Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques*, M1
Année 2020 - 2021
Cours MU4MA001

GÉOMÉTRIE AFFINE ET PROJECTIVE

Corrigé du deuxième contrôle continu

Exercice 1

Soit $\mathbb{K}$ un corps, et soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimension finie et strictement positive.

(a) Soit $f : E \to F$ une application linéaire non identiquement nulle. Peut-on affirmer que l'application $\mathbb{P}(f)$ est injective ?

(b) On suppose maintenant que f est injective. Quel est le domaine de définition de l'application $\mathbb{P}(f)$?

(c) Soit $g : E \to F$ une application linéaire non identiquement nulle. On suppose que l'image de l'application $\mathbb{P}(g)$ coïncide avec $\mathbb{P}(F)$. Peut-on affirmer que l'application g est surjective ?

Solution

(a) Non. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la projection sur la deuxième coordonnée, le noyau $\ker(f)$ de f coïncide avec la droite $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ et correspond au point $\infty = (1 : 0) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$; l'application $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{\infty\} \to \mathbb{P}^0(\mathbb{R})$ est constante et n'est pas injective.

(b) Puisque f est injective, on a $\ker(f) = \{0\}$. Donc, l'application $\mathbb{P}(f)$ est définie sur l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ tout entier.

(c) Oui. Soit $v \in F$ un vecteur. Puisque l'image de l'application $\mathbb{P}(g)$ coïncide avec $\mathbb{P}(F)$, la droite $D \subset F$ engendrée par v correspond à un point $\mathbf{d} \in \mathbb{P}(F)$ appartenant à l'image de $\mathbb{P}(g)$. Donc, il existe une droite vectorielle $D' \subset E$ qui est envoyée par g sur D (de façon surjective). Par conséquent, v appartient à l'image de g.

Exercice 2

Soit $\mathbb{K}$ un corps, et soit $\mathbb{P}(E)$ un espace projectif de dimension n sur $\mathbb{K}$ (ici n est un entier strictement positif et E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$). Soient A_0, ..., A_{n+1} des points de $\mathbb{P}(E)$. Montrer que $(A_0, \dots, A_{n+1})$ est un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$ si et seulement si, pour tous entiers i, j tels que $0 \le i < j \le n+1$, aucun des points A_i, A_j n'appartient au sous-espace projectif engendré par les points A_k, $k \neq i, j$.

Solution

Supposons que $(A_0, \dots, A_{n+1})$ est un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$. Soient i, j deux entiers tels que $0 \le i < j \le n+1$. Les $n+1$ points A_k, $k \neq i$, sont projectivement indépendants, donc, le point A_j n'appartient pas au sous-espace projectif engendré par les points A_k, $k \neq i, j$. De façon similaire, le point A_i n'appartient pas au sous-espace projectif engendré par les points A_k, $k \neq i, j$.

Supposons maintenant que, pour tous entiers i, j tels que $0 \leq i < j \leq n+1$, aucun des points A_i, A_j n'appartient au sous-espace projectif engendré par les points A_k, $k \neq i, j$. Soit m un entier tel que $0 \leq m \leq n+1$. On veut montrer que les $n+1$ points A_k, $k \neq m$, sont projectivement indépendants. Notons ces points $B_0, \ldots, B_n$. On peut construire la suite $\mathbf{P}_0$, $\ldots$, $\mathbf{P}_n$ de sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(E)$ tels que, pour tout entier $0 \leq r \leq n$, le sous-espace projectif $\mathbf{P}_r$ soit engendré par les points $B_0, \ldots, B_r$. Si les points $B_0, \ldots, B_n$ ne sont pas projectivement indépendants, la dimension de $\mathbf{P}_n$ est strictement plus petite que n. Donc, il existe un entier $0 \leq r \leq n-1$ tel que $\dim \mathbf{P}_r = \dim \mathbf{P}_{r+1}$, c'est-à-dire, le point B_{r+1} (qui est un certain point A_s, $s \neq m$) appartient au sous-espace projectif engendré par les points $B_0, \ldots, B_r$. Par conséquent, les points A_m et A_s ne vérifient pas la condition imposée. Cette contradiction montre que les $n+1$ points A_k, $k \neq m$, sont projectivement indépendants. Puisque nous avons cette affirmation pour tout entier $0 \leq m \leq n+1$, on obtient que $(A_0, \ldots, A_{n+1})$ est un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$.

Exercice 3

Formuler l'énoncé dual de celui de la version projective du théorème de Pappus.

