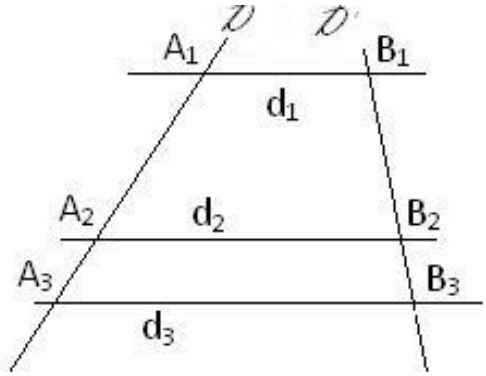

FIGURE 1. Théorème de Thalès

Démonstration. (1) Soit $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{D}'$ la projection sur $\mathcal{D}'$ parallèlement à d_1. Alors, $\pi(A_i) = B_i$, $i = 1, 2, 3$. Si $\overrightarrow{A_1A_2} = \mu\overrightarrow{A_1A_3}$, alors $\overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{A_1A_2}) = \mu\overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{A_1A_3})$, d'où $\overrightarrow{B_1B_2} = \mu\overrightarrow{B_1B_3}$, ce qui démontre la première affirmation du théorème.

(2) On a

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \frac{\overrightarrow{B_1B_2}}{\overrightarrow{B_1B_3}}\overrightarrow{A_1A_3}.$$

Donc, $\overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{A_1A_2}$, c'est-à-dire, le point M coïncide avec le point A_2. $\square$

Corollaire 11. *Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles et distinctes de $\mathcal{E}$, et soient $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{D}' \subset \mathcal{E}$ deux droites sécantes dont aucune n'est parallèle à d_1 ou d_2 et dont le point d'intersection A n'appartient ni à d_1, ni à d_2. Notons*

- *A_1 et A_2 les points d'intersection de $\mathcal{D}$ avec d_1 et d_2, respectivement,*
- *B_1 et B_2 les points d'intersection de $\mathcal{D}'$ avec d_1 et d_2, respectivement.*

Alors, on a

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{AA_2}} = \frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{AB_2}} = \frac{\overrightarrow{A_1B_1}}{\overrightarrow{A_2B_2}}.$$

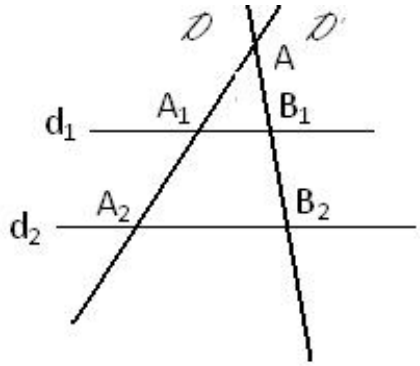

FIGURE 2. Corollaire du théorème de Thalès

Démonstration. On fait passer par le point A une droite parallèle à d_1 et d_2. En appliquant le théorème de Thalès, on obtient

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{AA_2}} = \frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{AB_2}}.$$

Donc, l'homothétie de centre A qui envoie A_1 sur A_2 envoie aussi B_1 sur B_2. Par conséquent,

$$\frac{\overrightarrow{A_1B_1}}{\overrightarrow{A_2B_2}} = \frac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{AB_2}}.$$

□

Théorème 3. (Pappus). *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes du plan affine $\mathcal{E}$, et soient A, B, C (respectivement, A', B', C') trois points deux à deux distincts de $\mathcal{D}$ (respectivement, $\mathcal{D}'$). Si les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont concourantes, supposons que tous les points A, B, C, A', B', C' sont tous distincts de $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$. Supposons aussi que la droite (AB') est parallèle à (BA'), et la droite (BC') est parallèle à (CB'). Alors, les droites (CA') et (AC') sont aussi parallèles.*

