Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2022 - 2023

Topologie algébrique des variétés II : classes caractéristiques

Exercices, feuille 3 : Cohomologie des grassmanniennes

Exercice 1 Soient n et k deux entiers strictement positifs, et soit Λ un groupe abélien. Montrer que, pour tout entier $0 \leq p < k$, le morphisme $i^* : H^p(G_n(\mathbb{R}^\infty; \Lambda) \to H^p(G_n(\mathbb{R}^{n+k}); \Lambda)$ induit par l'inclusion est un isomoprhisme.

Exercice 2 (1) Soient n et m deux entiers strictement positifs tels que $n < m$. A tout sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^m$ de dimension n, on associe le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^1 \oplus V \subset \mathbb{R}^1 \oplus \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m+1}$ de dimension $n+1$. Montrer que ceci définit un plongement $f : G_n(\mathbb{R}^m) \to G_{n+1}(\mathbb{R}^{m+1})$.

(2) Montrer que f provient d'une application fibre par fibre $\varepsilon^1 \oplus \gamma^n(\mathbb{R}^m) \to \gamma^{n+1}(\mathbb{R}^{m+1})$, où $\gamma^n(\mathbb{R}^m)$ (respectivement, $\gamma^{n+1}(\mathbb{R}^{m+1})$) est le fibré tautologique de la grassmannienne $G_n(\mathbb{R}^m)$ (respectivement, $G_{n+1}(\mathbb{R}^{m+1})$) et ε^1 est le fibré trivial de rang 1 et de base $G_n(\mathbb{R}^m)$.

(3) Montrer que, pour tout entier $r \geq 0$, l'application f envoie les cellules de dimension r de $G_n(\mathbb{R}^m)$ sur les cellules de dimension r de $G_{n+1}(\mathbb{R}^{m+1})$ qui correspondent à la même partition de r.

Exercice 3 Soient n et k deux entiers strictement positifs, et soit r un entier positif ou nul. Montrer que le nombre de cellules de dimension r de la grassmannienne $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ est égal au nombre de cellules de dimension r de la grassmannienne $G_k(\mathbb{R}^{n+k})$.

Exercice 4 Soient n et k des entiers strictement positifs. Montrer que l'algèbre $H^*(G_n(\mathbb{R}^{n+k}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est engendrée par les classes de Stiefel-Whitney $w_1, \ldots, w_n$ du fibré tautologique γ^n et les classes $\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_k$ avec la seule relation

$$(1 + w_1 + \ldots + w_n)(1 + \overline{w}_1 + \ldots + \overline{w}_k) = 1.$$

Exercice 5 Soient n et k des entiers strictement positifs. Soient ξ et η des fibrés vectoriels de rangs respectif n et k ayant la même base paracompacte.

(1) Supposons que $n = k = 1$. Montrer que $w_1(\xi \otimes \eta) = w_1(\xi) + w_1(\eta)$.

(2) Considérons maintenant le cas général. Montrer que

$$w(\xi \otimes \eta) = p_{n,k}(w_1(\xi), \ldots, w_n(\xi), w_1(\eta), \ldots, w_k(\eta)),$$

où le polynôme $p_{n,k}$ de $n+k$ variables $t_1, \ldots, t_n, t'_1, \ldots, t'_k$ est défini de la façon suivante : soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ les polynômes symétriques élémentaires des variables $t_1, \ldots, t_n$, et soient $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_k$ les polynômes symétriques élémentaires des variables $t'_1, \ldots, t'_k$; alors

$$p_{n,k}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_k) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k} (1 + t_i + t'_j).$$

Exercice 6 Considérons un fibré vectoriel ξ de base B, d'espace total E et de rang n. On note E_0 l'espace total E privé de la section nulle. Pour tout entier $i \geq 0$, on pose $w_i(\xi) = \Phi^{-1} \operatorname{Sq}^i \Phi(1)$, où, pour tout entier k positif ou nul, l'application $\Phi : H^k(B; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H^{k+n}(E, E_0; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est l'isomorphisme de Thom. Soient ξ_1 et ξ_2 deux fibrés vectoriels ayant la même base. Montrer que

$$w(\xi_1 \oplus \xi_2) = w(\xi_1) \smile w(\xi_2)$$

(sans utiliser l'approche axiomatique aux classes de Stiefel-Whitney).