Université Pierre et Marie Curie
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2015 - 2016

Introduction à la géométrie algébrique

Examen

Vendredi 23 octobre 2015

Durée : 3 heures

Dans tous les exercices ci-dessous, on fixe un corps algébriquement clos $\mathbf{k}$ de caractéristique 0, et on écrit $\mathbb{A}^n$ (respectivement, $\mathbb{P}^n$) au lieu de $\mathbb{A}^n(\mathbf{k})$ (respectivement, $\mathbb{P}^n(\mathbf{k})$) pour tout entier strictement positif n.

Exercice 1 Soit $C \subset \mathbb{A}^2$ la courbe définie par le polynôme $f(x, y) = (x - 1)^3 - y^2$.

(a) La courbe C est-elle non singulière ? Est-elle irréductible ? Est-elle rationnelle ?

(b) Montrer que $(2, 1) \in \mathbb{A}^2$ est un point non singulier de C et donner une équation de la droite tangente à C en $(2, 1)$.

(c) Montrer que tout élément de l'anneau $A(C)$ admet un unique représentant de la forme

$$P(x) + Q(x)y,$$

où P, $Q \in \mathbf{k}[x]$ sont des polynômes.

(d) Considérons l'application $\varphi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{P}^2$ définie par $\varphi(x, y) = (x : y : 1)$. Soit $\overline{C}$ l'adhérence de $\varphi(C)$ dans $\mathbb{P}^2$ (pour la topologie de Zariski). Donner un polynôme homogène $F \in \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$ de degré 3 tel que le lieu des zéros $Z(F) \subset \mathbb{P}^2$ de F coïncide avec $\overline{C}$.

(e) Combien de points singuliers la courbe $\overline{C}$ a-t-elle ?

(f) Trouver un point d'inflexion de la courbe $\overline{C}$.

Exercice 2 (a) Montrer que la formule $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$ définit une application rationnelle de $\mathbb{P}^2$ dans $\mathbb{P}^2$. Notons ψ cette application.

(b) Montrer que ψ est une application birationnelle qui coïncide avec son application rationnelle réciproque.

(c) Parmi les ouverts $V \subset \mathbb{P}^2$ tels que l'application rationnelle ψ soit représentée par (V, ψ_V), où ψ_V est un morphisme régulier, trouver un ouvert U maximal par inclusion.

(d) Trouver deux ouverts $V \subset \mathbb{P}^2$ et $W \subset \mathbb{P}^2$ tels que l'application ψ soit représentée par (V, ψ_V), où ψ_V est un morphisme régulier qui établit un isomorphisme entre V et W.

(e) Soit $Y \subset \mathbb{P}^2$ une courbe irréductible de degré 4 telle que Y ait 3 points singuliers. Montrer que tous les points singuliers de Y sont doubles (c'est-à-dire, d'ordre 2).

(f) Montrer que la courbe Y est rationnelle.

Exercice 3 Soit $F \in \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ un polynôme homogène irréductible de degré 2. Notons X le lieu des zéros $Z(F)$ de F dans $\mathbb{P}^3$.

(a) Trouver une application birationnelle $X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$.

(b) Trouver des ouverts isomorphes $V \subset X$ et $W \subset \mathbb{P}^2$.

TSVP

Exercice 4 (a) Montrer que $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ est (isomorphe à) une variété affine. Décrire l'anneau des fonctions régulières sur $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.

(b) Soit $n \geq 2$ un nombre entier. Décrire l'anneau des fonctions régulières sur $\mathbb{A}^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\}$. En déduire que $\mathbb{A}^n \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\}$ n'est pas une variété affine.

(c) Trouver un recouvrement ouvert de $\mathbb{A}^n \setminus \{0, 0, \ldots, 0\}$ par des variétés affines.

Exercice 5 Soient $n \geq 2$ et $d \geq 1$ des nombres entiers. Une *hypersurface de degré* d dans $\mathbb{P}^n$ est un sous-ensemble $X \subset \mathbb{P}^n$ qui peut être défini par un polynôme homogène $F \in \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_n]$ de degré d.

(a) Montrer que tout ensemble de d points dans $\mathbb{P}^n$ est intersection d'hypersurfaces de degré d.

(b) Montrer que d points alignés dans $\mathbb{P}^n$ ne peuvent pas être décrits comme intersection d'hypersurfaces de degré strictement inférieur à d.

(c) Montrer que tout ensemble de d points dans $\mathbb{P}^n$, non tous alignés, est intersection d'hypersurfaces de degré $d - 1$.