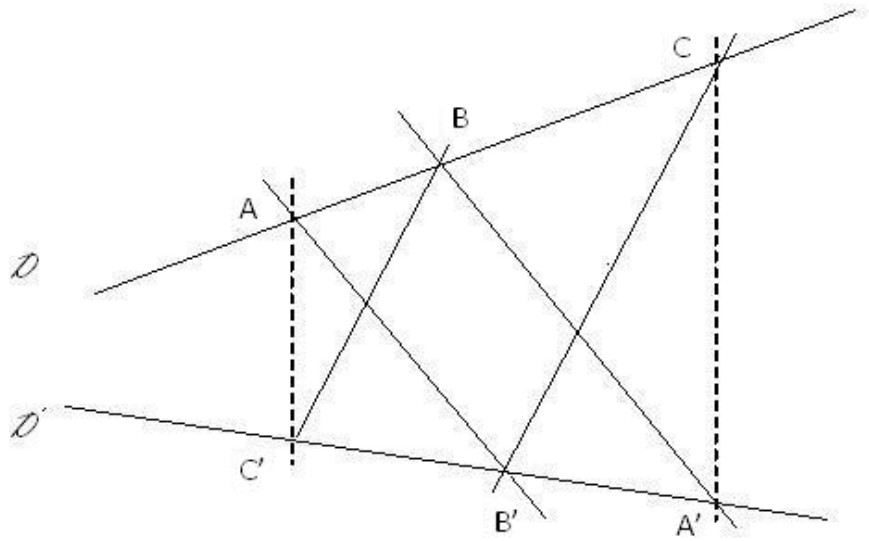

FIGURE 3. Théorème de Pappus

Démonstration. Supposons d'abord que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient concourantes, et soit φ l'homothétie de centre $O = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ qui envoie A sur B.

D'après le théorème de Thalès, l'homothétie φ envoie B' sur A'. De même, l'homothétie ψ de centre O qui envoie B sur C envoie C' sur B'. Comme les homothéties φ et ψ ont même centre, elles commutent. Donc, $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$ envoie A sur C, et C' sur A'. Comme $\varphi \circ \psi$ est une homothétie, $\frac{\overrightarrow{OC'}}{\overrightarrow{OA'}} = \frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OC}}$, et par la deuxième affirmation du théorème de Thalès, on obtient que les droites (AC') et (CA') sont parallèles.

Supposons maintenant que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient parallèles. En remplaçant φ (respectivement, ψ) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ (respectivement, $\overrightarrow{BC}$), on trouve que les translations $t_{\overrightarrow{AC}}$ et $t_{\overrightarrow{C'A'}}$ coïncident. On conclut par la règle du parallélogramme. $\square$

Théorème 4. (Desargues). *Soient (ABC) et $(A'B'C')$ deux triangles du plan affine $\mathcal{E}$. On suppose que*

- *$A \neq A'$, $B \neq B'$ et $C \neq C'$,*
- *les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles,*
- *les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles,*
- *les droites (CA) et $(C'A')$ sont parallèles.*

Alors, les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.

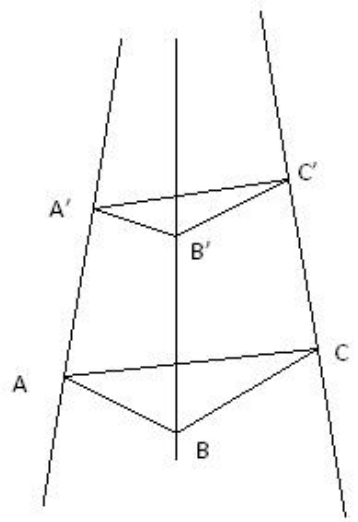

FIGURE 4. Théorème de Desargues

Démonstration. Si les trois droites en question ne sont pas parallèles, deux au moins d'entre elles, soit (AA') et (BB'), se coupent en un point O. D'après le théorème de Thalès, l'homothétie φ de centre O qui envoie A sur A' envoie B sur B'. La droite $\varphi((AC))$ est parallèle à (AC) et passe par A', c'est-à-dire, la droite $\varphi((AC))$ coïncide avec $(A'C')$. De même, $\varphi((BC)) = (B'C')$. Donc, l'homothétie φ envoie le point $C = (AC) \cap (BC)$ sur $(A'C') \cap (B'C') = C'$. Par conséquent, les points O, C et C' sont alignés, et les droites (AA'), (BB') et (CC') concourent en O. $\square$

