Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques*, M1
Année 2023 - 2024
Cours MU4MA001

GÉOMÉTRIE AFFINE ET PROJECTIVE

I. Itenberg

4. Géométrie euclidienne

Dans tout ce chapitre, on suppose que $K = \mathbb{R}$.

4.1. **Espaces vectoriels euclidiens.** Considérons un espace vectoriel $E \simeq \mathbb{R}^n$ (où n est un entier positif ou nul). Si E est muni d'un *produit scalaire*, c'est-à-dire, une forme bilinéaire symétrique $b : E \times E \to \mathbb{R}$ qui est définie positive (de signature $(n, 0)$), alors l'espace E est dit *euclidien*. Dans ce cas, E admet une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *orthonormée* (autrement dit, orthogonale et telle que, pour tout $i = 1, \ldots, n$, on ait $q(e_i) = b(e_i, e_i) = 1$), et on peut, sans restreindre la généralité, supposer que $q(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, ce qui identifie $O(E)$ à $O(n)$. On pose $||x||^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ pour tout $x \in E$. Les éléments de $SO(n) = \big\{u \in O(n) \mid det(u) = 1\big\} = O(n)^+$ s'appellent les *rotations* de E. Le complémentaire de $SO(n)$ dans $O(n)$ est noté $O(n)^-$. Pour n impair, il contient $-\mathbf{I}_n$, de sorte que $O(2m+1) \simeq SO(2m+1) \times \{\pm 1\}$; pour n pair, il contient des éléments d'ordre 2, mais aucun n'est central, donc on a seulement $O(2m) \simeq SO(2m) \rtimes \{\pm 1\}$.

Dans le cas $n = 2$, le groupe

$$SO(2) = \{R_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$$

est commutatif (et isomorphe à $U(1) = \{z \in \mathbb{C}^*, |z| = 1\}$). Tout élément de $O(2)^-$ est une symétrie orthogonale S_D par rapport à une droite vectorielle D de $\mathbb{R}^2$, et $O(2) = SO(2) \rtimes_\tau \{\pm 1\}$, où -1, représentable par une symétrie arbitraire $S_D = S_D^{-1}$, agit sur $SO(2)$ par

$$\tau(-1)(R_\theta) = R_{-\theta},$$

c'est-à-dire, $S_D R_\theta S_D^{-1} = R_{-\theta}$.

Soit W un sous-espace vectoriel de E, d'orthogonal $W^\perp$. La relation $E = W \oplus W^\perp$ permet de définir la *projection orthogonale* π_W sur W (c'est-à-dire, parallèlement à $W^\perp$) et de même, la *symétrie orthogonale* σ_W par rapport à W ; si W est un hyperplan H, cette symétrie s'appelle la *réflexion* τ_H par rapport à H. Toute symétrie orthogonale σ_W est une isométrie, et vérifie $\sigma_W^2 = id_E$. Inversement, on a l'énoncé suivant.

Lemma 28. (1) *Pour toute isométrie u d'un espace vectoriel euclidien E, on a $E = Ker(u - id_E) \perp Im(u - id_E)$.*

(2) *Pour tout automorphisme u d'ordre 2 d'un espace vectoriel E, on a $E = Ker(u - id_E) \oplus Im(u - id_E)$, et $Im(u - id_E) = Ker(u + id_E)$.*

(3) *Tout élément u d'ordre 2 de $O(n)$ est une symétrie orthogonale.*

Démonstration. (1) D'une part, $Ker(u-id_E)$ et $Im(u-id_E)$ sont de dimensions complémentaires. D'autre part, pour tout $x \in Ker(u-id_E)$ et tout $z \in E$, on a $b(x, u(z) - z) = b(u^{-1}x, z) - b(x, z) = b(x, z) - b(x, z) = 0$, d'où $Ker(u - id_E) \perp Im(u - id_E)$.

(2) Plus généralement, si $P, Q \in K[T]$ sont des polynômes premiers entre eux tels que $P(u)Q(u) = 0$ pour un certain automorphisme u de E, on a $E = W \oplus W'$, où $W = Ker(P(u)) = Im(Q(u)), W' = Ker(Q(u)) = Im(P(u))$.

(3) Soit $u \in O(n)$ un élément d'ordre 2. En posant

$$W = Ker(u - id_E),$$

on voit que

$$u = \begin{pmatrix} id_W & 0 \\ 0 & -id_{W^\perp} \end{pmatrix},$$

autrement dit, u est une symétrie orthogonale par rapport à W. $\square$

Proposition 29. *Soit u une isométrie de $E \simeq \mathbb{R}^n$. Alors,*

(1) *il existe des entiers $a^+, a^-, c \geq 0$, avec $a^+ + a^- + 2c = n$, et une base orthonormée de E, dans laquelle u est représentée par une matrice du type $\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{a^+} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_{a^-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{\theta_c} \end{pmatrix}$, où, pour tout $i = 1, \ldots, c$, on a $\theta_i \notin \pi\mathbb{Z}$;*

(2) *il existe un entier $p \leq n$ et des reflexions $\tau_{H_1}, \ldots, \tau_{H_p}$, telles que $u = \tau_{H_p} \circ \ldots \circ \tau_{H_1}$;*

(3) *en particulier, tout élément de $O(2)^-$ est une reflexion, et les points fixes d'un élément $u \neq id_E$ de $SO(3)$ forment une droite.*

La partie (1) signifie que, pour tout $u \in O(n)$, il existe une décomposition orthogonale $E = V^+ \perp V^- \perp \Pi_1 \perp \ldots \perp \Pi_c$, en sous-espaces stables sous u, tels que $u_{|V^+} = id$ et $u_{|V^-} = -id$, les Π_i sont des plans, et u y induit des rotations d'angles $\theta_i \not\equiv 0, \pi \bmod 2\pi$.

Démonstration. (1) Par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivial, et le cas $n = 2$ est classique. Pour $n \geq 3$, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ $(m \leq n)$ les valeurs propres de u dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire, les racines de $det(u - \lambda id_E) = 0$. Si l'une, soit λ_1, est réelle, il lui correspond un vecteur propre $v_1 \in E$, que l'on peut supposer de norme 1 et qui vérifie $q(v_1) = q(u(v_1)) = \lambda_1^2 q(v_1)$, donc $\lambda_1 = \pm 1$. Comme les isométries préservent la relation d'orthogonalité, l'hyperplan $E_1 = (\mathbb{R}v_1)^\perp$ est alors stable sous u, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $u_1 = u_{|E_1}$.

