Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques*, M1
Année 2023 - 2024
Cours MU4MA001

GÉOMÉTRIE AFFINE ET PROJECTIVE

Corrigé du partiel

Exercice 1

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine. On rappelle que, si O est un point de $\mathcal{E}$, alors la *symétrie centrale* de centre O est l'application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui associe à un point M quelconque de $\mathcal{E}$ le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.

Soient $\varphi_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $\varphi_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ et $\varphi_3 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ trois symétries centrales ayant pour centres, respectivement, O_1, O_2 et O_3.

(a) Montrer que $\varphi_2 \circ \varphi_1$ est une translation. Trouver le vecteur de cette translation.
(b) Montrer que $\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ est une symétrie centrale. Trouver le centre de cette symétrie.

Soient $\psi_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ et $\psi_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ deux applications affines telles que chacune de ces applications soit une translation ou une symétrie centrale.

(c) Peut-on affirmer que l'application $\psi_2 \circ \psi_1$ est une translation ?
(d) Peut-on affirmer que l'application $\psi_2 \circ \psi_1$ est une symétrie centrale ?
(e) Peut-on affirmer que l'application $\psi_2 \circ \psi_1$ est une translation ou une symétrie centrale ?

Solution.

Puisqu'on parle de symétries centrales, on suppose que la caractéristique du corps de base soit différente de 2.

(a) La partie linéaire d'une symétrie centrale de $\mathcal{E}$ est $-\mathrm{Id}_E$, où E est la direction de $\mathcal{E}$. Donc, la partie linéaire de $\varphi_2 \circ \varphi_1$ est
$$\overrightarrow{\varphi}_2 \circ \overrightarrow{\varphi}_1 = (-\mathrm{Id}_E) \circ (-\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Id}_E.$$
Par conséquent, $\varphi_2 \circ \varphi_1$ est une translation. Pour déterminer le vecteur de la translation $\varphi_2 \circ \varphi_1$, considérons l'image de O_1 par cette translation. On a $\varphi_1(O_1) = O_1$ et
$$\varphi_2(O_1) = O_2 + (-\overrightarrow{O_2O_1}) = O_1 + \overrightarrow{O_1O_2} - \overrightarrow{O_2O_1} = O_1 + 2\overrightarrow{O_1O_2}.$$
Donc, $\varphi_2 \circ \varphi_1$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{O_1O_2}$.

(b) La partie linéaire de $\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ est
$$\overrightarrow{\varphi}_3 \circ \overrightarrow{\varphi}_2 \circ \overrightarrow{\varphi}_1 = (-\mathrm{Id}_E) \circ (-\mathrm{Id}_E) \circ (-\mathrm{Id}_E) = -\mathrm{Id}_E.$$
Puisque 1 n'est pas une valeur propre de $-\mathrm{Id}_E$, l'application $\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ admet un unique point fixe et cette application est une symétrie centrale. Pour déterminer le centre de cette symétrie centrale, considérons l'image de O_1 par $\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$. On a
$$(\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1)(O_1) = \varphi_3(O_1 + 2\overrightarrow{O_1O_2}).$$
Posons $P = O_1 + 2\overrightarrow{O_1O_2}$. Le vecteur $\overrightarrow{O_3P}$ coïncide avec $\overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_3O_1} + 2\overrightarrow{O_1O_2}$. Donc,
$$\varphi_3(P) = O_3 - \overrightarrow{O_3P} = O_3 - (\overrightarrow{O_3O_1} + 2\overrightarrow{O_1O_2}).$$

Posons $Q = O_3 - (\overrightarrow{O_3O_1} + 2\overrightarrow{O_1O_2})$. Le centre de la symétrie centrale $\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ est le milieu du segment déterminé par O_1 et Q, autrement dit, le point

$$O_3 + \frac{1}{2}\overrightarrow{O_3O_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{O_3Q} = O_3 + \frac{1}{2}\overrightarrow{O_3O_1} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_3O_1} + 2\overrightarrow{O_1O_2}) = O_3 - \overrightarrow{O_1O_2}.$$

(c) Non. Si ψ_1 est une translation et ψ_2 est une symétrie centrale, alors la partie linéaire de $\psi_2 \circ \psi_1$ est $-\mathrm{Id}_E$; donc, dans ce cas, $\psi_2 \circ \psi_1$ n'est pas une translation.

(d) Non. Si ψ_1 et ψ_2 sont des translations, alors la partie linéaire de $\psi_2 \circ \psi_1$ est Id_E ; donc, dans ce cas, $\psi_2 \circ \psi_1$ n'est pas une symétrie centrale.