Solution

Voici l'énoncé dual : soient D et D' deux points distincts d'un plan projectif, et soient a, b, c (respectivement, a', b', c') trois droites distinctes contenant le point D (respectivement, le point D') tels que les droites a, b, c, a', b', c' soient toutes distinctes de la droite (DD') ; notons

- p la droite contenant les points $a \cap b'$ et $a' \cap b$,
- q la droite contenant les points $b \cap c'$ et $b' \cap c$,
- r la droite contenant les points $c \cap a'$ et $c' \cap a$;

alors, les droites p, q et r sont concourantes.

Exercice 4

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2, et soit $\mathbf{P} = \mathbb{P}(E)$ un plan projectif sur $\mathbb{K}$ (où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension 3).

(1) Soit $\mathbf{D}$ une droite projective de $\mathbf{P}$, et soit $\mathbf{O}$ un point appartenant à $\mathbf{P} \backslash \mathbf{D}$. Si $M \in \mathbf{P}$ est un point tel que $M \notin \mathbf{D} \cup \{\mathbf{O}\}$, soit A_M l'unique point de l'intersection $\mathbf{D} \cap (\mathbf{O}M)$, et soit S_M le *conjugué harmonique* de M par rapport à A_M et $\mathbf{O}$ (sur la droite projective $(\mathbf{O}M)$), c'est-à-dire, le point $S_M \in (\mathbf{O}M)$ tel que $[A_M, \mathbf{O}, M, S_M] = -1$.

(a) On définit $s_{\mathbf{D},\mathbf{O}} : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ par $s_{\mathbf{D},\mathbf{O}}(M) = S_M$ si $M \notin \mathbf{D} \cup \{\mathbf{O}\}$ et $s_{\mathbf{D},\mathbf{O}}(M) = M$ sinon. Vérifier que $s_{\mathbf{D},\mathbf{O}}$ est une involution, c'est-à-dire, $s_{\mathbf{D},\mathbf{O}} \circ s_{\mathbf{D},\mathbf{O}} = \mathrm{id}_{\mathbf{P}}$.

(b) Justifier l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathbf{O}$ ait pour coordonnées homogènes $(0:0:1)$ et $\mathbf{D} = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbf{P} \mid x_2 = 0\}$.
Fixons une telle base $\mathcal{B}$. Soit $M \notin \mathbf{D} \cup \{\mathbf{O}\}$ un point de coordonnées homogènes $(x_0 : x_1 : x_2)$ dans $\mathbf{P}$.

(i) Déterminer les coordonnées homogènes de A_M.

(ii) Justifier l'existence d'une homographie $\varphi : \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to (\mathbf{O}M)$ telle que

$$\varphi((1:0)) = A_M, \quad \varphi((0:1)) = \mathbf{O}, \quad \varphi((1:1)) = M.$$

(iii) Pour tout point $(a:b) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, déterminer son image par φ.

(iv) Déterminer les coordonnées homogènes de S_M.

(c) En déduire que $s_{\mathbf{D},\mathbf{O}}$ est une homographie.

(d) On se place dans le plan affine $U = \mathbf{P} \backslash \mathbf{D}$. Décrire la restriction de $s_{\mathbf{D},\mathbf{O}}$ à U.

(e) Soit $\mathbf{D}_1 \subset \mathbf{P}$ une droite passant par $\mathbf{O}$, et soit V le plan affine $\mathbf{P} \backslash \mathbf{D}_1$. Décrire la restriction de $s_{\mathbf{D},\mathbf{O}}$ à V.

(2) Soit $\phi : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ une homographie, différente de l'identité, telle que $\phi \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathbf{P}}$.
  (a) Montrer qu'il existe une droite $\mathbf{D'} \subset \mathbf{P}$ telle que $\phi(\mathbf{D'}) \neq \mathbf{D'}$.
  (b) Soit A l'unique point de l'intersection $\mathbf{D'} \cap \phi(\mathbf{D'})$. Montrer que $\phi(A) = A$.
  (c) On fixe deux points distincts M et N sur $\mathbf{D'} \setminus \phi(\mathbf{D'})$. Montrer que $(M, N, \phi(M), \phi(N))$ est un repère projectif de $\mathbf{P}$.
  Notons O l'unique point d'intersection des droites $(M\phi(M))$ et $(N\phi(N))$, et notons B l'unique point d'intersection des droites $(M\phi(N))$ et $(N\phi(M))$. On pose $D = (AB)$.
  (d) Montrer que $\phi(M) = s_{D,O}(M)$ et $\phi(N) = s_{D,O}(N)$.
  (e) Montrer que $\phi = s_{D,O}$.