1.8. **Produits semi-directs.** Soient A et H deux groupes. On dit qu'une action (à gauche) de H sur A est compatible avec la structure de groupe de A si le morphisme correspondant $\rho : H \to S_A$ est à valeurs dans le groupe $Aut(A)$ des automorphismes de A, autrement dit (en notant $(h, a) \mapsto \rho_h(a)$ cette action), si on a $\rho_h(a_1 a_2) = \rho_h(a_1)\rho_h(a_2)$ pour tout $h \in H$ et tous $a_1, a_2 \in A$. Dans ces conditions, on appelle *produit semi-direct* (externe) de A par H relativement à $\rho : H \to Aut(A)$, et on note $A \rtimes_\rho H$, l'ensemble $A \times H$, muni de la loi de composition interne

$$(a, h).(a', h') \to (a \cdot \rho_h(a'), h \cdot h'),$$

qui en fait est un groupe, d'élément neutre (e_A, e_H), et de loi d'inversion $(a, h)^{-1} = (\rho_{h^{-1}}(a^{-1}), h^{-1})$.

Lorsque l'action de H sur A est triviale (c'est-à-dire lorsque $\rho_h = id_A$ pour tout $h \in H$), on retrouve le produit direct usuel, que l'on note simplement $A \times H$, de loi de groupe $(a, h).(a', h') = (aa', hh')$.

Revenons au cas général, et posons $G = A \rtimes_\rho H$. Les applications $i : \ A \to G$, $i(a) = (a, e_H)$ et $s : \ H \to G$, $s(h) = (e_A, h)$ sont des morphismes de groupes injectifs, qui permettent d'identifier A et H à des sous-groupes de G. Avec cette identification, A est distingué dans G, puisque, pour tout $h \in H$ et tous $a, a' \in A$, on a

$$\begin{aligned}(a, h)a'(a, h)^{-1} &= (a, h)(a', e_H)(\rho_{h^{-1}}(a^{-1}), h^{-1}) \\ = (a, h)(a' \cdot \rho_{h^{-1}}(a^{-1}), h^{-1}) &= (a\rho_h(a')\rho_h(\rho_{h^{-1}}(a^{-1})), e_H) \\ &= (a\rho_h(a')a^{-1}, e_H) \in A.\end{aligned}$$

L'action de G sur A par conjugaison $(g, a) \mapsto Int(g)(a) = gag^{-1}$ induit sur $s(H) \subset G$ l'action donnée initialement de H sur A : pour tout $(h, a) \in H \times A$, l'élément $\rho_h(a)$ est égal à $s(h)a(s(h))^{-1}$, autrement dit, $\rho_h = Int(s(h))$. En revanche, $s(H)$ n'est en général pas distingué dans G : selon un calcul similaire, il l'est si et seulement si l'action ρ

est triviale. Enfin, l'application $\psi : A \times H \to G : (a, h) \mapsto ah$ (c'est-à-dire, $i(a)s(h)$) est toujours une bijection, mais n'est un isomorphisme de groupes (pour la structure de produit direct de $A \times H$) que si ρ est triviale.

Inversement, partons d'un groupe G, et de deux sous-groupes A et H de G tels que l'application $\nu : A \times H \to G : (a, h) \mapsto ah$ soit une bijection ensembliste. Alors, $A \cap H = \{e_G\}$, et les sous-groupes A et H commutent si et seulement s'ils sont tous deux distingués dans G. (On dit que deux parties U et V de G commutent si $uv = vu$ pour tout $u \in U$ et tout $v \in V$.) Si A et H commutent, alors l'application ν est un isomorphisme de groupes (pour la structure de produit direct sur $A \times H$), et on dit que G est le produit direct (interne) de ses sous-groupes distingués A et H.

Toujours sous l'hypothèse que ν est une bijection ensembliste, supposons seulement que A soit distingué dans G. Alors, H agit sur A par conjugaison $\rho_h(a) = hah^{-1}$, et la relation $aha'h' = a\,\rho_h(a')\,hh'$ montre que ν^{-1} établit un isomorphisme de groupes de G vers le produit semi-direct $A \rtimes_\rho H$ de A par H pour cette action ρ. On dit que G est le produit semi-direct (interne) de son sous-groupe distingué A par son sous-groupe H, et on note $G = A \rtimes H$.

Soit enfin G un groupe, et soit A un sous-groupe distingué de G. L'ensemble G/A des classes modulo A est alors naturellement muni d'une structure de groupe. En général, il n'existe pas de sous-groupe de G dont les éléments forment un système de représentants de G/A, mais c'est le cas si (et seulement si) il existe un sous-groupe H de G tel que $G = A \rtimes H$.