(e) Oui. La partie linéaire de $\psi_2 \circ \psi_1$ est $\pm\mathrm{Id}_E$. Par conséquent, $\psi_2 \circ \psi_1$ est une translation ou une symétrie centrale.

Exercice 2

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif tel que la caractéristique de $\mathbb{K}$ soit différente de 2, et soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension supérieure ou égale à 3 sur $\mathbb{K}$. Soient A, B, C et D quatre points affinement indépendants de $\mathcal{E}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un élément différent de 0 et de 1. On note

- P le point de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$,
- Q le point de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AQ} = \lambda\overrightarrow{AD}$,
- R le point de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{CR} = \lambda\overrightarrow{CB}$,
- S le point de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{CS} = \lambda\overrightarrow{CD}$.

On note I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.

(a) Justifier le fait que les points P, Q, R et S sont deux à deux distincts.

(b) Justifier le fait que les points I et J sont distincts.

(c) On note M le milieu du segment $[PS]$. Montrer que le point M est aussi le milieu du segment $[QR]$.

(d) Montrer que le point M appartient à la droite (IJ) ; en déduire que les droites (PS), (QR) et (IJ) sont concourantes.

Solution.

(a) Les points P, Q, R et S appartiennent, respectivement, aux droites (AB), (AD), (CB) et (CD). Ces droites sont deux à deux distinctes (parce que les points A, B, C et D sont affinement indépendants).
- Si P coïncide avec Q (respectivement, R coïncide avec S), alors ces deux points coïncident avec A (respectivement, C), ce qui est impossible, car $\lambda \neq 0$.
- Si P coïncide avec R (respectivement, Q coïncide avec S), alors ces deux points coïncident avec B (respectivement, D), ce qui est impossible, car $\lambda \neq 1$.
- Si P coïncide avec S (respectivement, Q coïncide avec R), alors les droites (AB) et (CD) (respectivement, les droites (AD) et (CB)) se coupent; dans ce cas, les points A, B, C et D doivent être contenus dans un plan affine, ce qui contredit l'hypothèse que ces points sont affinement indépendants.

(b) Si les points I et J coïncident, alors les droites (AC) et (BD) se coupent, ce qui contredit l'hypothèse que les points A, B, C et D sont affinement indépendants.

(c) Soit $O \in \mathcal{E}$ un point. Puisque $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, on a

$$P = (1-\lambda)A + \lambda B.$$

De façon similaire,

$$Q = (1-\lambda)A + \lambda D,$$
$$R = (1-\lambda)C + \lambda B,$$
$$S = (1-\lambda)C + \lambda D.$$

Le milieu M du segment $[PS]$ est le point

$$\frac{1}{2}\big((1-\lambda)A+\lambda B\big)+\frac{1}{2}\big((1-\lambda)C+\lambda D\big).$$

Le milieu du segment $[QR]$ est le point

$$\frac{1}{2}\big((1-\lambda)A+\lambda D\big)+\frac{1}{2}\big((1-\lambda)C+\lambda B\big),$$

qui coïncide, donc, avec M.

(d) Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$. Donc, le point

$$M=\frac{1}{2}(1-\lambda)A+\frac{1}{2}\lambda B+\frac{1}{2}(1-\lambda)C+\frac{1}{2}\lambda D$$

coïncide avec le point $(1-\lambda)I+\lambda J$. Par conséquent, le point M appartient à la droite (IJ). De plus, le point M est le milieu des segments $[PS]$ et $[QR]$. Donc, le point M appartient aussi aux droites (PS) et (QR). Par conséquent, les droites (PS), (QR) et (IJ) sont concourantes.

Exercice 3

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif tel que la caractéristique de $\mathbb{K}$ soit différente de 2. Soit $\mathcal{E}$ un plan affine sur $\mathbb{K}$, et soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non parallèles de $\mathcal{E}$. Soit $M\in\mathcal{E}$ un point.

(a) Justifier le fait que la droite parallèle à $\mathcal{D}'$ et passant par M coupe la droite $\mathcal{D}$ en exactement un point. Notons ce point N.

(b) Justifier le fait qu'il existe un unique point $M'\in\mathcal{E}$ tel que N soit le milieu du segment $[MM']$.

(c) Considérons l'application $\varphi:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ qui associe à tout point $M\in\mathcal{E}$ le point M' construit par la procédure décrite ci-dessus. Montrer que l'application φ est affine.