Solution

(1)(a) Si $M \in \mathbf{D} \cup \{\mathbf{O}\}$, alors $s_{\mathbf{D},\mathbf{O}}(M) = M$ et $(s_{\mathbf{D},\mathbf{O}} \circ s_{\mathbf{D},\mathbf{O}})(M) = M$. Si $M \notin \mathbf{D} \cup \{\mathbf{O}\}$, alors $s_{\mathbf{D},\mathbf{O}}(M) \notin \mathbf{D} \cup \{\mathbf{O}\}$ et le point $(s_{\mathbf{D},\mathbf{O}} \circ s_{\mathbf{D},\mathbf{O}})(M)$ vérifie $[A_M, \mathbf{O}, S_M, (s_{\mathbf{D},\mathbf{O}} \circ s_{\mathbf{D},\mathbf{O}})(M)] = -1$. On a

$$[A_M, \mathbf{O}, S_M, M] = \frac{1}{[A_M, \mathbf{O}, M, S_M]} = -1.$$

Donc, le point $(s_{\mathbf{D},\mathbf{O}} \circ s_{\mathbf{D},\mathbf{O}})(M)$ coïncide avec M.

(1)(b) Choisissons deux points distincts T_0 et T_1 de la droite $\mathbf{D}$. Soient e'_0 et e'_1 des vecteurs non nuls de E qui engendrent les droites vectorielles représentées par les points T_0 et T_1, respectivement. Soit $e'_2 \in E$ un vecteur non nul qui engendre la droite vectorielle représentée par $\mathbf{O}$. Puisque le point $\mathbf{O}$ n'appartient pas à la droite $\mathbf{D}$, les vecteurs e'_0, e'_1, e'_2 forment une base $\mathcal{B}$ de E. Cette base fournit des coordonées homogènes de $\mathbf{P}$. Dans ces coordonnées homogènes, on a $\mathbf{O} = (0 : 0 : 1)$ et $\mathbf{D} = \{(X_0 : X_1 : X_2) \in \mathbf{P} \mid X_2 = 0\}$.

(1)(b)(i) La droite $(\mathbf{O}M)$ a pour équation

$$x_1 X_0 - x_0 X_1 = 0.$$

Le point $A_M = (\mathbf{O}M) \cap \mathbf{D}$ a, donc, les coordonnées homogènes $(x_0 : x_1 : 0)$.

(1)(b)(ii) Les points A_M, $\mathbf{O}$ et M forment un repère projectif de la droite $(\mathbf{O}M)$. Donc, il existe une (unique) homographie $\psi : (\mathbf{O}M) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ telle que $\psi(A_M) = (1 : 0)$, $\psi(\mathbf{O}) = (0 : 1)$ et $\psi(M) = (1 : 1)$. On peut poser $\varphi = \psi^{-1}$.

(1)(b)(iii) Soit (e_0, e_1) la base canonique de $\mathbb{K}^2$, et soit $f : \mathbb{K}^2 \to E$ une application linéaire telle que $\mathbb{P}(f)$ coïncide avec $\iota \circ \varphi$, où $\iota : (\mathbf{O}M) \hookrightarrow \mathbf{P}$ est l'inclusion. En utilisant les coordonnées cartésiennes de E fournies par la base $\mathcal{B} = (e'_0, e'_1, e'_2)$, on obtient

$$f(e_0) = (\alpha x_0, \alpha x_1, 0), \quad f(e_1) = (0, 0, \beta), \quad f(e_0 + e_1) = (\gamma x_0, \gamma x_1, \gamma x_2),$$

où α, β et γ sont des éléments non nuls de $\mathbb{K}$. Puisqu'au moins une des coordonnées homogènes x_0 et x_1 de M est non nulle (M est différent de $\mathbf{O}$), on a $\alpha = \gamma$ et $\beta = \alpha x_2$. Donc,

$$f(ae_0 + be_1) = (a\alpha x_0, a\alpha x_1, b\alpha x_2).$$

Par conséquent, $\varphi(a : b) = (ax_0 : ax_1 : bx_2)$.

(1)(b)(iv) Soit S le point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ tel que $[(1 : 0), (0 : 1), (1 : 1), S] = -1$. Alors, S a $(1 : -1)$ pour coordonnées homogènes et $\varphi(S) = S_M$. Donc, S_M a $(x_0 : x_1 : -x_2)$ pour coordonnées homogènes.

(1)(c) Considérons l'application $g : E \to E$ définie (dans la base $\mathcal{B}$) par

$$g(X_0, X_1, X_2) = (X_0, X_1, -X_2).$$

Vérifions que $\mathbb{P}(g)$ coïncide avec $s_{\mathbf{D},\mathbf{O}}$. Tous les points de $\mathbf{D} \cup \{\mathbf{O}\}$ sont des points fixes de $\mathbb{P}(g)$ et de $s_{\mathbf{D},\mathbf{O}}$. D'après le calcul fait dans (1)(b)(iv), pour tout point $M = (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbf{P} \setminus (\mathbf{D} \cup \{\mathbf{O}\})$, on a $\mathbb{P}(g)(M) = (x_0 : x_1 : -x_2) = s_{\mathbf{D},\mathbf{O}}(M)$. Par conséquent, $\mathbb{P}(g) = s_{\mathbf{D},\mathbf{O}}$ et $s_{\mathbf{D},\mathbf{O}}$ est une homographie.

