

GÉOMÉTRIE AFFINE ET PROJECTIVE

Corrigé du partiel

Exercice 1

Pour chacun des énoncés suivants, déterminer s'il est vrai ou faux.

- (a) Dans un espace affine de dimension 3, un plan et une droite ont toujours au moins un point commun.
- (b) Dans un espace affine de dimension 3, trois plans ont toujours au moins un point commun.
- (c) Tout repère affine d'un espace affine de dimension 3 a exactement quatre points.

Solution.

- (a) L'énoncé est faux : une droite peut être disjointe d'un plan. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure affine naturelle, on peut considérer la droite affine

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, z = 1\}$$

et le plan affine

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}.$$

- (b) L'énoncé est faux. Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure affine naturelle, on peut considérer trois plans affines deux à deux parallèles et deux à deux distincts :

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\},$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\},$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2\}.$$

- (c) L'énoncé est vrai : pour tout entier $n \geq 0$ et tout espace affine $\mathcal{E}$ de dimension n , le nombre de points dans tout repère affine de $\mathcal{E}$ est égal à $n + 1$.

Exercice 2

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine défini sur $\mathbb{R}$. Soient A_1, A_2 et A_3 trois points non alignés de $\mathcal{E}$. Notons

- G le *centre de gravité* du triangle $A_1A_2A_3$ (c'est-à-dire, l'isobarycentre des points A_1, A_2, A_3),
- B_1 le milieu du segment $[A_2A_3]$,
- B_2 le milieu du segment $[A_1A_3]$,
- B_3 le milieu du segment $[A_1A_2]$,
- C_1 l'isobarycentre des points G, B_1, A_2 ,
- D_1 l'isobarycentre des points G, B_1, A_3 ,
- C_2 l'isobarycentre des points G, B_2, A_3 ,
- D_2 l'isobarycentre des points G, B_2, A_1 ,
- C_3 l'isobarycentre des points G, B_3, A_1 ,
- D_3 l'isobarycentre des points G, B_3, A_2 .

- (a) Justifier le fait que les points C_1 et D_1 sont distincts. Montrer que les droites (A_2A_3) et (C_1D_1) sont parallèles. Trouver le nombre réel λ tel que $\overrightarrow{C_1D_1} = \lambda \overrightarrow{A_2A_3}$.
- (b) Justifier le fait que les points C_3 et D_2 sont distincts. Montrer que les droites (A_2A_3) et (C_3D_2) sont parallèles. Trouver le nombre réel μ tel que $\overrightarrow{C_3D_2} = \mu \overrightarrow{A_2A_3}$.
- (c) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_2D_2} + \overrightarrow{C_3D_3}$ est nul.
- (d) Montrer que l'isobarycentre des points C_1, C_2, C_3 coïncide avec l'isobarycentre des points D_1, D_2, D_3 . Montrer que ces isobarycentres coïncident avec G .

Solution.

- (a) Soit $O \in \mathcal{E}$ un point. On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC_1} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA_2}, \\ \overrightarrow{OD_1} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA_3},\end{aligned}$$

d'où

$$\overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{OD_1} - \overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OA_2}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{A_2A_3}.$$

Les points A_2 et A_3 sont distincts, donc le vecteur $\overrightarrow{A_2A_3}$ est non nul. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{C_1D_1}$ est non nul et les points C_1 et D_1 sont distincts. De plus, les droites (A_2A_3) et (C_1D_1) sont parallèles et

$$\overrightarrow{C_1D_1} = \lambda \overrightarrow{A_2A_3} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{3}.$$

- (b) On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC_3} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB_3} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA_1}, \\ \overrightarrow{OD_2} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA_1},\end{aligned}$$

d'où

$$\overrightarrow{C_3D_2} = \overrightarrow{OD_2} - \overrightarrow{OC_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OB_3}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{B_3B_2}.$$

