Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques*, M1
Année 2021 - 2022
Cours MU4MA001

GÉOMÉTRIE AFFINE ET PROJECTIVE

Examen

Lundi 3 janvier 2022

Durée : 3 heures

Téléphones portables sont interdits.
L'usage du polycopié du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.

Exercice 1

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine défini sur $\mathbb{R}$. On note E la direction de $\mathcal{E}$. Soient A, B et C trois points non alignés de $\mathcal{E}$.

(a) Montrer qu'il existe une unique application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $\varphi(A) = B$, $\varphi(B) = C$ et $\varphi(C) = A$.
(b) L'application φ est-elle injective ?
(c) Montrer que φ admet un point fixe.
(d) Quelle est la matrice dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de l'application linéaire $\overrightarrow{\varphi} : E \to E$ associée à φ ?

Exercice 2

Soit $n \geq 4$ un entier, et soit E un espace vectoriel de dimension n.

(a) Soient $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$ deux droites projectives distinctes dans $\mathbb{P}(E)$. Montrer que les droites $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$ ont exactement un point commun si et seulement si il existe un plan projectif $\mathbf{P} \subset \mathbb{P}(E)$ tel que $\mathbf{D}_1 \subset \mathbf{P}$ et $\mathbf{D}_2 \subset \mathbf{P}$.
(b) Donner un exemple de deux droites projectives dans $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ qui n'ont pas de point commun.

Exercice 3

Soit K un corps commutatif, et soit E un espace vectoriel sur K de dimension 3. Soit (a, b, c) une base de E. On pose $d = a + b + c$. On munit E de sa structure affine naturelle et on considère le sous-espace affine $\mathcal{P} \subset E$ engendré par a, b et c.

(a) Montrer que $\mathcal{P}$ est un plan et que a, b, c forment un repère affine de $\mathcal{P}$.
(b) Soit A (respectivement, B, C, D) le point de $\mathbb{P}(E)$ tel que ce point correspond à la droite vectorielle engendrée par a (respectivement, b, c, d). Montrer que A, B, C, D forment un repère projectif de $\mathbb{P}(E)$.
(c) Justifier le fait qu'il existe une unique homographie $\phi : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}_2(K)$ telle que

$$\phi(A) = (1 : 0 : 0), \quad \phi(B) = (0 : 1 : 0), \quad \phi(C) = (0 : 0 : 1), \quad \phi(D) = (1 : 1 : 1).$$

On utilise ϕ pour introduire dans $\mathbb{P}(E)$ un système de coordonnées homogènes.

TSVP

(d) Soient α, β, γ des éléments de K tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$. On note m le barycentre du système de points pondérés $\{(a,\alpha),(b,\beta),(c,\gamma)\}$, et on note M le point de $\mathbb{P}(E)$ tel que ce point correspond à la droite vectorielle engendrée par m. Trouver les coordonnées homogènes du point M dans le système de coordonnées homogènes introduit ci-dessus.

Exercice 4

Considérons la forme quadratique

$$q : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$$
$$(X_0, X_1, X_2, X_3) \mapsto X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 - 4X_3^2.$$

Notons b la forme bilinéaire symétrique associée à q. Soit Γ la quadrique définie par la forme quadratique q dans l'espace projectif $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$.

(a) Déterminer la matrice de b dans la base canonique de $\mathbb{C}^4$.
(b) Montrer que la quadrique Γ est lisse.
(c) Considérons le sous-espace $\mathbf{D} = \{(X_0 : X_1 : X_2 : X_3) \in \mathbb{P}_3(\mathbb{C}) \mid X_2 = X_3 = 0\}$. Déterminer la dimension du sous-espace dual $\mathbf{D}^* \subset \mathbb{P}((\mathbb{C}^4)^*)$ de $\mathbf{D}$, où $(\mathbb{C}^4)^*$ est l'espace dual de $\mathbb{C}^4$.
(d) Déterminer les plans tangents à la quadrique Γ tels que ces plans contiennent $\mathbf{D}$.
(e) Considérons le plan $\mathbf{H}_3 \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ défini par l'équation $X_3 = 0$. Montrer que l'intersection $\Gamma \cap \mathbf{H}_3$ est une conique dans $\mathbf{H}_3$.
(f) La conique $C = \Gamma \cap \mathbf{H}_3$ dans $\mathbf{H}_3$ est-elle lisse ?
(g) Considérons la carte affine $\mathcal{H}_3 = \mathbb{P}_3(\mathbb{C}) \setminus \mathbf{H}_3$, et posons $\mathcal{Z} = \Gamma \cap \mathcal{H}_3$. Dans $\mathcal{H}_3$, on utilisera les coordonnées affines

$$x = \frac{X_0}{X_3}, \quad y = \frac{X_1}{X_3}, \quad z = \frac{X_2}{X_3}.$$

Dans ces coordonnées, donner une équation de la quadrique affine $\mathcal{Z}$.
(h) Considérons une droite affine $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}_3$ qui a exactement un point en commun avec $\mathcal{Z}$. Peut-on affirmer que $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{Z}$?

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension 3.

(a) Soient A_1, A_2 et A_3 trois points non alignés du plan projectif $\mathbb{P}(E)$. Soient $\mathbf{D} \subset \mathbb{P}(E)$ et $\mathbf{D}' \subset \mathbb{P}(E)$ deux droites distinctes ne passant par aucun des points A_1, A_2 et A_3. On note M_1 (respectivement, M_2, M_3) le point d'intersection de la droite $\mathbf{D}$ avec la droite (A_2A_3) (respectivement, la droite (A_1A_3), la droite (A_1A_2)). De façon similaire, on note M_1' (respectivement, M_2', M_3') le point d'intersection de la droite $\mathbf{D}'$ avec la droite (A_2A_3) (respectivement, la droite (A_1A_3), la droite (A_1A_2)). Justifier le fait que les birapports $[A_2, A_3, M_1, M_1']$, $[A_3, A_1, M_2, M_2']$ et $[A_1, A_2, M_3, M_3']$ sont définis. Montrer que

$$[A_2, A_3, M_1, M_1'] \times [A_3, A_1, M_2, M_2'] \times [A_1, A_2, M_3, M_3'] = 1.$$

(b) Soient $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$ et $\mathbf{D}_3$ trois droites non concourantes du plan projectif $\mathbb{P}(E)$. Soient A et A' deux points distincts appartenant à $\mathbb{P}(E) \setminus (\mathbf{D}_1 \cup \mathbf{D}_2 \cup \mathbf{D}_3)$. On note B_1 (respectivement, B_2, B_3) le point d'intersection des droites $\mathbf{D}_2$ et $\mathbf{D}_3$ (respectivement, des droites $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_3$, des droites $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$). Justifier le fait que les birapports $[\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3, (B_1A), (B_1A')]$, $[\mathbf{D}_3, \mathbf{D}_1, (B_2A), (B_2A')]$ et $[\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, (B_3A), (B_3A')]$ sont définis. Montrer que

$$[\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3, (B_1A), (B_1A')] \times [\mathbf{D}_3, \mathbf{D}_1, (B_2A), (B_2A')] \times [\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, (B_3A), (B_3A')] = 1.$$