Ch. 2. Homologie des variétés

§1. Variétés topologiques

<u>Déf.</u> Une **variété topologique de dimension n** (où $n \geq 0$ est un entier) est un espace topologique X tel que

- tout point de X possède un voisinage ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}^n$;
- X est séparé;
- X possède une base dénombrable.

<u>Exercice</u>

(a) Trouver un espace topologique qui vérifie la première et la troisième propriétés, mais ne vérifie pas la deuxième propriété.

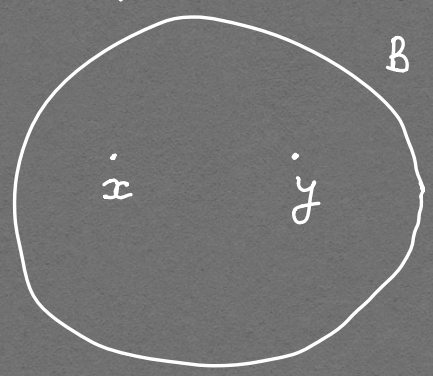
(b) Trouver un espace topologique connexe qui vérifie les deux premières propriétés, mais ne vérifie pas la troisième propriété.

Déf. Une orientation locale de $\mathbb{R}^n$ en $x \in \mathbb{R}^n$ est le choix d'un générateur du groupe $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \simeq \mathbb{Z}$.

Orientations locales cohérentes en $x, y \in \mathbb{R}^n$

On définit cette notion à l'aide des isomorphismes suivants (où B est un disque ouvert):

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$$
$$\wr\wr$$
$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B)$$
$$\wr\wr$$
$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{y\})$$



Orientation de $\mathbb{R}^n$ est un choix cohérent d'orientations locales en tous les points de $\mathbb{R}^n$.

M une variété topologique de dimension n.

Déf. Une orientation locale de M en $x \in M$ est le choix d'un générateur du groupe $H_n(M, M \setminus \{x\})$.

Remarque On a $H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq \mathbb{Z}$. En effet, il existe un voisinage ouvert $U \ni x$ (dit euclidien) t.q. U soit homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. On a

$$H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq H_n(U, U \setminus \{x\}) \simeq \mathbb{Z}.$$

Un bon voisinage $V \ni x$ est un voisinage ouvert vérifiant la propriété suivante : il existe un voisinage ouvert euclidien $U \ni x$ tel que $V \subset U$ correspond à un disque ouvert de rayon fini dans $\mathbb{R}^n$.

Pour deux points $x, y \in V$, on peut comparer leurs orientations locales <u>à l'aide de V</u> car

$$H_n(M, M \setminus \{x\}) \simeq H_n(M, M \setminus V) \simeq H_n(M, M \setminus \{y\}).$$

<u>Déf.</u> On dit qu'une variété topologique M est orientable si on peut choisir des orientations locales $x \mapsto \mu_x$ en tous points $x \in M$ (ici $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\})$ est un générateur) pour que la condition suivante soit vérifiée : tout point $x \in M$ admet un bon voisinage V ($x \in V \subset U$) t.q. les orientations locales de M en tous les points de V soient cohérentes.

<u>Orientation de M</u> (pour une variété orientable M)

<u>Proposition</u> Toute variété topologique M de dimension $n \geq 1$ admet un revêtement double $\tilde{M} \to M$ tel que $\tilde{M}$ soit une variété topologique orientable.

<u>Démonstration</u> On pose

$$\tilde{M} = \{ \mu_x \mid x \in M \text{ et } \mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}) \text{ est un générateur} \}.$$

L'application $p : \tilde{M} \to M$ est définie par $\mu_x \mapsto x$.
Une base de topologie de $\tilde{M}$ est donnée par la collection de sous-ensembles $V(\mu_V) \subset \tilde{M}$, où

- $V \subset M$ est un bon sous-ensemble ouvert (il existe un ouvert $U \subset M$ t.q. $U \simeq \mathbb{R}^n$ et $V \subset U$ correspond à un disque ouvert de rayon fini);
- $\mu_V \in H_n(M, M \setminus V)$ est un générateur;
- $V(\mu_V)$ est formé de $\mu_x \in \tilde{M}$ t.q. $x \in V$ et μ_x soit l'image de μ_V par l'isomorphisme $H_n(M, M \setminus V) \xrightarrow{\simeq} H_n(M, M \setminus \{x\})$.

On vérifie facilement que p est un revêtement.
La variété topologique $\tilde{M}$ est orientable. $\square$

<u>Remarque</u> Si M est simplement connexe, alors M est orientable (dans ce cas, le revêtement double considéré est forcement trivial).

Lacets desorientants.

Unicité du revêtement d'orientation.