Exemples. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Considérons le sous-groupe $G = B_n(K)$ de $GL_n(K)$, formé par les matrices triangulaires supérieures inversibles d'ordre n. Le groupe G admet comme sous-groupe le groupe abélien $H = D_n(K) \simeq (K^\times)^n$ formé par les matrices diagonales inversibles, et le groupe $A = Unip_n(K)$ formé par les matrices triangulaires supérieures unipotentes

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{1i} & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{jn} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(non abélien pour $n \geq 3$). Le sous-groupe $Unip_n(K)$ est distingué dans $B_n(K)$, et on a (exercice) :

$$B_n(K) = Unip_n(K) \rtimes D_n(K).$$

Considérons le sous-groupe $GA_1(K)$ de $GL_2(K)$ formé des matrices de la forme

$$[v,u] = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u \in K^\times, v \in K.$$

Son intersection avec $D_2(K)$ est un sous-groupe $H' = \{[0,u]\}$ isomorphe au groupe multiplicatif $(K^\times, \cdot)$, tandis que son sous-groupe distingué $A' = Unip_2(K) = \{[v,1]\}$ est isomorphe au groupe additif $(K,+)$. On a $GA_1(K) = A' \rtimes H'$. L'action de H' sur A' par conjugaison est donnée par $[0,u][v,1][0,u^{-1}] = [uv,1]$, de sorte qu'on peut aussi écrire $GA_1(K) = K \rtimes_\rho K^\times$, où l'action des éléments u de $K^\times$ sur les éléments v de K est donnée par $\rho_u(v) = uv$.

Pour mieux comprendre et généraliser ce dernier exemple, introduisons la notion du *prolongement vectoriel canonique d'un espace affine*. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, de direction E. On peut attacher, de façon cette fois canonique, à $\mathcal{E}$ un espace vectoriel $\widehat{\mathcal{E}}$ contenant E comme hyperplan vectoriel, et $\mathcal{E}$ comme hyperplan affine. Ensemblistement, $\widehat{\mathcal{E}}$ est la réunion disjointe de E et de symboles λx, où $\lambda \in K^\times$ et $x \in \mathcal{E}$. Pour tout point $x \in \mathcal{E}$, on identifie x avec $1x$. On parvient à munir $\widehat{\mathcal{E}}$ d'une structure d'espace vectoriel de telle façon que l'application $h = \widehat{\mathcal{E}} \to K$, définie par $h(\overrightarrow{v}) = 0$ si $\overrightarrow{v} \in E$ et $h(\overrightarrow{v}) = \lambda$ si $\overrightarrow{v} = \lambda x$, soit une forme linéaire sur $\widehat{\mathcal{E}}$. En particulier, $Ker(h) = E$, et $\mathcal{E}$ est l'hyperplan affine $h^{-1}(1)$ de $\widehat{\mathcal{E}}$. La structure d'espace vectoriel sur $\widehat{\mathcal{E}}$ est définie de la façon suivante (l'addition dans $\widehat{\mathcal{E}}$ est notée $\widehat{+}$, la multiplication par les scalaires des éléments de $\widehat{\mathcal{E}}$ est notée $\widehat{\cdot}$) :

- $u \widehat{+} v = u + v$ pour tous vecteurs $u, v \in E$;
- $u \widehat{+} \lambda x = \lambda x \widehat{+} u = \lambda(x + \frac{1}{\lambda} u)$ pour tout vecteur $u \in E$, tout point $x \in \mathcal{E}$ et tout scalaire $\lambda \in K^\times$;
- $\lambda x \widehat{+} \mu y = (\lambda + \mu)(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} x + \frac{\mu}{\lambda+\mu} y)$ pour tous points $x, y \in \mathcal{E}$ et tous scalaires $\lambda, \mu \in K^\times$ tels que $\lambda + \mu \neq 0$;
- $-\lambda x \widehat{+} \lambda y = \lambda \overrightarrow{xy}$ pour tous points $x, y \in \mathcal{E}$ et tout scalaire $\lambda \in K^\times$;
- $0 \widehat{\cdot} \widehat{x} = 0 \in \widehat{E}$ pour tout $\widehat{x} \in \widehat{\mathcal{E}}$;
- $\mu \widehat{\cdot} u = \mu u$ pour tout vecteur $u \in E$ et tout scalaire $\mu \in K^\times$;
- $\mu \widehat{\cdot} \lambda x = (\mu\lambda) x$ pour tout point $x \in \mathcal{E}$ et tous scalaires $\lambda, \mu \in K^\times$.

