Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques*, M1
Année 2022 - 2023
Cours MU4MA001

GÉOMÉTRIE AFFINE ET PROJECTIVE

Corrigé du partiel

Exercice 1

On considère un plan affine $\mathcal{E}$ défini sur le corps $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On note E la direction de $\mathcal{E}$.

(a) Quel est le nombre de points de $\mathcal{E}$?
(b) Quel est le nombre de droites affines de $\mathcal{E}$?
(c) Soit P un point de $\mathcal{E}$. Montrer que, dans $\mathcal{E}$, il y a exactement 4 droites affines qui passent par P.
(d) Soit $D \subset E$ une droite vectorielle. Montrer que, dans $\mathcal{E}$, il y a exactement trois droites affines de direction D.

Solution.

(a) Choisissons un point $O \in \mathcal{E}$. Ce choix permet d'identifier le plan affine $\mathcal{E}$ avec sa direction E. On a $\dim_{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}(E) = 2$, donc, le nombre de vecteurs dans E est égal à 3^2, c'est-à-dire, à 9. Par conséquent, le nombre de points de $\mathcal{E}$ est égal à 9.
(b) Par deux points distincts quelconques de $\mathcal{E}$, on peut tracer exactement une droite affine. Deux points distincts de $\mathcal{E}$ peuvent être choisis de $(9 \cdot 8)/2$ façons différentes. Ceci donne 36 droites affines. Dans ce calcul, toute droite affine de $\mathcal{E}$ apparaît exactement 3 fois, car toute droite affine de $\mathcal{E}$ est formée de 3 points (donc, elle contient trois paires de points distincts). Par conséquent, le nombre de droites affines de $\mathcal{E}$ est égal à 12.
(c) Par un point quelconque $Q \in \mathcal{E}$ différent de P, on peut tracer exactement une droite affine qui passe par P. Un tel point Q peut être choisi de 8 façons différentes. Ceci donne 8 droites. Dans ce calcul, toute droite affine passant par P apparaît exactement deux fois, car toute droite affine passant par P contient deux points différents de P. Donc, dans $\mathcal{E}$, il y a exactement 4 droites affines qui passent par P.
(d) Deux droites affines distinctes dans $\mathcal{E}$ qui ont la direction D sont disjointes. Par tout point de $\mathcal{E}$, on peut tracer une unique droite affine de direction D, et toute droite affine de $\mathcal{E}$ contient 3 points. Donc, dans $\mathcal{E}$, le nombre de droites affines de direction D est égal à $9/3$, c'est-à-dire, à 3.

Exercice 2

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Dans $\mathcal{E}$, on considère trois hyperplans parallèles et deux à deux distincts $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$, ainsi que deux droites distinctes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dont aucune n'est contenue dans un hyperplan parallèle à $\mathcal{H}$.

(a) Pour chaque indice $i = 1, 2$, justifier le fait que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}_i$ (respectivement, $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{D}_i$, $\mathcal{H}''$ et $\mathcal{D}_i$) se coupent en exactement un point. Pour chaque indice $i = 1, 2$, notons A_i (respectivement, A_i', A_i'') le point d'intersection de $\mathcal{H}$ (respectivement, $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$) et $\mathcal{D}_i$.

(b) Justifier le fait que les expressions $\frac{\overrightarrow{A_1A_1''}}{\overrightarrow{A_1A_1'}}$ et $\frac{\overrightarrow{A_2A_2''}}{\overrightarrow{A_2A_2'}}$ ont un sens et montrer que

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_1''}}{\overrightarrow{A_1A_1'}} = \frac{\overrightarrow{A_2A_2''}}{\overrightarrow{A_2A_2'}}.$$

(c) Soit B un point de la droite $\mathcal{D}_1$. Supposons que

$$\frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{A_1A_1'}} = \frac{\overrightarrow{A_2A_2''}}{\overrightarrow{A_2A_2'}}.$$

Montrer que B coïncide avec A_1''.