Soit G un groupe abélien. On peut considérer un revêtement $p_G : \tilde{M}_G \longrightarrow M$, où

$$\tilde{M}_G = \bigcup_{x \in M} H_n(M, M \setminus \{x\}; G).$$

L'application $p_G : \tilde{M}_G \to M$ est définie par $\mu_x \longmapsto x$.
Une base de topologie de $\tilde{M}_G$ est donnée par la collection de sous-ensembles $V(\mu_V) \subset \tilde{M}_G$, où

- $V \subset M$ est un bon sous-ensemble ouvert;
- $\mu_V \in H_n(M, M \setminus V; G)$;
- $V(\mu_V)$ est formé de $\mu_x \in \tilde{M}_G$ t.q. $x \in V$ et μ_x soit l'image de μ_V par l'isomorphisme $H_n(M, M \setminus V; G) \xrightarrow{\cong} \underset{\substack{\wr\wr \\ G}}{H_n(M, M \setminus \{x\}; G)}$.

Supposons maintenant que G est un anneau commutatif unitaire. Dans ce cas, on a un isomorphisme de G-modules $H_n(M, M \setminus \{x\}; G) \simeq G$.
Une variété topologique M est dite G-orientable s'il existe une section continue $M \longrightarrow \tilde{M}_G$ dont toutes les valeurs sont des générateurs de fibres (en tant que G-modules).

Groupe des sections $\Gamma(A, \tilde{M}_G)$, où $A \subset M$ est un sous-ensemble fermé. Orientabilité le long de A.

<u>Exercice</u> Les conditions suivantes sont équivalentes :

- M est orientable ;
- M est orientable le long de tous les sous-ensembles compacts ;
- les générateurs des fibres du revêtement $\tilde{M}_{\mathbb{Z}} \to M$ forment un revêtement double trivial ;
- $\tilde{M}_{\mathbb{Z}} \simeq M \times \mathbb{Z}$ (isomorphisme de revêtements).

Soit G un groupe abélien, $A \subset M$ un fermé.

On a un morphisme

$$\mathcal{J}_A : H_n(M, M \setminus A; G) \longrightarrow \Gamma_c(A, \tilde{M}_G),$$

où $\Gamma_c(A, \tilde{M}_G) \subset \Gamma(A, \tilde{M}_G)$ est le sous-groupe qui consiste des sections à support compact.

Le morphisme $\mathcal{J}_A$ est défini de la façon suivante :

si $\alpha \in H_n(M, M \setminus A; G)$ et $x \in A$, alors $\mathcal{J}_A(\alpha)(x)$ est l'image de α par le morphisme

$$H_n(M, M \setminus A; G) \longrightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; G)$$

induit par l'inclusion.

On doit vérifier que

- $\mathcal{J}_A(\alpha)$ est à support compact ;
- $\mathcal{J}_A(\alpha)$ est une application continue.

- Soit $c \in C_n(M;G)$ un représentant (d'un représentant) de α. L'image de c (la réunion des images de tous les simplexes singuliers qui apparaissent dans c) est un compact $K \subset M$.
  Si $x \in A \setminus K$, alors $\mathcal{J}_A(\alpha)(x) = 0$.
  En effet, puisque $K \subset M \setminus \{x\}$, l'image de c dans $C_n(M, M\setminus A; G)$ est envoyé en $0 \in C_n(M, M\setminus\{x\}; G)$.

- De plus, $\partial c \in C_{n-1}(M\setminus A; G)$, et l'image de ∂c est un compact $K' \subset M$. Si $x \in A$, on peut choisir un bon voisinage $V \ni x$ tel que $K' \subset M \setminus V$.
  Donc, l'image de c dans $C_n(M, M\setminus V; G)$ définit une classe d'homologie $\beta \in H_n(M, M\setminus V; G)$.
  La section $V \to V \times \{\beta\}$ coïncide avec $\mathcal{J}_A(\alpha)$ sur $V \cap A$.

Théorème M variété topologique de dimension n, $A \subset M$ fermé, G groupe abélien.

Alors,

(1) $H_k(M, M \setminus A; G) = 0$ pour tout $k > n$;

(2) $\mathcal{J}_A : H_n(M, M \setminus A; G) \longrightarrow \Gamma_c(A, \tilde{M}_G)$

est un isomorphisme.

Corollaire Soit M une variété topologique connexe de dimension n, et soit G un groupe abélien. Si la variété M n'est pas compacte, alors $H_n(M; G) = 0$.

Lemme (local-global pour les compacts)

Soit $P_M(A)$ une affirmation à propos de sous-ensembles compacts $A \subset M$ d'une variété topologique M de dimension n. Supposons que

(i) si A est compact et convexe dans un certain ouvert euclidien de M, alors $P_M(A)$ est vraie;

(ii) si $P_M(A)$, $P_M(B)$ et $P_M(A \cap B)$ sont vraies pour certains compacts A et B de M, alors $P_M(A \cup B)$ est aussi vraie;

(iii) si $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ est une suite décroissante de compacts de M tels que toutes les affirmations $P_M(A_i)$ soient vraies, alors $P_M(\bigcap_i A_i)$ est aussi vraie.

Alors, $P_M(A)$ est vraie pour tout compact $A \subset M$.