Exercice. Montrer que $\widehat{\mathcal{E}}$ muni des opérations d'addition et de multiplication par les scalaires décrite ci-dessus est un espace vectoriel.

L'espace vectoriel $\widehat{\mathcal{E}}$ s'appelle *prolongement vectoriel canonique* de $\mathcal{E}$. Deux éléments x et y de $\mathcal{E} \subset \widehat{\mathcal{E}}$ ont pour différence $y - x$ dans l'espace vectoriel $\widehat{\mathcal{E}}$ l'unique vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{xy}$ de E tel que $y = x + \overrightarrow{u}$ dans

$\mathcal{E}$. Cela justifie la notation $\overrightarrow{PQ} = Q - P$, parfois utilisée en géométrie affine.

Remarquons que, pour tout entier positif ou nul n, le prolongement vectoriel de K^n (ici K^n est muni de sa structure affine naturelle) peut être identifié avec K^{n+1}.

Considérons des espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de dimensions n et m, respectivement. Choisissons des repères affines $(P_0, \ldots, P_n)$ et $(Q_0, \ldots, Q_m)$ de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, respectivement, et identifions $\mathcal{E}$ à K^n et $\mathcal{F}$ à K^m à l'aide de ces repères affines (en plaçant les origines dans P_0 et Q_0, respectivement). Dans les coordonnées cartésiennes correspondantes, toute application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ s'écrit sous la forme $\overrightarrow{x} \mapsto U\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}$, où $\overrightarrow{x} \in K^n$, la matrice $U \in Mat_{m,n}(K)$ représente $\overrightarrow{\varphi}$, et $\overrightarrow{v} \in K^m$ représente le vecteur $\overrightarrow{Q_0\varphi(P_0)}$. Il est commode d'écrire cette représentation de φ sous la forme

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{x} \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} U & \overrightarrow{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{avec } \begin{pmatrix} U & \overrightarrow{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = [\overrightarrow{v}, U] \in Mat_{m+1,n+1}(K).$$

Ici, on représente φ comme restriction d'une application linéaire du prolongement vectoriel canonique $\widehat{K^n}$ de K^n dans le prolongement vectoriel canonique $\widehat{K^m}$ de K^m. Pour toute application affine $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, représentée par une matrice $[\overrightarrow{v'}, U'] \in Mat_{k+1,m+1}(K)$, où $dim\ \mathcal{G} = k$, la composée $\psi \circ \varphi$ est représentée par la matrice

$$[\overrightarrow{v}', U'][\overrightarrow{v}, U] = [\overrightarrow{v}' + U'\overrightarrow{v}, U'U].$$

On voit que si φ est inversible, l'application φ^{-1} est représentée par $[\overrightarrow{v}, U]^{-1} = [-U^{-1}\overrightarrow{v}, U^{-1}]$.

Pour tout entier strictement positif n, on pose $GA_n(K) = GA(K^n)$. Les formules précédentes, avec $m = n$, montrent que

$$GA_n(K) = K^n \rtimes_\rho GL_n(K),$$

pour l'action ρ de $GL_n(K)$ sur K^n donnée par $\rho(U)(\overrightarrow{v}) = U\overrightarrow{v}$.

On peut décrire une telle décomposition du groupe affine en produit semi-direct sans utiliser les coordonnées. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Rappelons que les translations de $\mathcal{E}$ sont les éléments de $T(\mathcal{E}) = \{\varphi \in GA(\mathcal{E}) \mid \overrightarrow{\varphi} = id_E\}$ qui est le noyau du morphisme $\pi : GA(\mathcal{E}) \to GL(E)$. En tant que noyau, $A = T(\mathcal{E})$ est distingué dans $GA(\mathcal{E})$. Fixons alors un point O de $\mathcal{E}$, et considérons-en le stabilisateur $H = \big(GA(\mathcal{E})\big)_O = \{\varphi \in GA(\mathcal{E}) \mid \varphi(O) = O\}$, qui s'identifie naturellement au