Si, en revanche, aucune valeur propre n'est réelle, on peut trouver deux valeurs propres, soit λ_1 et $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, qui sont complexes conjuguées. Considérons alors le *complexifié* $E_\mathbb{C}$ de E : il s'agit de l'ensemble $E \times E$ muni de l'opération d'addition $E_\mathbb{C} \times E_\mathbb{C} \to E_\mathbb{C}$ définie par

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

(ici x_1, y_1, x_2, y_2 sont des éléments de E) et l'opération $\mathbb{C} \times E_\mathbb{C} \to E_\mathbb{C}$ de multiplication par des scalaires complexes définie par

$$(\lambda + i\mu)(x, y) = (\lambda x - \mu y, \mu x + \lambda y)$$

(ici x, y sont des éléments de E et λ, μ sont des nombres réels). On identifie E avec $E \times \{0\} \subset E_\mathbb{C}$. Toute base de E (sur $\mathbb{R}$) est une base de $E_\mathbb{C}$ (sur $\mathbb{C}$), et tout endomorphisme ($\mathbb{R}$-linéaire) de E se prolonge de façon unique à un endomorphisme ($\mathbb{C}$-linéaire) de $E_\mathbb{C}$. Le produit scalaire b s'étend sur $E_\mathbb{C}$ en un *produit scalaire hermitien* $b_\mathbb{C}$ (c'est-à-dire, $b_\mathbb{C} : E_\mathbb{C} \times E_\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une forme hermitienne telle que $b_\mathbb{C}(v, v)$ soit un nombre réel strictement positif pour tout vecteur non nul v de $E_\mathbb{C}$). Notons $u_\mathbb{C}$ l'automorphisme $\mathbb{C}$-linéaire que u induit sur $E_\mathbb{C}$. Il est unitaire, et admet λ_1, λ_2 parmi ses valeurs propres. Donc $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, et on peut écrire $\lambda_1 = e^{i\theta_1}, \lambda_2 = e^{-i\theta_1}$, où $\theta_1 \not\equiv 0, \pi$. Les vecteurs propres $v_1, v_2 \in E_\mathbb{C}$ correspondant sont linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$: ils sont même orthogonaux pour $b_\mathbb{C}$, puisque

$$\begin{aligned} \lambda_1^{-1} b_\mathbb{C}(v_1, v_2) &= b_\mathbb{C}(u_\mathbb{C}^{-1}(v_1), v_2) = b_\mathbb{C}(v_1, u_\mathbb{C}(v_2)) \\ &= \overline{\lambda_2} b_\mathbb{C}(v_1, v_2) = \lambda_1 b_\mathbb{C}(v_1, v_2), \end{aligned}$$

tandis que $\lambda_1^{-1} \neq \lambda_1$. De plus, $E_\mathbb{C}$ admet une involution semilinéaire σ (pour tout $(\lambda, v) \in \mathbb{C} \times E_\mathbb{C}$, on a $\sigma(\lambda v) = \overline{\lambda} v$), qui vérifie $Ker(\sigma - id_{E_\mathbb{C}}) = E$ et qui commute à $u_\mathbb{C}$. On peut donc choisir $v_2 = \sigma(v_1)$

comme vecteur propre pour λ_2. Dans ces conditions, le plan $\Pi_{\mathbb{C}}$ engendré par v_1, v_2 dans $E_{\mathbb{C}}$ contient les vecteurs

$$w_1 = \frac{1}{2}(v_1 + \sigma(v_1)), \quad w_2 = \frac{1}{2i}(v_1 - \sigma(v_1)),$$

qui appartiennent à E. Ainsi, $\Pi_{\mathbb{C}} \cap E$ est un plan réel Π_1 de E stable sous u. Les valeurs propres de l'isométrie $u^1 = u_{|\Pi_1}$ sont $e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}$, donc u^1 est la rotation d'angle θ_1 (qui est représentée par R_{θ_1} dans toute base orthonormée de Π_1), et le sous-espace $E_1 = \Pi_1^{\perp}$ de E, de dimension $n-2$, est stable sous u. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $u_1 = u_{|E_1}$.

(2) C'est un corollaire de (1). En effet, chaque R_{θ_i} peut s'écrire comme composée de deux reflexions $\tau_{D_i^+} \circ \tau_{D_i^-}$ du plan Π_i, qui sont induites par les reflexions $\tau_{H_i^{\pm}}$ de E d'hyperplans $H_i^{\pm} = D_i^{\pm} \oplus_{j \neq i} \Pi_j \oplus V^+ \oplus V^-$. Toute droite D de V^- fournit de même une reflexion τ_H relative à l'hyperplan $H = D^{\perp}$ de E. En choisissant a^- droites orthogonales de V^-, on obtient a^- hyperplans $H_1, \ldots, H_{a^-}$ tels que

$$u = \tau_{H_1} \circ \ldots \circ \tau_{H_{a^-}} \circ \tau_{H_1^+} \circ \tau_{H_1^-} \ldots \circ \tau_{H_c^+} \circ \tau_{H_c^-},$$

d'où les $p = a^- + 2c \leq n$ réflexions recherchées.

(3) Les décompositions ci-dessus ne sont pas uniques, mais la parité de a^- et de p ne dépend que de u, puisque $det(u) = (-1)^{a^-} = (-1)^p$. Pour $n = 2$ et $det(u) = -1$, cela impose $p = 1$, et u est une réflexion (en fait, nous avons utilisé cette propriété de $O(2)^-$ au démarrage de la récurrence de (1)). Pour $n = 3$ et $det(u) = 1$, cela impose $p = 2$, $u = \tau_{H_2} \circ \tau_{H_1}$: si $H_1 = H_2$, on a $u = id_E$ (et $a^+ = 3$); sinon, $a^+ = 1$, donc $Ker(u - id_E)$ est une droite Δ, qui coïncide avec la droite $H_1 \cap H_2$, et u est la rotation d'axe Δ, d'angle deux fois l'angle de (H_1, H_2). $\square$

Un endomorphisme $u : E \to E$ d'un espace vectoriel euclidien $E \simeq \mathbb{R}^n$ (on ne suppose pas ici que u est une isométrie) est dit *symétrique* si u coïncide avec son adjoint u^*.