(1)(d) Le plan affine U a $y_0 = X_0/X_2$ et $y_1 = X_1/X_2$ pour coordonnées cartésiennes. Dans ces coordonnées, la restriction de $s_{\mathbf{D},\mathbf{O}}$ à U s'écrit sous la forme

$$(y_0, y_1) \mapsto (-y_0, -y_1).$$

Donc, la restriction de $s_{\mathbf{D},\mathbf{O}}$ à U est la symétrie centrale de centre $\mathbf{O}$.

(1)(e) Si nécessaire, on peut modifier notre choix de coordonnées homogènes dans $\mathbf{P}$ de telle façon que la droite $\mathbf{D}_1$ devient $\{(X_0 : X_1 : X_2) \in \mathbf{P} \mid X_0 = 0\}$. Dans ce cas, le plan affine $V = \mathbf{P}\backslash\mathbf{D}_1$ a $y_1 = X_1/X_0$ et $y_2 = X_2/X_0$ pour coordonnées cartésiennes. Dans ces coordonnées, la restriction de $s_{\mathbf{D},\mathbf{O}}$ à V s'écrit sous la forme

$$(y_1, y_2) \mapsto (y_1, -y_2).$$

Donc, la restriction de $s_{\mathbf{D},\mathbf{O}}$ à V est une symétrie axiale (plus précisément, la symétrie affine par rapport à la droite $\mathbf{D} \cap V$ parallèlement à la direction de droites affines déterminée par le point $\mathbf{O} \in \mathbb{P}(\widehat{V}) = \mathbf{P}$.

(2)(a) Puisque ϕ est différente de l'identité, il existe un point $C \in \mathbf{P}$ tel que $\phi(C) \neq C$. Considérons deux droites distinctes $\mathbf{D}', \mathbf{D}'' \subset \mathbf{P}$ contenant C. Si $\psi(\mathbf{D}') = \mathbf{D}'$ et $\psi(\mathbf{D}'') = \mathbf{D}''$, on a $\phi(\mathbf{D}' \cap \mathbf{D}'') \subset \phi(\mathbf{D}') \cap \phi(\mathbf{D}'') = \mathbf{D}' \cap \mathbf{D}''$. Donc, $\phi(C) = C$. Contradiction.

(2)(b) Puisque ϕ est une involution, on a $(\phi \circ \phi)(\mathbf{D}') = \mathbf{D}'$. Donc,

$$\phi(A) = \phi(\mathbf{D}' \cap \phi(\mathbf{D}')) = \phi(\mathbf{D}') \cap (\phi \circ \phi)(\mathbf{D}') = \phi(\mathbf{D}') \cap \mathbf{D}' = A.$$

(2)(c) Si on choisit trois points parmi les points M, N, $\phi(M)$, $\phi(N)$ et on considère le sous-espace projectif engendré par les trois points choisis, ce sous-espace contient soit la droite $\mathbf{D}'$, soit la droite $\phi(\mathbf{D}')$. Donc, ce sous-espace coïncide avec $\mathbf{P}$, car chacune des droites $\mathbf{D}'$ et $\phi(\mathbf{D}')$ contient seulement deux points parmi les points M, N, $\phi(M)$, $\phi(N)$.

(2)(d) Puisque les points M, N, $\phi(M)$, $\phi(N)$ forment un repère projectif de $\mathbf{P}$, les quatre droites $\mathbf{D}'$, $\phi(\mathbf{D}')$ (AO) et D, appartenant au faisceau de droites de centre A, sont deux à deux distinctes. D'après, le théorème du quadrilatère, on a

$$[\mathbf{D}', \phi(\mathbf{D}'), (AO), D] = -1,$$

ce qui implique que $\phi(M) = s_{D,O}(M)$ et $\phi(N) = s_{D,O}(N)$.

(2)(e) On a $\phi(M) = s_{D,O}(M)$ et $\phi(N) = s_{D,O}(N)$. De plus, puisque ϕ et $s_{D,O}$ sont des involutions, on a

$$(\phi \circ \phi)(M) = M = (s_{D,O} \circ s_{D,O})(M) = s_{D,O}(\phi(M)),$$
$$(\phi \circ \phi)(N) = N = (s_{D,O} \circ s_{D,O})(N) = s_{D,O}(\phi(N)).$$

Par conséquent, les valeurs des homographies ϕ et $s_{D,O}$ coïncident en tous les points du repère projectif $(M, N, \phi(M), \phi(N))$. Donc, $\phi = s_{D,O}$.