Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2019 - 2020

**Topologie algébrique des variétés I**

**Examen**

Lundi 16 décembre 2019

Durée : 3 heures

*L'usage des notes du cours est autorisé.*

**Exercice 1** Soit $M$ une variété topologique compacte (sans bord) de dimension $n$, où $n \geq 1$ est un entier. On suppose que $M$ admet une structure de CW-complexe fini. Pour chacun des énoncés suivants, déterminer s'il est vrai ou faux (les réponses doivent être justifiées).

(a) Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, les groupes $H_k(M;\mathbb{Z})$ et $H_{n-k}(M;\mathbb{Z})$ sont isomorphes.

(b) Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, les groupes $H_k(M;\mathbb{Z})$ et $H^{n-k}(M;\mathbb{Z})$ sont isomorphes.

(c) Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, les groupes $H_k(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $H_{n-k}(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sont isomorphes.

**Exercice 2** Soit $\mathcal{C} : \ldots \to C_{k+1} \to C_k \to \ldots$ un complexe de chaînes dont les éléments sont des espaces vectoriels de dimensions finies sur un corps $K$. On suppose que le complexe $\mathcal{C}$ est borné : pour tout entier $m < 0$, l'espace $C_m$ est nul, et il existe un entier $M \geq 0$ tel que $C_n$ soit nul pour tout entier $n \geq M$. Montrer que, pour tout entier $N \geq 0$, on a l'inégalité suivante :

$$\sum_{i \leq N} (-1)^{N-i} \dim_K C_i \geq \sum_{i \leq N} (-1)^{N-i} \dim_K H_i(\mathcal{C}).$$

**Exercice 3** Soit $g \geq 0$ un entier. Calculer l'anneau de cohomologie $H^*(S_g;\mathbb{Z})$, où $S_g$ est une surface topologique (sans bord) connexe compacte orientable de genre $g$.

**Exercice 4** (a) Montrer que la variété topologique $S^2 \times S^2$ est orientable.

(b) On muni $S^2 \times S^2$ d'une orientation. Montrer que le groupe $H_2(S^2 \times S^2;\mathbb{Z})$ est sans torsion et décrire la forme d'intersection

$$H_2(S^2 \times S^2;\mathbb{Z}) \times H_2(S^2 \times S^2;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}.$$

(c) Calculer la signature de $S^2 \times S^2$.

**Exercice 5** Soit $n \geq 1$ un entier, et soit $A \subset \mathbb{S}^n$ un sous-ensemble fermé non vide et différent de $\mathbb{S}^n$ tel que $\check{H}^i(A;\mathbb{Z})$ coïncide avec $H^i(A;\mathbb{Z})$ pour tout entier $i$. Montrer que, pour tout entier $k$, on a

$$\widetilde{H}_k(\mathbb{S}^n \setminus A;\mathbb{Z}) \simeq \widetilde{H}^{n-k-1}(A;\mathbb{Z}).$$

TSVP

**Exercice 6** Dans cet exercice, on peut utiliser les énoncés suivants concernant Tor et Ext (il n'est pas nécessaire de justifier ces énoncés) :

— si $A$, $B$ et $C$ sont des groupes abéliens, on a $\mathrm{Tor}(A \oplus B, C) \simeq \mathrm{Tor}(A, C) \oplus \mathrm{Tor}(B, C)$ et $\mathrm{Ext}(A \oplus B, C) \simeq \mathrm{Ext}(A, C) \oplus \mathrm{Ext}(B, C)$ ;

— pour tous entiers $m, k \geq 2$, on a $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, où $d = pgcd(m, k)$ ;

— pour tout entier $k \geq 2$, on a $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

Soit $n \geq 1$ un entier, et soit $M$ une variété topologique connexe compacte (sans bord) de dimension $n$. Supposons que $M$ admet une structure de CW-complexe fini.

(a) Montrer l'affirmation suivante : si la variété $M$ est orientable, alors le groupe $H_{n-1}(M; \mathbb{Z})$ est sans torsion.

(b) Montrer l'affirmation suivante : si la variété $M$ est non orientable, alors le sous-groupe de torsion de $H_{n-1}(M; \mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) Montrer l'affirmation suivante : si la variété $M$ est non orientable, alors il n'existe pas de plongement continu $f : M \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\breve{H}^n(f(M); \mathbb{Z})$ coïncide avec $H^n(f(M); \mathbb{Z})$.

(d) Supposons que la variété $M$ est orientable, $n = 4$ et $H_1(M; \mathbb{Z}) = 0$. Montrer que tous les groupes d'homologie $H_i(M; \mathbb{Z})$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, sont sans torsion.

(e) Donner un exemple d'une variété topologique $N$ (sans bord) connexe compacte orientable de dimension 4 telle que le groupe $H_2(N; \mathbb{Z})$ ait au moins un élément de torsion non trivial.