Proposition 30. *Tout endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E de dimension $n \geq 1$ est diagonalisable dans une base orthonormée de E.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivial. Supposons que $n \geq 2$. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme symétrique, et soit B une base orthonormée de E. La matrice M de u dans la base B est symétrique, donc toutes les valeurs propres (complexes) de u sont réelles.

Soit $x \in E$, $\|x\| = 1$ un vecteur propre de valeur propre λ. On note F la droite vectorielle engendrée par x. Soit $y \in F^\perp$ un vecteur. On a

$$b(u(y), x) = b(y, u(x)) = \lambda b(y, x) = 0,$$

où b est le produit scalaire de E. Donc, $u(y) \in F^\perp$. Par conséquent, $F^\perp$ est stable par u, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la restriction de u sur $F^\perp$. $\square$

Proposition 31. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$, et soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Alors, il existe une base orthonormée de E qui est orthogonale pour q.*

Démonstration. Notons b le produit scalaire de E, et notons b' la forme bilinéiare polaire de q. On cherche un endomorphisme $u : E \to E$ tel que $b'(x, y) = b(x, u(y))$ pour tous vecteurs x, y de E. Puisque $b'(x, y) = \varphi^t_{b'}(y)(x)$ et $b(x, u(y)) = \varphi^t_b(u(y))(x)$ pour tous vecteurs $x, y \in E$, on peut poser $u = (\varphi^t_b)^{-1} \circ \varphi^t_{b'}$.

On a

$$b(x, u(y)) = b'(x, y) = b'(y, x) = b(y, u(x)) = b(u(x), y)$$

pour tous vecteurs $x, y \in E$. Ceci montre que u est symétrique. Par conséquent, u est diagonalisable dans une base orthonormée $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. Pour tout indice $1 \leq j \leq n$, on a $u(e_j) = \lambda_i e_j$ pour un certain nombre réel λ_i. Donc, pour tous indices $1 \leq j, k \leq n$, on obtient

$$b'(e_j, e_k) = b(e_j, u(e_k)) = \lambda_k b(e_j, e_k).$$

Par conséquent, la base B est orthogonale pour q. $\square$

4.2. **Espaces affines euclidiens.** Un *espace affine euclidien* $\mathcal{E}$ est un espace affine réel dont l'espace vectoriel directeur est un espace euclidien (E, b). Pour deux points P et Q de $\mathcal{E}$, on appelle *distance* de P à Q le nombre $d(P, Q) = (q(\overrightarrow{PQ}))^{\frac{1}{2}}$. Une *isométrie affine* de $\mathcal{E}$ est une application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui conserve les distances. Ainsi, les translations $t_{\overrightarrow{v}}$, $\overrightarrow{v} \in E$, sont des isométries affines. L'énoncé suivant montre que les isométries affines de $\mathcal{E}$ forment un sous-groupe, noté $OA(\mathcal{E})$, du groupe affine $GA(\mathcal{E})$. De plus, $OA(\mathcal{E}) \simeq E \rtimes_\tau O(E)$, pour l'action naturelle τ de $O(E)$ sur E.

Proposition 32. *Soit φ une isométrie affine de $\mathcal{E}$. Alors, φ est un automorphisme affine de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire, $\varphi \in GA(\mathcal{E})$. On note $\overrightarrow{\varphi} \in GL(E)$ l'application linéaire correspondante. Il existe un unique couple $(\overrightarrow{v}, \psi) \in E \times OA(\mathcal{E})$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

- $\varphi = t_{\overrightarrow{v}} \circ \psi$ *(donc* $\overrightarrow{\psi} = \overrightarrow{\varphi}$*) ;*
- $Fix(\psi) = \{P \in \mathcal{E} \mid \psi(P) = P\}$ *est non vide ; donc c'est un sous-espace affine de* $\mathcal{E}$*, d'espace vectoriel directeur* $Ker(\overrightarrow{\varphi} - id_E)$*;*
- $\overrightarrow{v} \in Ker(\overrightarrow{\varphi} - id_E)$.

De plus, on a alors automatiquement $t_{\overrightarrow{v}} \circ \psi = \psi \circ t_{\overrightarrow{v}}$.

Démonstration. Fixons une origine O de $\mathcal{E}$. Alors, $\varphi' = t_{\overrightarrow{\varphi(O)O}} \circ \varphi$ est une isométrie affine de $\mathcal{E}$ qui fixe O. En identifiant le vectorialisé $\mathcal{E}_O$ de $\mathcal{E}$ à E, on peut donc voir φ' comme une application de E dans E telle que $\varphi'(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$. Pour tout $\overrightarrow{x} \in E$, on a alors $q(\varphi'(\overrightarrow{x})) = q(\varphi'(\overrightarrow{x}) - \varphi'(\overrightarrow{0})) = q(\overrightarrow{x})$, et on obtient que φ' est linéaire. Donc $\varphi' \in GA(\mathcal{E})$, et de même pour φ.

Supposons qu'une décomposition $\varphi = t_{\overrightarrow{v}} \circ \psi$ vérifie les deux premières propriétés, et montrons qu'elle vérifie la troisième propriété si et seulement si $t_{\overrightarrow{v}} \circ \psi = \psi \circ t_{\overrightarrow{v}}$. En effet, $\psi \circ t_{\overrightarrow{v}} \circ \psi^{-1} = t_{\overrightarrow{\psi}(\overrightarrow{v})}$ est égal à $t_{\overrightarrow{v}}$ si et seulement si $\overrightarrow{v} \in Ker(\overrightarrow{\psi} - id_E) = Ker(\overrightarrow{\varphi} - id_E)$.

Montrons maintenant qu'une décomposition $\varphi = t_{\overrightarrow{v}} \circ \psi = \psi \circ t_{\overrightarrow{v}}$ vérifiant les trois propriétés de l'énoncé est unique. Soit B un point fixe de ψ, et $B' = \varphi(B) = B + \overrightarrow{v}$ son image par φ. Pour tout $P \in \mathcal{E}$, d'image $P' = \varphi(P)$, on a

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{BP'} - \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BB'} + (\overrightarrow{\varphi} - id_E)(\overrightarrow{BP}) = \overrightarrow{v} + (\overrightarrow{\varphi} - id_E)(\overrightarrow{BP}),$$

où $v \in Ker(\overrightarrow{\varphi} - id_E)$. Une telle décomposition de $\overrightarrow{PP'}$ est unique, donc $\overrightarrow{v}$, et par conséquent $\psi = \varphi \circ t_{-\overrightarrow{v}}$, sont entièrement déterminés par φ.