groupe linéaire $GL(\mathcal{E}_O) \simeq GL(E)$ du vectorialisé de $\mathcal{E}$ en O, et ne rencontre $T(\mathcal{E})$ qu'en $id_{\mathcal{E}} = t_{\overrightarrow{0}}$. Mieux, la restriction à H du morphisme $\pi : G = GA(\mathcal{E}) \to GL(E) \simeq G/A$ est un isomorphisme de groupes. Par conséquent, tout élément de G s'écrit de façon unique sous la forme ha', où $a' \in A$ et $h \in H$, donc aussi sous la forme $ah, a = ha'h^{-1}$. Ainsi,

$$GA(\mathcal{E}) = T(\mathcal{E}) \rtimes \big(GA(\mathcal{E})\big)_O \simeq E \rtimes_\rho GL(E),$$

pour l'action ρ de $GL(E)$ sur E donnée par $\rho(\overrightarrow{\varphi})(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{v})$.

1.9. **Notion de convexité.** Dans ce paragraphe, $\mathcal{E}$ est un espace affine **réel** de dimension finie supérieure ou égale à 1.

Soient A et B deux points de $\mathcal{E}$. Le *segment* $[AB]$ est l'ensemble

$$\{\lambda A + (1-\lambda)B \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset \mathcal{E}.$$

Une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ est dite *convexe* si, pour tous points A et B de $\mathcal{C}$, le segment $[AB]$ est entièrement contenu dans $\mathcal{C}$.

Il est clair que tout sous-espace affine de $\mathcal{E}$ est convexe. Un autre exemple de sous-ensembles convexes est donné par les demi-espaces de $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{E}$, et soit O un point de $\mathcal{H}$. En identifiant $\mathcal{E}$ avec le vectorialisé $\mathcal{E}_O$ de $\mathcal{E}$ en O, on peut choisir une forme linéaire $l : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ dont le noyau coïncide avec $\mathcal{H}$. Les ensembles

$$\{P \in \mathcal{E} \mid l(P) \geq 0\} \quad \text{et} \quad \{P \in \mathcal{E} \mid l(P) \leq 0\}$$

s'appellent *demi-espaces* définis par $\mathcal{H}$. (Remarquons que si on remplace O par un autre point de $\mathcal{H}$ ou la forme linéaire l par une autre forme linéaire dont le noyau coïncide avec $\mathcal{H}$, on obtient la même paire de demi-espaces.)

Exercice. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathcal{E}$. Montrer que chaque demi-espace défini par $\mathcal{H}$ est un sous-ensemble convexe.

Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine entre deux espaces affines réels, et soient A et B deux points de $\mathcal{E}$. On pose $A' = \varphi(A)$ et $\varphi(B) = B'$. Tout point P du segment $[AB]$ est le barycentre d'un système $\{(A, \lambda), (B, 1-\lambda)\}$, où λ est un nombre réel entre 0 et 1. Le fait que les applications affines préservent les barycentres (voir la Proposition 8) implique que $\varphi([AB]) = [A'B']$. Cette observation a les corollaires suivants.

Proposition 12. *Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine entre deux espaces affines réels, et soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ un sous-ensemble convexe. Alors, $\varphi(\mathcal{C})$ est un sous-ensemble convexe de $\mathcal{F}$.*

Démonstration. Soient A' et B' deux points de $\varphi(\mathcal{C})$. On peut trouver un point $A \in \mathcal{C}$ et un point $B \in \mathcal{C}$ tels que $\varphi(A) = A'$ et $\varphi(B) = B'$.