(d) Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux droites sécantes contenues dans $\mathcal{E}$. Notons A leur point d'intersection et supposons que, pour tout indice $i = 1, 2$, les hyperplans $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ coupent la droite $\mathcal{L}_i$ en deux points (notons les C_i' et C_i'', respectivement) différents de A. Justifier le fait que les expressions $\frac{\overrightarrow{AC_1''}}{\overrightarrow{AC_1'}}$, $\frac{\overrightarrow{AC_2''}}{\overrightarrow{AC_2'}}$ et $\frac{\overrightarrow{C_1''C_2''}}{\overrightarrow{C_1'C_2'}}$ ont un sens. Montrer que

$$\frac{\overrightarrow{AC_1''}}{\overrightarrow{AC_1'}} = \frac{\overrightarrow{AC_2''}}{\overrightarrow{AC_2'}} = \frac{\overrightarrow{C_1''C_2''}}{\overrightarrow{C_1'C_2'}}.$$

Solution.

(a) Soit $i = 1$ ou $i = 2$. Notons D_i la direction de la droite $\mathcal{D}_i$, et notons H la direction de l'hyperplan $\mathcal{H}$. Puisque $D_i \not\subset H$, on a $D_i \cap H = \{0\}$. De plus, $\dim D_i = 1$ et $\dim H = n - 1$, où n est la dimension de la direction E de $\mathcal{E}$. Donc, $E = H \oplus D_i$. Par conséquent, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}_i$ se coupent en exactement un point. De façon complètement similaire, on montre que $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{D}_i$ (respectivement, $\mathcal{H}''$ et $\mathcal{D}_i$) se coupent en exactement un point.

(b) Les points A_1, A_1' et A_1'' sont alignés et deux à deux distincts (en particulier, le vecteur $\overrightarrow{A_1A_1'}$ est non nul). Donc, l'expression $\frac{\overrightarrow{A_1A_1''}}{\overrightarrow{A_1A_1'}}$ a un sens. De façon similaire, on montre que l'expression $\frac{\overrightarrow{A_2A_2''}}{\overrightarrow{A_2A_2'}}$ a un sens.

Considérons la projection π de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{D}_2$ parallèlement à H. On a $\pi(A_1) = A_2$, $\pi(A_1') = A_2'$ et $\pi(A_1'') = A_2''$. Donc, $\overrightarrow{A_2A_2''} = \overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{A_1A_1''})$ et $\overrightarrow{A_2A_2'} = \overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{A_1A_1'})$, où $\overrightarrow{\pi}$ est la partie linéaire de la projection affine π. Si on pose $\lambda = \frac{\overrightarrow{A_1A_1''}}{\overrightarrow{A_1A_1'}}$, on a $\overrightarrow{A_1A_1''} = \lambda\overrightarrow{A_1A_1'}$, d'où $\overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{A_1A_1''}) = \lambda\overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{A_1A_1'})$, c'est-à-dire, $\overrightarrow{A_2A_2''} = \lambda\overrightarrow{A_2A_2'}$. Par conséquent, $\lambda = \frac{\overrightarrow{A_2A_2''}}{\overrightarrow{A_2A_2'}}$, d'où

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_1''}}{\overrightarrow{A_1A_1'}} = \frac{\overrightarrow{A_2A_2''}}{\overrightarrow{A_2A_2'}}.$$

(c) D'après (b), on a $\frac{\overrightarrow{A_1A_1''}}{\overrightarrow{A_1A_1'}} = \lambda = \frac{\overrightarrow{A_2A_2''}}{\overrightarrow{A_2A_2'}}$. Donc, $\frac{\overrightarrow{A_1B}}{\overrightarrow{A_1A_1'}} = \lambda$, d'où $\overrightarrow{A_1B} = \lambda\overrightarrow{A_1A_1'}$. De plus, $\overrightarrow{A_1A_1''} = \lambda\overrightarrow{A_1A_1'}$. Donc, $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{A_1A_1''}$, d'où B coïncide avec A_1''.

(d) Les points A, C_1' et C_1'' sont alignés et deux à deux distincts (en particulier, le vecteur $\overrightarrow{AC_1'}$ est non nul). Donc, l'expression $\frac{\overrightarrow{AC_1''}}{\overrightarrow{AC_1'}}$ a un sens. De façon similaire, on montre que l'expression $\frac{\overrightarrow{AC_2''}}{\overrightarrow{AC_2'}}$ a un sens.