Construisons enfin une décomposition, en fixant une origine O de $\mathcal{E}$, d'image $O' = \varphi(O)$ sous φ. On a $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{v} + (\overrightarrow{\varphi} - id_E)(\overrightarrow{w}) \in Ker(\overrightarrow{\varphi} - id_E) \oplus Im(\overrightarrow{\varphi} - id_E)$. Soit $B = O - \overrightarrow{w}$, et soit $\psi \in OA(\mathcal{E})$ l'(unique) isométrie affine fixant B et de partie linéaire $\overrightarrow{\psi} = \overrightarrow{\varphi}$. Alors, φ et $t_{\overrightarrow{v}} \circ \psi$ ont mêmes parties linéaires, et valent au point B

$$\begin{aligned}\varphi(B) &= O' + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OB}) = O + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OB}) \\ &= O + \overrightarrow{v} + (\overrightarrow{\varphi} - id_E)(\overrightarrow{BO}) + \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{OB}) \\ &= B + \overrightarrow{v} = t_{\overrightarrow{v}} \circ \psi(B),\end{aligned}$$

donc coïncident sur tout $\mathcal{E}$. □

Parmi les isométries affines $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, on distingue, en particulier, les suivantes :

- les *déplacements* (respectivement, *antidéplacements*), dont la partie linéaire $\overrightarrow{\varphi} \in O(n)^+$ est une rotation vectorielle (respectivement, $\overrightarrow{\varphi} \in O(n)^-$) ; le groupe $OA(n)^+ \simeq E \rtimes_\tau O(n)^+$ des déplacements contient les translations ;
- les *rotations*, qui sont les déplacements φ possédant au moins un point fixe. Si $n = 2$, $\varphi \neq id_{\mathcal{E}}$ est une rotation affine si et seulement si $\overrightarrow{\varphi}$ est une rotation vectorielle différente de l'identité : alors, $Ker(\overrightarrow{\varphi} - id_E) = 0$, et $\varphi \neq id_{\mathcal{E}}$ a un unique point fixe, appelé *centre* de la rotation ;
- les *symétries orthogonales* $\sigma_{\mathcal{W}}$ par rapport à un sous-espace affine $\mathcal{W}$ de $\mathcal{E}$: ici $\sigma_{\mathcal{W}}$ est la symétrie affine par rapport à $\mathcal{W}$ parallèlement à l'orthogonal $W^\perp$ de la direction W de $\mathcal{W}$. Quand $\mathcal{W} = \mathcal{H}$ est un hyperplan de $\mathcal{E}$, on parle de la *réflexion* $\tau_{\mathcal{H}}$ par rapport à $\mathcal{H}$; c'est un antidéplacement, d'ordre 2 dans le groupe $OA(n)$. Le composé de deux réflexions par rapports à des hyperplans parallèles de direction H est une translation par un vecteur $\overrightarrow{v} \in H^\perp$.

4.3. **Coniques affines dans le cas euclidien.** Fixons un plan affine euclidien $\mathcal{E}$. Si A et B sont des points de $\mathcal{E}$, on note $|AB|$ la distance $d(A, B)$ entre ces points. Si O, A et B sont trois points de $\mathcal{E}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ forment une base orthonormée de la direction E de $\mathcal{E}$, on dit que (O, A, B) est un *repère orthonormé* de $\mathcal{E}$.

On dit qu'une conique affine $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}$ est *propre* si la projectivisée de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{P}(\widehat{E})$ est une conique non singulière. On dit qu'une conique $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}$ est *non vide* si l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{E}$ est non vide.

On déduit le théorème suivant de la description des coniques affines réelles (voir le chapitre précédent) et la Proposition 31.

Théorème 11. *Soit $\mathcal{C}$ une conique non vide et propre dans $\mathcal{E}$. Alors, il existe un repère orthonormé de $\mathcal{E}$ tel que la conique $\mathcal{C}$ soit représentée dans ce repère par un des polynômes suivants :*

(1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$, *où $a \geq b$ sont des nombres réels strictement positifs,*

(2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1$, *où a et b sont des nombres réels strictement positifs,*

(3) $y^2 - 2px$, *où p est un nombre réel strictement positif.*

Dans les deux premiers cas du Théorème 11, l'origine du repère s'appelle le *centre* de la conique (il s'agit du centre de symétrie de l'ensemble des points de la conique).

Une conique $\mathcal{C}$ s'appelle un *cercle* s'il existe un nombre réel strictement positif r (appelé le *rayon* du cercle) tels que toutes les distances entre le centre O et les points de $\mathcal{C}$ soient égales à r (ceci correspond au cas $a = b = r$ dans l'équation (1) du Théorème 11).

Les ellipses (le premier cas du théorème), les hyperboles (le deuxiéme cas) et les paraboles (le troisième cas) ont des propriétés géométriques remarquables.

Théorème 12 (Description par foyer et directrice)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une conique propre dans $\mathcal{E}$ telle que l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ ne soit pas vide. Supposons que $\mathcal{C}$ n'est pas un cercle. Alors, il existe un point $F \in \mathcal{E}$, une droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ et un nombre réel $e > 0$ tels que l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ coïncide avec*

$$\{M \in \mathcal{E} \ : \ |FM| = e \cdot d(M, \mathcal{D})\},$$

où $d(M, \mathcal{D})$ est la distance entre le point M et la droite $\mathcal{D}$, c'est-à-dire, $\min_{D \in \mathcal{D}} |MD|$.

Inversement, étant donnés un point $F \in \mathcal{E}$, une droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ et un nombre réel $e > 0$ tels que $F \notin \mathcal{D}$, l'ensemble

$$\{M \in \mathcal{E} \ : \ |FM| = e \cdot d(M, \mathcal{D})\}$$

est l'ensemble des points d'une conique propre ; cette conique est une ellipse si $0 < e < 1$, une parabole si $e = 1$, et une hyperbole si $e > 1$.

