Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2022 - 2023

Topologie algébrique des variétés II : classes caractéristiques

Exercices, feuille 2 : Cobordismes, grassmanniennes

Exercice 1 Soit M une variété lisse fermée, et soit M' une réunion disjointe de deux copies de M. Montrer que tous les nombres de Stiefel-Whitney de M' sont nuls.

Exercice 2 (1) Montrer que toutes les variétés fermées de dimension 1 sont deux à deux cobordantes (et cobordantes à zéro).

(2) Montrer que toute surface topologique fermée orientable est cobordante à zéro.

Exercice 3 Soit M une variété topologique compacte (sans bord). On suppose qu'il existe une variété topologique compacte N à bord vérifiant les propriétés suivantes :

— le bord ∂N de N est homéomorphe à M ;

— N admet une structure de CW-complexe fini pour laquelle le bord ∂N de N devient un sous-complexe.

Montrer que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ de M est paire.

Exercice 4 Soit N une variété topologique compacte orientable de dimension $4k+1$ à bord connexe $\partial N = M$, où $k \geq 1$ est un entier. Montrer que la signature $\sigma(M)$ de M est nulle.

Exercice 5 Soient n et k des entiers strictement positifs.

(1) Montrer que la grassmannienne $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ est une variété topologique compacte de dimension nk.

(2) Montrer que la grassmannienne $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ est homéomorphe à la grassmannienne $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$.

(3) Montrer que la grassmannienne $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ peut être munie d'une structure lisse de telle façon que, pour toute fonction $f : G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to \mathbb{R}$, la fonction f devient lisse si et seulement si la composition $f \circ q : V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to \mathbb{R}$ est lisse (ici, $q : V_n(\mathbb{R}^{n+k}) \to G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ est la projection de la variété de Stiefel $V_n(\mathbb{R}^{n+k})$ sur la grassmannienne $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$).

Exercice 6 Soient n et k des entiers strictement positifs. Montrer que le fibré tangent de la grassmannienne $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ est isomorphe au fibré $\mathrm{Hom}(\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}), \gamma^\perp)$, où $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ est le fibré tautologique de la grassmannienne $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ et $\gamma^\perp$ est le complémentaire orthogonal de $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ dans le fibré trivial ε^{n+k}.

Exercice 7 Soient n et k des entiers strictement positifs. Décrire un plongement lisse de la grassmannienne $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ dans un espace projectif réel.

Exercice 8 Soit $n \geq 1$ un entier, B un espace topologique et ξ un fibré vectoriel de base B et de rang n. On dit que ξ est de *type fini* s'il existe une application fibre par fibre $\xi \to \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ pour k suffisamment grand.

(1) Montrer que ξ est de type fini si et seulement si il existe un fibré vectoriel η de base B tel que le fibré $\xi \oplus \eta$ soit trivial.

(2) Supposons, maintenant, que l'espace topologique B soit normal. Montrer que ξ est de type fini si et seulement si il existe un recouvrement ouvert fini $U_1, \ldots, U_r$ tel que la restriction de ξ sur U_i soit trivial pour tout $i = 1, \ldots, r$.

(3) Supposons que l'espace topologique B soit paracompact et sa dimension de recouvrement soit finie. Montrer que ξ est de type fini.

(4) Montrer que le fibré tautologique γ^1 de $\mathbb{RP}^\infty$ n'est pas de type fini.