On note $\mathcal{P}$ le plan affine qui contient les droites $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$. Le plan $\mathcal{P}$ n'est pas contenu dans $\mathcal{H}_1$ ou $\mathcal{H}_2$. Donc, $\mathcal{P}\cap\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{P}\cap\mathcal{H}_2$ sont des droites affines parallèles (leur direction commune est $H\cap P$, où P est la direction de $\mathcal{P}$). Donc, les vecteurs $\overrightarrow{C_1'C_2'}$ et $\overrightarrow{C_1''C_2''}$ sont colinéaires. De plus, le vecteur $\overrightarrow{C_1'C_2'}$ est non nul. Par conséquent, l'expression $\frac{\overrightarrow{C_1''C_2''}}{\overrightarrow{C_1'C_2'}}$ a un sens.

En utilisant, dans le plan $\mathcal{P}$, un corollaire du théorème de Thalès (Corollaire 11 du cours), on obtient

$$\frac{\overrightarrow{AC_1''}}{\overrightarrow{AC_1'}} = \frac{\overrightarrow{AC_2''}}{\overrightarrow{AC_2'}} = \frac{\overrightarrow{C_1''C_2''}}{\overrightarrow{C_1'C_2'}}.$$

Exercice 3

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine réel de direction E, et soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une transformation affine telle que sa partie linéaire $\overrightarrow{\varphi} : E \to E$ soit une symétrie vectorielle (c'est-à-dire, il existe une décomposition $E = F \oplus F'$ de E en somme directe de deux sous-espaces vectoriels F et F' vérifiant la propriété suivante : pour tous vecteurs $u \in F$ et $u' \in F'$, on a $\overrightarrow{\varphi}(u+u') = u - u'$).

(a) Montrer que F coïncide avec le noyau $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - \overrightarrow{\varphi})$ de l'endomorphisme $\mathrm{Id}_E - \overrightarrow{\varphi}$ (où $\mathrm{Id}_E : E \to E$ est l'identité) et que F' coïncide avec l'image $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - \overrightarrow{\varphi})$ de $\mathrm{Id}_E - \overrightarrow{\varphi}$.

(b) Montrer que φ s'écrit de façon unique comme composée d'une symétrie affine $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ et d'une translation de vecteur $v \in F$.

Solution.

(a) Soit $u \in F$. Alors, $(\mathrm{Id}_E - \overrightarrow{\varphi})(u) = u - u = 0$, donc, $F \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - \overrightarrow{\varphi})$.

Considérons un vecteur $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - \overrightarrow{\varphi})$. On a $\overrightarrow{\varphi}(x) = x$. Représentons x sous la forme $u_1 + u_1'$, où $u_1 \in F$ et $u_1' \in F'$. On a $\overrightarrow{\varphi}(x) = u_1 - u_1'$, d'où $2u_1' = 0$. Donc, $u_1' = 0$ et $x \in F$. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - \overrightarrow{\varphi}) \subset F$. Nous avons montré que F coïncide avec $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - \overrightarrow{\varphi})$.

Soit $u' \in F'$. Alors, $u' = u'/2 - \overrightarrow{\varphi}(u'/2)$, d'où $u' \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - \overrightarrow{\varphi})$. Donc, $F' \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - \overrightarrow{\varphi})$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - \overrightarrow{\varphi})$, c'est-à-dire, il existe un vecteur $z \in E$ tel que $y = z - \overrightarrow{\varphi}(z)$. Représentons z sous la forme $u_2 + u_2'$, où $u_2 \in F$ et $u_2' \in F'$. On a $y = z - \overrightarrow{\varphi}(z) = (u_2 + u_2') - (u_2 - u_2') = 2u_2'$. Donc, $y \in F'$. Par conséquent, $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - \overrightarrow{\varphi}) \subset F'$. Nous avons montré que F' coïncide avec $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - \overrightarrow{\varphi})$.

(b) Soit $O \in \mathcal{E}$ un point. Considérons le vectorialisé $\mathcal{E}_O \simeq E$ de $\mathcal{E}$ en O (toutes les applications de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$ sont, maintenant, considérées comme applications de $\mathcal{E}_O$ vers $\mathcal{E}_O$). On pose $O' = \varphi(O)$ et $a = \overrightarrow{OO'}$. L'application $t_{-a} \circ \varphi : \mathcal{E}_O \to \mathcal{E}_O$ coïncide avec $\overrightarrow{\varphi}$ (pour tout vecteur $w \in E$, on note t_w la translation de vecteur w).