Les points B_2 et B_3 sont distincts, car

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB_2} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA_3}, \\ \overrightarrow{OB_3} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA_2},\end{aligned}$$

d'où

$$\overrightarrow{B_3B_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_2A_3}$$

(et les points A_2 et A_3 sont distincts). Donc, le vecteur $\overrightarrow{B_3B_2}$ est non nul. Par conséquent, le vecteur $\overrightarrow{C_3D_2}$ est non nul et les points C_3 et D_2 sont distincts. De plus, les droites (A_2A_3) et (C_3D_2) sont parallèles et $\overrightarrow{C_3D_2} = \mu \overrightarrow{A_2A_3}$ avec $\mu = \frac{1}{6}$.

- (c) Nous avons montré que $\overrightarrow{C_1D_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A_2A_3}$. De façon similaire, $\overrightarrow{C_2D_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A_3A_1}$ et $\overrightarrow{C_3D_3} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A_1A_2}$. Donc,

$$\overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{C_2D_2} + \overrightarrow{C_3D_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_1} + \overrightarrow{A_1A_2}) = \vec{0}.$$

- (d) L'isobarycentre des points C_1, C_2, C_3 coïncide avec le barycentre du système de points pondérés

$$(A_1, 1), (A_2, 1), (A_3, 1), (B_1, 1), (B_2, 1), (B_3, 1), (G, 3).$$

D'autre part, l'isobarycentre des points D_1, D_2, D_3 coïncide aussi avec le barycentre du système de points pondérés

$$(A_1, 1), (A_2, 1), (A_3, 1), (B_1, 1), (B_2, 1), (B_3, 1), (G, 3).$$

De plus, le barycentre du système de points pondérés

$$(A_1, 1), (A_2, 1), (A_3, 1), (B_1, 1), (B_2, 1), (B_3, 1), (G, 3)$$

coïncide avec le barycentre du système de points pondérés $(G, 3), (G, 3), (G, 3)$, c'est-à-dire, coïncide avec G .

Exercice 3

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines définis sur $\mathbb{R}$, et soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application affine. Soit $n \geq 1$ un entier, et soient $A_1, \dots, A_n$ des points de $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{P}(A_1, \dots, A_n)$ l'enveloppe convexe des points $A_1, \dots, A_n$ dans $\mathcal{E}$, et on note $\mathcal{P}(\varphi(A_1), \dots, \varphi(A_n))$ l'enveloppe convexe des points $\varphi(A_1), \dots, \varphi(A_n)$ dans $\mathcal{F}$.

- (a) Montrer l'inclusion $\mathcal{P}(\varphi(A_1), \dots, \varphi(A_n)) \subset \varphi(\mathcal{P}(A_1, \dots, A_n))$.
- (b) Montrer l'inclusion $\varphi(\mathcal{P}(A_1, \dots, A_n)) \subset \mathcal{P}(\varphi(A_1), \dots, \varphi(A_n))$.

Solution.

- (a) Le sous-ensemble $\mathcal{P}(A_1, \dots, A_n) \subset \mathcal{E}$ est convexe, et l'application $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est affine. Donc, le sous-ensemble $\varphi(\mathcal{P}(A_1, \dots, A_n)) \subset \mathcal{F}$, qui est l'image d'un sous-ensemble convexe par une application affine, est aussi convexe. De plus, $\varphi(A_i) \in \varphi(\mathcal{P}(A_1, \dots, A_n))$ pour tout entier $i = 1, \dots, n$. Puisque $\mathcal{P}(\varphi(A_1), \dots, \varphi(A_n))$ est l'intersection de tous les sous-ensembles convexes de $\mathcal{F}$ qui contiennent les points $\varphi(A_1), \dots, \varphi(A_n)$, on obtient l'inclusion $\mathcal{P}(\varphi(A_1), \dots, \varphi(A_n)) \subset \varphi(\mathcal{P}(A_1, \dots, A_n))$.
- (b) Soit B un point de $\varphi(\mathcal{P}(A_1, \dots, A_n))$. Il existe un point $A \in \mathcal{P}(A_1, \dots, A_n)$ tel que $\varphi(A) = B$. Puisque le point A appartient à l'enveloppe convexe des points $A_1, \dots, A_n$, il existe des nombres réels positifs ou nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (qui ne sont pas tous nuls) tels que A soit le barycentre du système de points pondérés