Démonstration. Montrons, d'abord, la deuxième partie de l'énoncé. Choisissons un point $F \in \mathcal{E}$, une droite $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ et un nombre réel $e > 0$ tels que $F \notin \mathcal{D}$, et considérons l'ensemble

$$\mathcal{K} = \{M \in \mathcal{E} \ : \ |FM| = e \cdot d(M, \mathcal{D})\}.$$

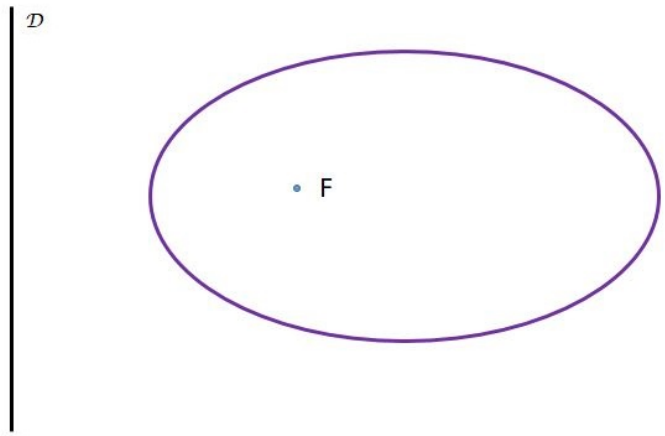
Choisissons un repère orthonormé (O, A, B) de $\mathcal{E}$ tel que F soit sur l'axe OA et $\mathcal{D}$ soit parallèle à l'axe OB. Dans ce repère, le point F est de la forme $(c, 0)$, où $c \in \mathbb{R}$, et la droite $\mathcal{D}$ a pour équation $x = h$, où $h \in \mathbb{R}$ et $h \neq c$. Si $M = (x, y)$ est un point de $\mathcal{E}$, l'égalité $|FM| = e \cdot d(M, \mathcal{D})$ est équivalente à l'égalité

$$(x - c)^2 + y^2 = e^2(x - h)^2.$$

If $e = 1$, on peut ajuster le choix du repère orthonormé de telle façon que $h = -c$, et on obtient l'équation

$$y^2 - 4cx = 0.$$

Elle définit l'ensemble des points d'une parabole.



Si $e \neq 1$, on peut ajuster le choix du repère orthonormé de telle façon que $h = \frac{c}{e^2}$, et on obtient l'équation

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = c^2(\frac{1}{e^2} - 1),$$

qui peut être réécrite de la façon suivante :

$$\frac{x^2}{c^2/e^2} + \frac{y^2}{(1-e^2)c^2/e^2} - 1 = 0.$$

Cette dernière équation définit l'ensemble des points d'une ellipse (si $0 < e < 1$) ou d'une hyperbole (si $e > 1$).

Pour démontrer la première partie de l'énoncé, considérons les trois cas suivants.

(1) Supposons que $\mathcal{C}$ est l'ellipse définie par un polynôme

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1,$ où $a \geq b$ sont des nombres réels strictement positifs.

On cherche les nombres réels e et c tels que

$$e > 0, \quad \frac{c^2}{e^2} = a^2 \text{ et } (1-e^2)\frac{c^2}{e^2} = b^2.$$

On obtient $\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$ et $c^2 = a^2e^2$, ce qui permet de trouver $e > 0$ et c (le nombre c étant déterminé à signe près). En posant $h = \frac{c}{e^2}$, on obtient un point $F = (c, 0)$ et une droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = h$ qui ont les propriétés demandées.

(2) Supposons que $\mathcal{C}$ est l'hyperbole définie par un polynôme

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels strictement positifs.}$$

On cherche les nombres réels e et c tels que

$$e > 0, \quad \frac{c^2}{e^2} = a^2 \text{ et } (e^2 - 1)\frac{c^2}{e^2} = b^2.$$

On obtient $\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$ et $c^2 = a^2e^2$, ce qui permet de trouver $e > 0$ et c (le nombre c étant déterminé à signe près). En posant $h = \frac{c}{e^2}$, on obtient un point $F = (c, 0)$ et une droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = h$ qui ont les propriétés demandées.

(3) Finalement, supposons que $\mathcal{C}$ est une parabole définie par un polynôme

$$y^2 - 2px, \text{ où } p \text{ est un nombre réel strictement positif.}$$

En posant $c = p/2$ et $h = -p/2$, on obtient un point $F = (c, 0)$ et une droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = h$ qui ont les propriétés demandées. □

Le point F, la droite $\mathcal{D}$ et le nombre e qui apparaissent dans le Théorème 12 s'appellent, respectivement, *foyer*, *directrice* et *excentricité* de la conique considérée. Le foyer F est sur un axe de symétrie de la conique. C'est axe est orthogonal à $\mathcal{D}$ et s'appelle *axe focal* de $\mathcal{C}$.

Pour l'ellipse définie par un polynôme

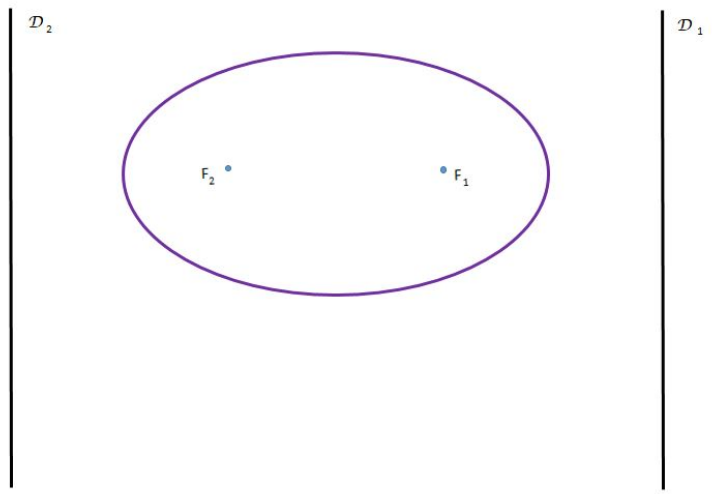
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \text{ où } a \geq b \text{ sont des nombres réels strictement positifs.}$$

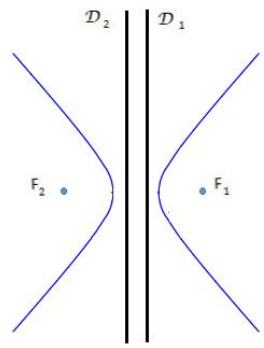
l'excentricité e est égale à $\frac{c}{a}$, où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Cette ellipse a deux foyers $(c, 0)$ et $(-c, 0)$, ainsi que deux directrices d'équations $x = \frac{a}{e}$ et $x = -\frac{a}{e}$. En particulier, puisque $0 < e < 1$, l'ensemble des points de l'ellipse se trouve entre les deux directrices. Plus l'excentricité e est proche de 0, plus l'ellipse est proche d'un cercle.