Puisque $E = F \oplus F'$, il existe un unique couple (v, v') de vecteurs $v \in F$ et $v' \in F'$ tel que $a = v + v'$. D'après (a), on a $F' = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - \overrightarrow{\varphi})$, donc, il existe un vecteur $p \in E$ tel que $p - \overrightarrow{\varphi}(p) = v'$. On a

$$(t_{-v} \circ \varphi)(p) = (t_{-v} \circ t_a \circ \overrightarrow{\varphi})(p) = t_{a-v}(p - v') = p - v' + a - v = p.$$

L'application $\psi = t_{-v} \circ \varphi$ admet, donc, un point fixe. Puisque la partie linéaire de ψ est $\overrightarrow{\varphi}$, on conclut que ψ est une symétrie affine. Par conséquent, φ s'écrit comme composée de la symétrie affine ψ et de la translation de vecteur v (et $v \in F$).

Pour montrer l'unicité, supposons que φ s'écrit comme composée d'une symétrie affine $\widetilde{\psi}$ et d'une translation de vecteur $\widetilde{v} \in F$. Soit $q \in \mathcal{E}_O$ un point fixe de $\widetilde{\psi}$. On pose $\widetilde{v}' = q - \overrightarrow{\varphi}(q)$. Alors,

$$q = \widetilde{\psi}(q) = (t_{-\widetilde{v}} \circ \varphi)(q) = (t_{-\widetilde{v}} \circ t_a \circ \overrightarrow{\varphi})(q) = t_{a-\widetilde{v}}(q - \widetilde{v}') = q - \widetilde{v}' + a - \widetilde{v}.$$

Donc, $a = \widetilde{v} + \widetilde{v}'$, où $\widetilde{v} \in F$ et $\widetilde{v}' \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - \overrightarrow{\varphi}) = F'$. Par conséquent, $\widetilde{v} = v$ et $\widetilde{\psi} = \psi$.

Exercice 4

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On identifie $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$.

(a) Quelles sont les homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ qui préservent ∞ ?
(b) Quelles sont les homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ qui préservent 0 et ∞ ?
(c) Montrer que le sous-groupe de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ formé des homographies qui préservent deux points distincts A et B de $\mathbb{P}_1(K)$ est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{K}^\times$.

Solution.

(a) D'après la proposition 18 du cours, les homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ qui préservent ∞ sont les prolongements de transformations affines de $\mathbb{K}$. Toute transformation affine $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est de la forme $\varphi : x \mapsto ax + b$ (où $a, b \in \mathbb{K}$ et $a \neq 0$), et φ admet un unique prolongement $\mathbb{P}(\widehat{\varphi}) : \mathbb{K} \cup \{\infty\} \to \mathbb{K} \cup \{\infty\}$; ce prolongement est une homographie qui vérifie $\mathbb{P}(\widehat{\varphi})(\infty) = \infty$.
(b) Les homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ qui préservent 0 et ∞ sont les prolongements de transformations affines $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\varphi(x) = ax + b$ (où $a, b \in \mathbb{K}$ et $a \neq 0$), telles que $\varphi(0) = 0$, c'est-à-dire, telles que $b = 0$.
(c) Choisissons des coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ de telle façon que A ait les coordonnées $(0 : 1)$ et B ait les coordonnées $(1 : 0)$. Ces coordonnées homogènes fournissent une nouvelle identification de $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ pour laquelle A devient 0 et B devient ∞. D'après la proposition 18 du cours, le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ est identifié avec le groupe $G\mathbb{P}(\mathbb{K}^2)$ des homographies de $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$. A tout élément $a \in \mathbb{K}^\times$, on peut associer l'homographie $\mathbb{P}(\widehat{\varphi}) : \mathbb{K} \cup \{\infty\} \to \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ qui est le prolongement de la transformation affine $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\varphi(x) = ax$. On obtient une application de $\mathbb{K}^\times$ vers $G\mathbb{P}(\mathbb{K}^2)$. Il s'agit d'un morphisme injectif de groupes dont l'image coïncide avec le sous-groupe formé des homographies qui préservent 0 et ∞. Donc, ce sous-groupe est isomorphe à $\mathbb{K}^\times$.