$$(A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n).$$

Les applications affines préservent les barycentres. Donc, le point B (qui coïncide avec $\varphi(A)$) est le barycentre du système de points pondérés

$$(\varphi(A_1), \lambda_1), \dots, (\varphi(A_n), \lambda_n).$$

Par conséquent, $B \in \mathcal{P}(\varphi(A_1), \dots, \varphi(A_n))$, ce qui montre l'implication $\varphi(\mathcal{P}(A_1, \dots, A_n)) \subset \mathcal{P}(\varphi(A_1), \dots, \varphi(A_n))$.

Exercice 4

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Dans $\mathcal{E}$, on considère trois hyperplans parallèles et deux à deux distincts $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$, ainsi que deux droites distinctes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ dont aucune n'est contenue dans un hyperplan parallèle à $\mathcal{H}$.

- (a) Pour chaque indice $i = 1, 2, 3$, justifier le fait que $\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{D}$ (respectivement, $\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{D}'$) se coupent en exactement un point. Pour chaque indice $i = 1, 2, 3$, notons A_i (respectivement, A'_i) le point d'intersection de $\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{D}$ (respectivement, $\mathcal{D}'$).
- (b) Justifier le fait que les expressions $\frac{\overrightarrow{A_1 A_3}}{\overrightarrow{A_1 A_2}}$ et $\frac{\overrightarrow{A'_1 A'_3}}{\overrightarrow{A'_1 A'_2}}$ ont un sens et montrer que

$$\frac{\overrightarrow{A_1 A_3}}{\overrightarrow{A_1 A_2}} = \frac{\overrightarrow{A'_1 A'_3}}{\overrightarrow{A'_1 A'_2}}.$$

- (c) Soit M un point de la droite $\mathcal{D}$. Supposons que

$$\frac{\overrightarrow{A_1 M}}{\overrightarrow{A_1 A_2}} = \frac{\overrightarrow{A'_1 A'_3}}{\overrightarrow{A'_1 A'_2}}.$$

Montrer que M coïncide avec A_3 .

- (d) Supposons maintenant, en plus, que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient sécantes et que leur point d'intersection A n'appartienne pas à $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$. Justifier le fait que les expressions $\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{AA_2}}$, $\frac{\overrightarrow{AA'_1}}{\overrightarrow{AA'_2}}$ et $\frac{\overrightarrow{A_1 A'_1}}{\overrightarrow{A_2 A'_2}}$ ont un sens et montrer que

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{AA_2}} = \frac{\overrightarrow{AA'_1}}{\overrightarrow{AA'_2}} = \frac{\overrightarrow{A_1 A'_1}}{\overrightarrow{A_2 A'_2}}.$$

Solution.

- (a) Soit $i = 1, 2$ ou 3 . Notons H la direction commune des hyperplans $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$, et notons D la direction de la droite $\mathcal{D}$. Puisque $D \not\subset H$, on a $D \cap H = \{\vec{0}\}$. De plus, $\dim D = 1$ et $\dim H = n - 1$, où n est la dimension de la direction E de $\mathcal{E}$. Donc, $E = H \oplus D$. Par conséquent, $\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{D}$ se coupent en exactement un point. De façon complètement similaire, on montre que $\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{D}'$ se coupent en exactement un point.
- (b) Les points A_1, A_2 et A_3 sont alignés et deux à deux distincts (en particulier, le vecteur $\overrightarrow{A_1 A_2}$ est non nul). Donc, l'expression $\frac{\overrightarrow{A_1 A_3}}{\overrightarrow{A_1 A_2}}$ a un sens. De façon similaire, on montre que l'expression $\frac{\overrightarrow{A'_1 A'_3}}{\overrightarrow{A'_1 A'_2}}$ a un sens.

