Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques*, M1
Année 2022 - 2023
Cours MU4MA001

GÉOMÉTRIE AFFINE ET PROJECTIVE

Examen

Mardi 3 janvier 2023

Durée 3 heures

Téléphones portables sont interdits.
L'usage du polycopié du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.

Dans tous les exercices, les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine réel de direction E. On suppose que $\mathcal{E}$ soit muni d'un repère affine $\mathcal{R} = \{O, P, Q\}$. Les points de $\mathcal{E}$ sont décrits par leurs coordonnées cartésiennes (x, y) dans le repère affine $\mathcal{R}$ (c'est-à-dire, relativement à l'origine O de $\mathcal{E}$ et à la base $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$ de E). On note A_1, A_2, A_3 et A_4 les points de $\mathcal{E}$ qui ont, dans le repère affine $\mathcal{R}$, les coordonnées cartésiennes $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ et $(0, 1)$, respectivement.

(a) Montrer que les droites affines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{E}$, définies dans le repère affine $\mathcal{R}$ par les équations $y = x$ et $y = x + 3$, respectivement, sont parallèles.

(b) Montrer que les droites affines $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{E}$, définies dans le repère affine $\mathcal{R}$ par les équations $y = -x/2 + 3$ et $y = -x/2 + 6$, respectivement, sont parallèles.

(c) Montrer que les droites affines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{L}$ (respectivement, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{L}'$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{L}'$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{L}$) ne sont pas parallèles. On note B_1 (respectivement, B_2, B_3, B_4) le point d'intersection des droites affines $\mathcal{D}$ et $\mathcal{L}$ (respectivement, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{L}'$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{L}'$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{L}$).

(d) Trouver une application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $\varphi(A_i) = B_i$ pour tout $i = 1, \ldots, 4$.

(e) Considérons des points C_1, C_2, C_3 et C_4 de $\mathcal{E}$ tels qu'aucuns trois de ces points ne soient alignés. Peut-on affirmer qu'il existe une application affine $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $\psi(A_i) = C_i$ pour tout $i = 1, \ldots, 4$?

(f) On pose $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. Trouver toutes les applications affines $\theta : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telles que $\theta(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

Exercice 2

Soit $\mathbf{D} = \mathbb{P}(E)$ une droite projective définie sur $\mathbb{R}$ (ici E est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$). Soient A, B, C et D des points deux à deux distincts de $\mathbf{D}$.

(a) Quelles sont les valeurs possibles du birapport $[A, B, C, D]$?

(b) Supposons maintenant que $[A, B, C, D] = [A, B, D, C]$. Trouver la valeur de $[A, B, C, D]$.

Exercice 3

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, et soit E un espace vectoriel de dimension ≥ 3 sur $\mathbb{K}$. Soient f et g deux formes linéaires sur E. Considérons l'application $q : E \to \mathbb{K}$ telle que $q(x) = f(x)g(x)$ pour tout $x \in E$.

(a) Justifier le fait que q est une forme quadratique.
(b) Montrer que la forme quadratique q est dégénérée (c'est-à-dire, q n'est pas non dégénérée).
(c) Supposons que les formes linéaires f et g soient toutes les deux non nulles et que f ne soit pas proportionnelle à g (c'est-à-dire, il n'existe pas de scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda g$). Notons Γ la quadrique définie par la forme quadratique q dans $\mathbb{P}(E)$. Peut-on affirmer que la quadrique Γ n'est pas lisse ?
(d) On note F et G les hyperplans de E définis par f et g, respectivement, et on note $\mathbb{P}(F)$ et $\mathbb{P}(G)$ les hyperplans correspondants de $\mathbb{P}(E)$. Décrire les points singuliers de Γ.
(e) Montrer qu'il existe un point lisse P de Γ tel que $P \notin \mathbb{P}(G)$. Décrire l'hyperplan tangent à Γ en P.

Exercice 4

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien, et soit E la direction de $\mathcal{E}$.

(a) Considérons des rotations $\varphi_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ et $\varphi_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, et notons $\overrightarrow{\varphi_1}$ et $\overrightarrow{\varphi_2}$ leurs applications linéaires associées respectives. Peut-on affirmer que $\overrightarrow{\varphi_2} \circ \overrightarrow{\varphi_1}$ est une rotation vectorielle ? Peut-on affirmer que $\varphi_2 \circ \varphi_1$ est une rotation ?
(b) Considérons des réflexions $\psi_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ et $\psi_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, et notons $\overrightarrow{\psi_1}$ et $\overrightarrow{\psi_2}$ leurs applications linéaires associées respectives. Peut-on affirmer que $\overrightarrow{\psi_2} \circ \overrightarrow{\psi_1}$ est une rotation vectorielle ? Peut-on affirmer que $\psi_2 \circ \psi_1$ est une rotation ?

Exercice 5

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien, et soit $\mathcal{P}$ une parabole dans $\mathcal{E}$.

(a) Considérons quatre points deux à deux distincts K, K', N et N' de la parabole $\mathcal{P}$ tels que les droites (KN) et $(K'N')$ soient parallèles. Notons M (respectivement, M') le milieu du segment $[KN]$ (respectivement, $[K'N']$). Justifier le fait que les points M et M' sont distincts. Montrer que la droite (MM') est parallèle à l'axe de la parabole $\mathcal{P}$ (c'est-à-dire, à la droite affine de $\mathcal{E}$ telle que la réflexion par rapport à cette droite envoie l'ensemble des points de la parabole $\mathcal{P}$ sur lui-même).
(b) Montrer que, dans le projectivisé du plan affine $\mathcal{E}$, la droite (MM') est la droite polaire du point à l'infini des droites (KN) et $(K'N')$.

Une partie non vide $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ étant donnée, une *construction à la règle et au compas* à partir de $\mathcal{C}$ est une suite finie d'opérations, où, à chaque étape, on a un ensemble de points de $\mathcal{E}$ dits *construits* (au début, l'ensemble des points construits est $\mathcal{C}$) et on peut

- soit, en utilisant la règle, tracer une droite par deux points construits distincts ;
- soit, en utilisant le compas, tracer un cercle dont le centre est un point construit et le rayon est égal à la distance entre ce point et un autre point construit ;
- soit élargir l'ensemble des points construits en y ajoutant un point d'intersection de deux droites tracées non parallèles ou un point d'intersection de deux cercles tracés distincts ou un point d'intersection d'une droite tracée et d'un cercle tracé.

Les points construits, ainsi que les droites et les cercles tracés, sont considérés comme résultats d'une telle construction.

(c) Etant donnés deux points distincts T_1 et T_2 de $\mathcal{E}$, trouver une construction à la règle et au compas du milieu du segment $[T_1T_2]$.
(d) Etant donnés une droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$ et un point $T \in \mathcal{E}$, trouver une construction à la règle et au compas pour tracer la droite $\mathcal{L}$ de $\mathcal{E}$ telle que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{L}$ soient orthogonales et $T \in \mathcal{L}$.
(e) Etant donné l'ensemble des points de la parabole $\mathcal{P}$, trouver une construction à la règle et au compas pour tracer l'axe de la parabole $\mathcal{P}$.