Pour l'hyperbole définie par un polynôme

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels strictement positifs,}$$

l'excentricité e est égale à $\frac{c}{a}$, où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Cette hyperbole a deux foyers $(c, 0)$ et $(-c, 0)$, ainsi que deux directrices d'équations $x = \frac{a}{e}$ et $x = -\frac{a}{e}$. En particulier, puisque maintenant $e > 1$, l'ensemble des points de l'hyperbole se trouve à l'extérieur de la bande délimitée par les deux directrices.



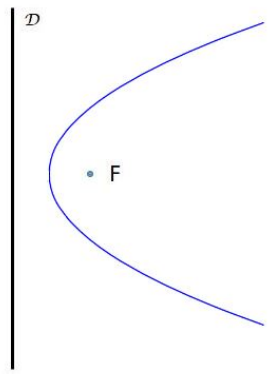


Pour la parabole définie par un polynôme

$$y^2 - 2px, \text{ où } p \text{ est un nombre réel strictement positif,}$$

l'excentricité e est égale à 1, et l'ensemble des points de la parabole est formé par les points équidistants du foyer $(p/2, 0)$ et la directrice d'équation $x = -p/2$.

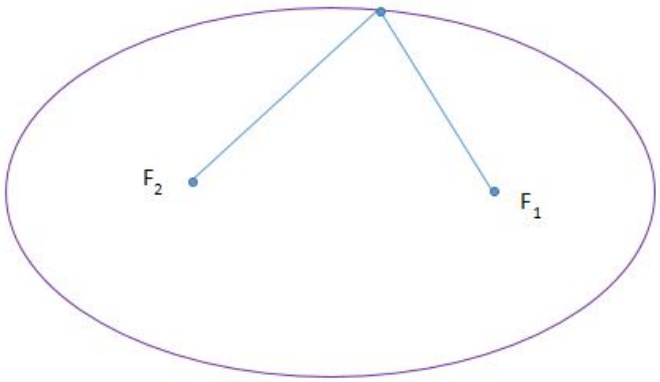
Dans le cas des ellipses et le cas des hyperboles, il y a aussi une description par deux foyers.



Théorème 13 (Description d'une ellipse par deux foyers)**.** *Soit $\mathcal{C}$ l'ellipse définie par un polynôme*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \text{ où } a \geq b \text{ sont des nombres réels strictement positifs.}$$

Notons F_1 et F_2 les deux foyers de $\mathcal{C}$ (si $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O, on pose $F_1 = O$ et $F_2 = O$). Alors, l'ensemble des points de l'ellipse $\mathcal{C}$ est formé des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $|MF_1| + |MF_2| = 2a$.



Démonstration. Supposons que $\mathcal{C}$ n'est pas un cercle (dans le cas d'un cercle, l'énoncé est immédiat). Notons $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les directrices de

$\mathcal{C}$, et notons e l'excentricité de $\mathcal{C}$. Puisque l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ se trouve entre les deux directrices, pour tout point M de $\mathcal{C}$, on a

$$|MF_1| + |MF_2| = e(d(M, \mathcal{D}_1) + d(M, \mathcal{D}_2)) = e \cdot d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2),$$

où $d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ la distance entre les deux droites parallèles $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. La distance entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est égale à $\frac{2c}{e^2} = \frac{2a}{e}$, où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Donc, $|MF_1| + |MF_2| = 2a$ pour tout point M de $\mathcal{C}$.

Montrons que tout point $M' \in \mathcal{E}$ tel que $|M'F_1| + |M'F_2| = 2a$ est un point de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire, vérifie l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Soit (x_0, y_0) les coordonnées du point M'. On suppose que F_1 appartient au demi-plan $x \geq 0$ (et F_2 appartient au demi-plan $x \leq 0$). Puisque les foyers F_1 et F_2 de $\mathcal{C}$ ont, respectivement, les coordonnées $(c, 0)$ et $(-c, 0)$, on a

$$|M'F_1|^2 + |M'F_2|^2 = 2(x_0^2 + y_0^2 + c^2),$$
$$|M'F_2|^2 - |M'F_1|^2 = 4cx_0.$$

Puisque $|M'F_1| + |M'F_2| = 2a$, on obtient $|M'F_2| - |M'F_1| = \frac{2cx_0}{a}$, d'où $|M'F_1| = a - \frac{cx_0}{a}$ et $|M'F_2| = a + \frac{cx_0}{a}$. Par conséquent,

$$(a - \frac{cx_0}{a})^2 + (a + \frac{cx_0}{a})^2 = 2(x_0^2 + y_0^2 + c^2),$$

d'où

$$(1 - e^2)x_0^2 + y_0^2 = a^2 - c^2 = b^2,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

□

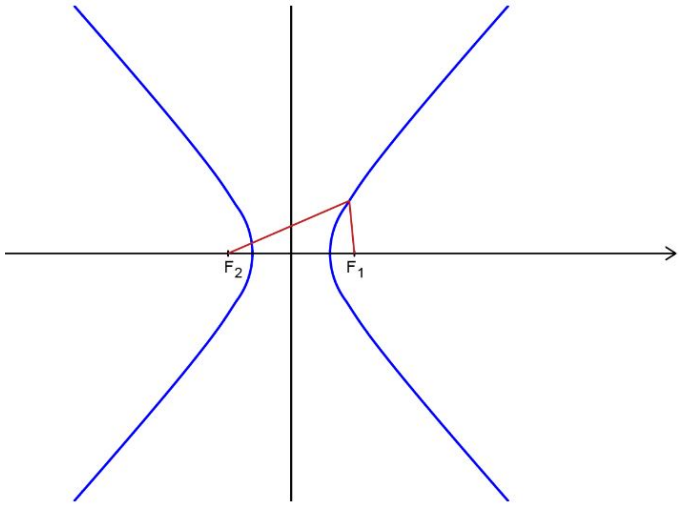
La démonstration du théorème suivant est complètement similaire à celle du Théorème 13.