Exercice 5

Soient d et d' deux droites distinctes d'un plan projectif. On note O le point d'intersection de d et d'. Soient A, B, C (respectivement, A', B', C') trois points deux à deux distincts situés sur d (respectivement, d') tels que les points A, B, C, A', B', C' soient tous distincts de O. Notons

- P le point d'intersection des droites (AB') et $(A'B)$,
- Q le point d'intersection des droites (BC') et $(B'C)$,
- R le point d'intersection des droites (CA') et $(C'A)$.
- M le point d'intersection des droites (BC') et $(A'C)$,
- N le point d'intersection des droites (AC') et $(A'B)$.

(a) Justifier les faits suivants : le point C n'appartient ni à la droite (BC'), ni à la droite d' ; le point A n'appartient ni à la droite $(A'B)$, ni à la droite d'.

(b) Considérons la perspective projective de centre C de (BC') sur d' (c'est-à-dire, la restriction sur (BC') de la projection de centre C sur d'). Considérons également la perspective projective de centre A de d' sur $(A'B)$. On note $\Phi : (BC') \to d' \to (A'B)$ la composée des perspectives projectives considérées. Déterminer $\Phi(B)$, $\Phi(M)$, $\Phi(C')$ et $\Phi(Q)$.

(c) Justifier le fait suivant : le point R n'appartient ni à la droite (BC'), ni à la droite $(A'B)$.

(d) Considérons la perspective projective Ψ de centre R de (BC') sur $(A'B)$. Déterminer $\Psi(B)$, $\Psi(M)$ et $\Psi(C')$.

(e) Montrer que les points P, Q et R sont alignés.

Solution.

(a) Les droites d et (BC') sont distinctes (car $C' \neq O$) et se coupent en B. Puisque $C \in d$ et $C \neq B$, on obtient que C n'appartient pas à la droite (BC'). Puisque $C \in d$ et $C \neq O$, on obtient que C n'appartient pas à la droite d'.

De façon similaire, les droites d et $(A'B)$ sont distinctes (car $A' \neq O$) et se coupent en B. Puisque $A \in d$ et $A \neq B$, on obtient que A n'appartient pas à la droite $(A'B)$. Puisque $A \in d$ et $A \neq O$, on obtient que A n'appartient pas à la droite d'.

(b) Notons Φ_1 la perspective projective de centre C de (BC') sur d', et notons Φ_2 la perspective projective de centre A de d' sur $(A'B)$. On a $\Phi = \Phi_2 \circ \Phi_1$. De plus,

$$\Phi_1(B) = O,\ \Phi_1(M) = A',\ \Phi_1(C') = C',\ \Phi_1(Q) = B',$$

et

$$\Phi_2(O) = B,\ \Phi_2(A') = A',\ \Phi_2(C') = N,\ \Phi_2(B') = P.$$

Donc,

$$\Phi(B) = B,\ \Phi(M) = A',\ \Phi(C') = N,\ \Phi(Q) = P.$$

(c) Les droites (AC') et (BC') sont distinctes (car $A \neq B$) et $R \neq C'$ (car les droites d' et $(A'C)$ sont distinctes). Donc, le point R n'appartient pas à la droite (BC').

De façon similaire, les droites $(A'B)$ et $(A'C)$ sont distinctes (car $B \neq C$) et $R \neq A'$ (car les droites d' et (AC') sont distinctes). Donc, le point R n'appartient pas à la droite $(A'B)$.

(d) On a

$$\Psi(B) = B, \Psi(M) = A', \Psi(C') = N.$$

(e) Les points B, M, C' forment un repère projectif de la droite (BC'). Puisque $\Phi(B) = \Psi(B)$, $\Phi(M) = \Psi(M)$ et $\Phi(C') = \Psi(C')$, les homographies Φ et Ψ coïncident. Donc, $\Psi(Q) = \Phi(Q) = P$. Par conséquent, les points P, Q et R sont alignés.