Solution.

(a) On note E la direction du plan affine $\mathcal{E}$, et on note D (respectivement, D') la direction de la droite affine $\mathcal{D}$ (respectivement, $\mathcal{D}'$). Notons $\mathcal{D}''$ la droite affine parallèle à $\mathcal{D}'$ et passant pas M ; cette droite affine $\mathcal{D}''$ a la même direction D' que la droite affine $\mathcal{D}'$. Puisque les droites affines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles, les droites vectorielles D et D' sont distinctes. Donc, le plan vectoriel E se decompose en somme directe $E=D\oplus D'$. Par conséquent, les droites affines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ se coupent en exactement un point.

(b) Si un point $M'\in\mathcal{E}$ vérifie la condition demandée, alors $M'=M+2\overrightarrow{MN}$, ce qui montre l'unicité. Pour montrer l'existence, on pose $M'=M+2\overrightarrow{MN}$; dans ce cas, le point N est le milieu du segment $[MM']$.

(c) L'application φ coïncide avec la symétrie $s:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ par rapport à $\mathcal{D}$ parallèlement à D'. En effet, pour tout point $M\in\mathcal{E}$, le point N d'intersection de $\mathcal{D}$ et de la droite affine passant par M et ayant la direction D' est l'image $\pi(M)$ de M par la projection $\pi:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$ sur $\mathcal{D}$ parallèlement à D'. De plus, $\pi(M)$ est le milieu du segment $[M\varphi(M)]$. Par conséquent, φ coïncide avec s. Il s'agit, donc, d'une application affine.

On peut justifier cette dernière affirmation en considérant la symétrie vectorielle $f:E\to E$ par rapport à D parallèlement à D'. Choisissons un point $O\in\mathcal{D}$. Pour tout point $M\in\mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O\pi(M)}+\overrightarrow{\pi(M)M}$, les vecteurs $\overrightarrow{O\pi(M)}$ et $\overrightarrow{\pi(M)M}$ appartenant à D et D', respectivement, d'où

$$f(\overrightarrow{OM})=f(\overrightarrow{O\pi(M)})+f(\overrightarrow{\pi(M)M})=\overrightarrow{O\pi(M)}-\overrightarrow{\pi(M)M}=$$
$$\overrightarrow{O\pi(M)}+\overrightarrow{\pi(M)\varphi(M)}=\overrightarrow{O\varphi(M)}.$$

Donc, pour tout point $M \in \mathcal{E}$, on a $\varphi(M) = O + \overrightarrow{O\varphi(M)} = \varphi(O) + f(\overrightarrow{OM})$. Puisque l'application $f : E \to E$ est linéaire, on déduit que l'application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est affine (de partie linéaire f).

Exercice 4

Soit n un nombre entier strictement positif, et soit E un espace vectoriel de dimension $n+1$. Considérons $n+2$ points P_0, ..., P_{n+1} de l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ associé à E. Montrer que $\{P_0, \ldots, P_{n+1}\}$ est un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$ si et seulement si, pour tout nombre entier i tel que $0 \leq i \leq n+1$ et pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k \leq n+1$ et $k \neq i$, le point P_i n'appartient pas au sous-espace projectif engendré par les points P_j, $0 \leq j \leq n+1$, $j \neq i$, $j \neq k$.

Solution.

Soient v_0, ..., v_{n+1} des vecteurs non nuls de E tels que, pour tout entier $0 \leq j \leq n+1$, on ait $P_j = \mathbb{P}(D_j)$, où $D_j \subset E$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur v_j. Par définition, $\{P_0, \ldots, P_{n+1}\}$ est un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$ si et seulement si, pour tout nombre entier $0 \leq k \leq n+1$, les vecteurs v_j, où $0 \leq j \leq n+1$ et $j \neq k$, sont linéairement indépendants. Si les vecteurs v_j, où $0 \leq j \leq n+1$ et $j \neq k$, sont linéairement indépendants, alors, pour tout nombre entier i tel que $0 \leq i \leq n+1$ et $i \neq k$, le vecteur v_i n'appartient pas au sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs v_j, où $0 \leq j \leq n+1$ et $j \neq i$, $j \neq k$. Inversement, si les vecteurs v_j, où $0 \leq j \leq n+1$ et $j \neq k$, sont linéairement dépendants, alors il existe une combinaison linéaire de ces vecteurs qui représente le vecteur nul et dont les coefficients ne sont pas tous nuls, ce qui signifie qu'il existe un nombre entier $0 \leq i \leq n+1$, $i \neq k$ tel que le vecteur v_i appartienne au sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs v_j, où $0 \leq j \leq n+1$ et $j \neq i$, $j \neq k$.