Considérons la projection π de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{D}'$ parallèlement à H . On a $\pi(A_1) = A'_1$, $\pi(A_2) = A'_2$ et $\pi(A_3) = A'_3$. Donc, $\overrightarrow{A'_1 A'_3} = \vec{\pi}(\overrightarrow{A_1 A_3})$ et $\overrightarrow{A'_1 A'_2} = \vec{\pi}(\overrightarrow{A_1 A_2})$, où $\vec{\pi}$ est la partie linéaire de la projection affine π . Si on pose $\lambda = \frac{\overrightarrow{A_1 A_3}}{\overrightarrow{A_1 A_2}}$, on a $\overrightarrow{A_1 A_3} = \lambda \overrightarrow{A_1 A_2}$, d'où $\vec{\pi}(\overrightarrow{A_1 A_3}) = \lambda \vec{\pi}(\overrightarrow{A_1 A_2})$, c'est-à-dire, $\overrightarrow{A'_1 A'_3} = \lambda \overrightarrow{A'_1 A'_2}$. Par conséquent, $\lambda = \frac{\overrightarrow{A'_1 A'_3}}{\overrightarrow{A'_1 A'_2}}$, d'où

$$\frac{\overrightarrow{A_1 A_3}}{\overrightarrow{A_1 A_2}} = \frac{\overrightarrow{A'_1 A'_3}}{\overrightarrow{A'_1 A'_2}}.$$

- (c) D'après (b), on a $\frac{\overrightarrow{A_1 A_3}}{\overrightarrow{A_1 A_2}} = \lambda = \frac{\overrightarrow{A'_1 A'_3}}{\overrightarrow{A'_1 A'_2}}$. Donc, $\frac{\overrightarrow{A_1 M}}{\overrightarrow{A_1 A_2}} = \lambda$, d'où $\overrightarrow{A_1 M} = \lambda \overrightarrow{A_1 A_2}$. De plus, $\overrightarrow{A_1 A_3} = \lambda \overrightarrow{A_1 A_2}$. Donc, $\overrightarrow{A_1 M} = \overrightarrow{A_1 A_3}$, d'où M coïncide avec A_3 .
- (d) Les points A, A_1 et A_2 sont alignés et deux à deux distincts (en particulier, le vecteur $\overrightarrow{AA_2}$ est non nul). Donc, l'expression $\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{AA_2}}$ a un sens. De façon similaire, on montre que l'expression $\frac{\overrightarrow{AA'_1}}{\overrightarrow{AA'_2}}$ a un sens.

On note $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ le plan affine qui contient les droites sécantes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Le plan $\mathcal{P}$ n'est pas contenu dans $\mathcal{H}_1$ ou $\mathcal{H}_2$. Donc, $\mathcal{P} \cap \mathcal{H}_1$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{H}_2$ sont des droites affines parallèles (leur direction commune est $H \cap P$, où P est la direction de $\mathcal{P}$). Donc, les vecteurs $\overrightarrow{A_1A'_1}$ et $\overrightarrow{A_2A'_2}$ sont colinéaires. De plus, le vecteur $\overrightarrow{A_2A'_2}$ est non nul. Par conséquent, l'expression $\frac{\overrightarrow{A_1A'_1}}{\overrightarrow{A_2A'_2}}$ a un sens.

En utilisant, dans le plan $\mathcal{P}$, le corollaire du théorème de Thalès, on obtient

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{AA_2}} = \frac{\overrightarrow{AA'_1}}{\overrightarrow{AA'_2}} = \frac{\overrightarrow{A_1A'_1}}{\overrightarrow{A_2A'_2}}.$$