Le segment $[AB]$ est entièrement contenu dans $\mathcal{C}$. Donc, $\varphi([AB])$, qui est le segment $[A'B']$, est entièrement contenu dans $\varphi(\mathcal{C})$. $\square$

Proposition 13. *Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine entre deux espaces affines réels, et soit $\mathcal{C}' \subset \mathcal{F}$ un sous-ensemble convexe. Alors, $\varphi^{-1}(\mathcal{C}')$ est un sous-ensemble convexe de $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Soient A et B deux points de $\varphi^{-1}(\mathcal{C}')$. Posons $A' = \varphi(A)$ et $B' = \varphi(B)$. On a $\varphi([AB]) = [A'B']$ et $[A'B'] \subset \mathcal{C}'$. Donc, les segment $[AB]$ est entièrement contenu dans $\varphi^{-1}(\mathcal{C}')$. $\square$

Proposition 14. *L'intersection $\bigcap_{i\in I} \mathcal{C}_i$ d'un nombre quelconque de sous-ensembles convexes $\mathcal{C}_i$, $i \in I$, de $\mathcal{E}$ est convexe.*

Démonstration. Soient A et B deux points de $\bigcap_{i\in I} \mathcal{C}_i$. Pour tout $i \in I$, le segment $[AB]$ est entièrement contenu dans $\mathcal{C}_i$. Donc, ce segment est entièrement contenu dans $\bigcap_{i\in I} \mathcal{C}_i$. $\square$

La réunion de deux sous-ensembles convexes n'est pas convexe en général : par exemple, le sous-ensemble formé de deux points distincts n'est pas convexe.

Soit S un sous-ensemble de $\mathcal{E}$. L'intersection de tous les sous-ensembles convexes contenant S est un sous-ensemble convexe de $\mathcal{E}$, appelé l'*enveloppe convexe* de S. L'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de $\mathcal{E}$ s'appelle *polytope convexe*. Un *polyèdre convexe* est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces de $\mathcal{E}$.

Proposition 15. *Soit S un sous-ensemble non vide de $\mathcal{E}$. Alors, l'enveloppe convexe $\mathcal{P}(S)$ de S est formée des barycentres de familles finies de points de S munis de coefficients positifs ou nuls.*

Démonstration. Notons S_+ l'ensemble des barycentres de familles finies de points de S munis de coefficients positifs ou nuls. Remarquons que S_+ est convexe. En effet, soient A et B deux points de S_+. Les points du segment $[AB]$ sont les barycentres des systèmes $\{(A, \lambda), (B, 1-\lambda)\}$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$. L'associativité de la barycentration implique que tous ces points sont dans S_+.

Tout point $A \in S$ est le barycentre du système $\{(A, 1)\}$, donc $S \subset S_+$. Puisque S_+ est convexe, on obtient l'inclusion $\mathcal{P}(S) \subset S_+$.

Pour démontrer l'inclusion $S_+ \subset \mathcal{P}(S)$, montrons par récurrence l'affirmation suivante : si $n \geq 1$ est un entier, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels positifs ou nuls (qui ne sont pas tous nuls), et $A_1, \ldots, A_n$ des points de $\mathcal{P}(S)$, alors le barycentre du système $\{(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_n, \lambda_n)\}$ est contenu dans $\mathcal{P}(S)$.

Si $n = 1$, le barycentre est A_1, et l'affirmation est vraie. Supposons que l'affirmation est vraie pour un certain entier $k \geq 1$. Soit λ_1, ..., λ_{k+1} des nombres réels positifs ou nuls (qui ne sont pas tous nuls), et A_1, ..., A_{k+1} des points de $\mathcal{P}(S)$. Si l'un des nombres λ_1, ..., λ_{k+1} est nul (notons le λ_i) on peut retirer (A_i, λ_i) du système. Supposons que tous les nombres λ_1, ..., λ_{k+1} sont non nuls. Soit P_k le barycentre du système $\{(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_k, \lambda_k)\}$. Par hypothèse de récurrence, on a $P_k \in \mathcal{P}(S)$. Le barycentre P_{k+1} du système $\{(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_{k+1}, \lambda_{k+1})\}$ coïncide avec le barycentre du système $\{(P_k, \lambda_1 + \ldots + \lambda_k), (A_{k+1}, \lambda_{k+1})\}$. Ce dernier barycentre appartient à $\mathcal{P}(S)$, car $\mathcal{P}(S)$ est convexe. $\square$

Le résultat de la Proposition 15 peut être précisé de la façon suivante.

Théorème 5. (*Carathéodory*) *Soit $m \geq 1$ un entier, et soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension m. Soit S un sous-ensemble non vide de $\mathcal{E}$. Alors, l'enveloppe convexe $\mathcal{P}(S)$ de S est formée des barycentres de familles de $m+1$ points de S munis de coefficients positifs ou nuls.*

La démonstration est laissée en exercice.