Il reste à remaqruer que la condition

- pour tout nombre entier $0 \leq k \leq n+1$ et pour tout nombre entier i tel que $0 \leq i \leq n+1$ et $i \neq k$, le vecteur v_i n'appartient pas au sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs v_j, $0 \leq j \leq n+1$, où $j \neq i$ et $j \neq k$,

est équivalente à la condition

- pour tout nombre entier $0 \leq i \leq n+1$ et pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k \leq n+1$ et $k \neq i$, le point P_i n'appartient pas au sous-espace projectif engendré par les points P_j, où $0 \leq j \leq n+1$ et $j \neq i$, $j \neq k$.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et soit $\mathbb{P}(E)$ l'espace projectif associé.

(a) Supposons que la dimension de $\mathbb{P}(E)$ soit paire, et considérons une homographie

$$\Phi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E).$$

Montrer que Φ admet au moins un point fixe.

(b) Supposons, maintenant, que $\mathbb{P}(E)$ soit une droite projective. Trouver une homographie de $\mathbb{P}(E)$ sur $\mathbb{P}(E)$ telle que cette homographie n'ait aucun point fixe.

(c) En supposant toujours que $\mathbb{P}(E)$ soit une droite projective, trouver deux homographies $\Psi_1 : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ et $\Psi_2 : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ qui vérifient les propriétés suivantes :
   - les homographies Ψ_1 et Ψ_2 ont chacune exactement deux points fixes ;
   - aucun point fixe de Ψ_1 ne coïncide avec un point fixe de Ψ_2 ;
   - $\Psi_1 \circ \Psi_2 = \Psi_2 \circ \Psi_1$.

Solution.

(a) Considérons un automorphisme linéaire $f : E \to E$ tel que $\Phi = \mathbb{P}(f)$. Puisque la dimension de $\mathbb{P}(E)$ est paire, la dimension de E est impaire. Donc, le polynôme caractéristique de f est un polynôme réel de degré impair. Par conséquent, f admet au moins une racine réelle λ. Un vecteur propre x de f de valeur propre λ engendre une droite vectorielle $D \subset E$ telle que $f(D) = D$, autrement dit, $\mathbb{P}(D) \in \mathbb{P}(E)$ est un point fixe de $\Phi = \mathbb{P}(f)$.

(b) Choisissons une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ du plan vectoriel E. Considérons l'automorphisme linéaire $g : E \to E$ ayant la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base $\mathcal{B}$. Puisque l'automorphisme linéaire g n'a pas de valeur propre réelle, l'homographie $\mathbb{P}(g) : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(E)$ n'a pas de point fixe.

(c) Considérons, à nouveau, la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E. Cette base nous permet d'identifier E avec $\mathbb{R}^2$. On pose $\Psi_1 = \mathbb{P}(h_1)$ et $\Psi_2 = \mathbb{P}(h_2)$, où les automorphismes linéaires $h_1 : E \to E$ et $h_2 : E \to E$ sont définis par $(x, y) \mapsto (x, -y)$ et $(x, y) \mapsto (y, x)$, respectivement. L'automorphisme linéaire h_1 a deux valeurs propres : 1 et -1 ; les sous-espaces propres correspondants sont

- la droite vectorielle D_1 engendrée par le vecteur $(1, 0)$,
- la droite vectorielle D_1' engendrée par le vecteur $(0, 1)$.

De façon similaire, l'automorphisme linéaire h_2 a aussi les valeurs propres 1 et -1 ; les sous-espaces propres correspondants sont

- la droite vectorielle D_2 engendrée par le vecteur $(1, 1)$,
- la droite vectorielle D_2' engendrée par le vecteur $(1, -1)$.

Donc, les homographies Ψ_1 et Ψ_2 ont chacune deux points fixes, et ces quatre points fixes sont deux à deux distincts. De plus, pour tout $(x, y) \in E$, on a

$$(h_1 \circ h_2)(x, y) = (y, -x),$$
$$(h_2 \circ h_1)(x, y) = (-y, x).$$

Par conséquent, $h_1 \circ h_2 = -h_2 \circ h_1$, d'où $\mathbb{P}(h_1 \circ h_2) = \mathbb{P}(h_2 \circ h_1)$, autrement dit

$$\Psi_1 \circ \Psi_2 = \Psi_2 \circ \Psi_1.$$