Théorème 14 (Description d'une hyperbole par deux foyers)**.** *Soit $\mathcal{C}$ l'hyperbole définie par un polynôme*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels strictement positifs.}$$

Notons F_1 et F_2 les deux foyers de $\mathcal{C}$. Alors, l'ensemble des points de l'hyperbole $\mathcal{C}$ est formé des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $||MF_1| - |MF_2|| = 2a$. □

Comme corollaire du Théorème 13, on obtient l'énoncé suivant.



Proposition 33. *Soit $\mathcal{C}$ l'ellipse définie par un polynôme*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \text{ où } a \geq b \text{ sont des nombres réels strictement positifs.}$$

Alors, la distance maximale entre deux points de $\mathcal{C}$, symétriques par rapport au centre de $\mathcal{C}$, est égale à $2a$.

Démonstration. Notons F_1 et F_2 les foyers de l'ellipse $\mathcal{C}$. Soit M un point de $\mathcal{C}$. Notons M' le point symétrique de M par rapport au centre de $\mathcal{C}$. On a

$$|MM'| \leq |MF_1| + |M'F_1| = |MF_1| + |MF_2| = 2a.$$

L'égalité $|MM'| = 2a$ est équivalente au fait que F_1 appartient au segment $[MM']$. De façon similaire, l'égalité $|MM'| = 2a$ est équivalente à $F_2 \in [MM']$. Donc, l'égalité $|MM'| = 2a$ est équivalente au fait que M et M' appartiennent à l'axe focal de $\mathcal{C}$. □

De façon similaire, le Théorème 14 peut être utilisé pour démontrer l'énoncé suivant.

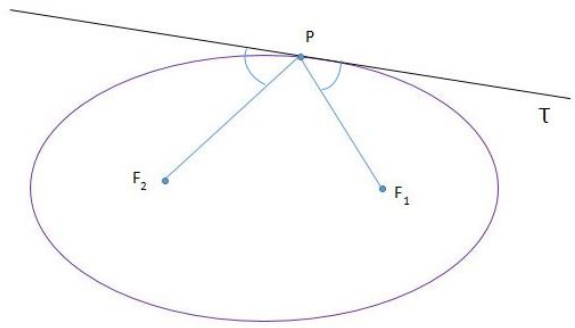
Proposition 34. *Soit $\mathcal{C}$ l'hyperbole définie par un polynôme*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des nombres réels strictement positifs.}$$

Alors, la distance minimale entre deux points de $\mathcal{C}$, symétriques par rapport au centre de $\mathcal{C}$, est égale à $2a$. □

Les Propositions 33 et 34 impliquent que le Théorème 11 donne une classification à isométrie près des ellipses et des hyperboles dans $\mathcal{E}$.

4.4. **Propriétés optiques de coniques.** Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Si $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont deux distinctes droites dans $\mathcal{E}$ qui se coupent en un point $P \in \mathcal{E}$.



Théorème 15. *Soit $\mathcal{C}$ une ellipse dans $\mathcal{E}$, et soit P un point de $\mathcal{C}$.*

- *Si $\mathcal{C}$ est un cercle, on note O son centre ; alors, la droite qui passe par P et est orthogonale à la droite OP est tangente à $\mathcal{C}$ en P.*
- *Si $\mathcal{C}$ n'est pas un cercle, on note F_1 et F_2 les foyers de $\mathcal{C}$; alors, une des bissectrices des droites PF_1 et PF_2 est tangente à $\mathcal{C}$ en P.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ l'ellipse définie par un polynôme

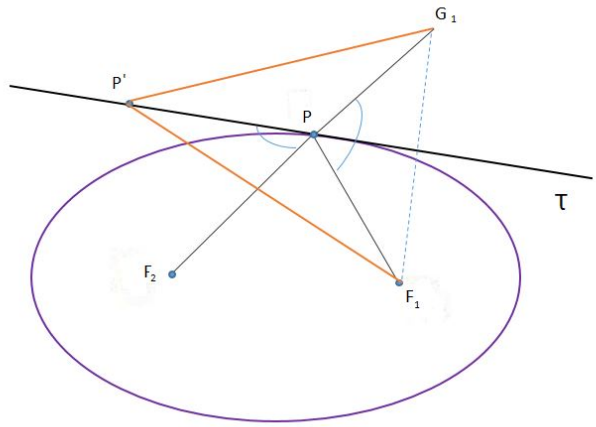
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \text{ où } a \geq b \text{ sont des nombres réels strictement positifs.}$$

Supposons, d'abord, que $\mathcal{C}$ est un cercle, c'est-à-dire, $a = b$. Soit $\mathcal{T}$ la droite qui passe par P et est orthogonale à la droite OP. Pour tout point $P' \in \mathcal{T}$ différent de P, on a $|OP'| > |OP| = a$. Donc, la droite $\mathcal{T}$ est tangente à $\mathcal{C}$ en P.

Supposons maintenant que $\mathcal{C}$ n'est pas un cercle. Soit $\mathcal{T}$ la bissectrice extérieure de la angle formé par les demi-droites $[PF_1)$ et $[PF_2)$. Notons G_1 le point symétrique de F_1 par rapport à la droite $\mathcal{T}$. Le point P appartient au segment $[G_1F_2]$. Donc, pour tout point $P' \in \mathcal{T}$ différent de P, on a

$$\begin{aligned} |F_1P'| + |F_2P'| = |G_1P'| + |F_2P'| > |G_1F_2| = |G_1P| + |F_2P| \\ = |F_1P| + |F_2P| = 2a. \end{aligned}$$

Par conséquent, la droite $\mathcal{T}$ est tangente à $\mathcal{C}$ en P. $\square$



Le Théorème 15 implique que, si on envoie un rayon lumineux depuis un foyer d'une ellipse, dans une direction arbitraire, ce rayon passera obligatoirement par l'autre foyer, après réflexion sur l'ellipse. On peut formuler cet énoncé en utilisant la terminologie de billard : si une table de billard à la forme d'une ellipse et une boule est placée dans un foyer de cette ellipse, on peut lancer cette boule (de façon suffisamment forte) dans une direction arbitraire, la trajectoire de la boule passera, après un rebond, par le deuxième foyer de l'ellipse.

Exercices.

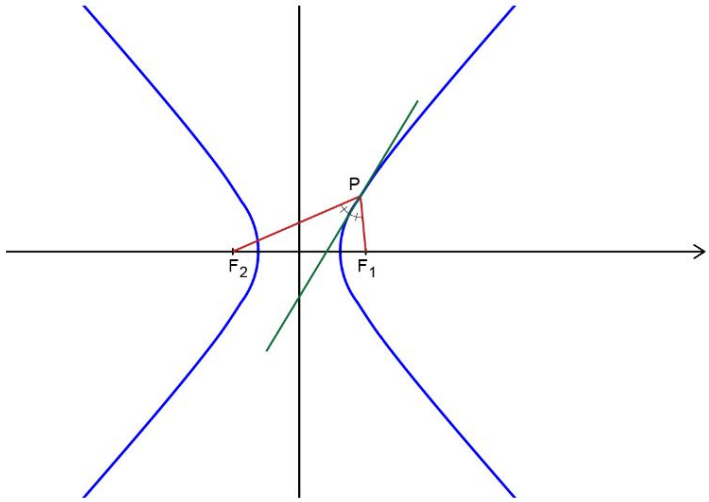
(1) Soit $\mathcal{C}$ une hyperbole dans $\mathcal{E}$, et soit P un point de $\mathcal{C}$. On note F_1 et F_2 les foyers de $\mathcal{C}$. Montrer que la bissectrice intérieure de la angle formé par les demi-droites $[PF_1)$ et $[PF_2)$ est tangente à $\mathcal{C}$ en P.

(2) Soit $\mathcal{C}$ la parabole définie dans $\mathcal{E}$ par un polynôme

$$y^2 - 2px, \text{ où } p \text{ est un nombre réel strictement positif,}$$

et soit P un point de $\mathcal{C}$. On note F le foyer de $\mathcal{C}$, et on note $\mathcal{H}$ la droite qui passe par P et est parallèle à l'axe de symétrie de la parabole. Montrer qu'une des bissectrices des droites PF et $\mathcal{H}$ est tangente à $\mathcal{C}$ en P.

4.5. **Géométries non euclidiennes.** Pour terminer ce chapitre consacré à la géométrie euclidienne, nous allons dire quelques mots à propos des géométries *non euclidiennes*. Certaines constructions de cette section se généralisent aux dimensions supérieures, mais nous nous limitons ici à des géométries non euclidiennes en dimension 2.



Considérons un plan projectif $\mathbb{P}(E)$, où E est un espace vectoriel réel de dimension 3. Soit $q : E^* \to \mathbb{R}$ une forme quadratique définie sur l'espace vectoriel dual E^* de E. Notons b la forme polaire de q.

Supposons que la forme quadratique q soit non dégénérée. Dans cette situation, l'isomorphisme $\varphi_b : E^* \to E$ (on identifie E^{**} avec E) permet de définir, à partir de q, une forme quadratique $q' : E \to \mathbb{R}$ sur E. En multipliant, si nécessaire, la forme quadratique q par -1, on peut réduire notre étude aux deux cas suivants : q est de signature $(3, 0)$ et q est de signature $(2, 1)$. Le premier de ces deux cas mène à la *géométrie elliptique*. Un modèle d'un *plan elliptique* est fourni par le quotient $S_1/\{\pm\mathrm{Id}\}$ de la *surface de niveau* $S_1 = \{x \in E \mid q'(x) = 1\}$ de la forme quadratique q'. Ce quotient est une copie de $\mathbb{P}(E)$ munie d'une structure supplémentaire qui provient de la forme quadratique q'; les points de ce quotient correspondent aux droites vectorielles de E et les droites correspondent aux plans vectoriels de E.

Le deuxième cas (la forme quadratique q est de signature $(2, 1)$) mène à la *géométrie hyperbolique*. Un modèle d'un *plan hyperbolique* (cette notion est à ne pas confondre avec la notion d'un plan hyperbolique introduite dans le Chapitre 3 "Géométrie quadratique") est fourni par le quotient $H_1/\{\pm\mathrm{Id}\}$ de la *surface de niveau*

$$H_{-1} = \{x \in E \mid q'(x) = -1\}$$

de la forme quadratique q'. La surface $H_{-1} \subset E$ a deux composantes connexes qui sont échangées par l'application $-\mathrm{Id} : E \to E$, donc chacune de ces composantes connexes peut être considérée comme modèle du plan hyperbolique. Les points du plan hyperbolique correspondent aux points de $\mathbb{P}(E)$ qui représentent les droites vectorielles de E telles

que la restriction de q' sur chacune de ces droites soit définie négative, et les droites du plan hyperbolique correspondent aux plans vectoriels de E orthogonaux à des vecteurs $v \in E$ tels que $q'(v) > 0$.

Le cas d'un plan affine euclidien peut être vu comme intermédiaire entre le cas elliptique et le cas hyperbolique ci-dessus. Soit $\mathcal{D}$ une droite d'un plan (affine euclidien, elliptique ou hyperbolique) et soit $P \notin \mathcal{D}$ un point de ce plan. Dans le cas affine euclidien, on peut toujours tracer par P une unique droite qui ne coupe pas $\mathcal{D}$. Dans le cas elliptique, il n'existe pas de droite qui passe par P et ne coupe pas $\mathcal{D}$, et dans le cas hyperbolique, il y a une infinité de telles droites.

Une justification plus rigoureuse du fait que le cas d'un plan affine euclidien est intermédiaire entre les cas elliptique et hyperbolique est fournie par une construction d'un plan affine euclidien à partir d'une forme quadratique dégénérée q de signature $(2, 0)$ sur E^*. Ce plan affine $\mathcal{P}$ est un ouvert affine de $\mathbb{P}(E)$; la droite à l'infini de l'ouvert affine en question est la droite duale à $\mathbb{P}(\mathrm{Ker}(b)) \in \mathbb{P}(E^*)$, où $\mathrm{Ker}(b)$ est le noyau de b (ce noyau est une droite vectorielle de E^*). Si on note L une forme linéaire non nulle appartenant à $\mathrm{Ker}(b)$, le quotient $E^*/\mathrm{Ker}(b)$ est dual au plan vectoriel $\mathrm{Ker}(L) \subset E$. De plus, la forme quadratique q induit une forme quadratique $\bar{q} : E^*/\mathrm{Ker}(b) \to \mathbb{R}$ qui est définie positive. Ceci permet d'introduire un produit scalaire sur la direction $\mathrm{Ker}(L)$ de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire, une structure euclidienne sur le plan affine $\mathcal{P}$.