Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques*, M1
Année 2018 - 2019
Cours 4M059

TOPOLOGIE ALGEBRIQUE

Examen

Jeudi 28 février 2019

Durée 3 heures

Téléphones portables et calculatrices sont interdits.
L'usage du polycopié du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.

Dans tous les exercices, les réponses doivent être justifiées.

Pour tout entier $n \geq 1$, on munit l'espace $\mathbb{R}^n$ de la topologie euclidienne, et on pose

$$\mathbb{D}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\},$$
$$\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}.$$

Exercice 1

(a) Soit L la droite dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y = 0\}.$$

Montrer que $\mathbb{R}^3 \setminus L$ a le même type d'homotopie que le cercle $\mathbb{S}^1$.

(b) Soit n un nombre entier strictement positif. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}^n$ a le même type d'homotopie que la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$.

(c) Soit X un espace topologique, et soient A et B deux sous-espaces de X, non vides et distincts de X. Montrer que l'on peut avoir A et B homotopiquement équivalents, sans que $X \setminus A$ et $X \setminus B$ soient homotopiquement équivalents.

Exercice 2

Dans cet exercice, on note M le *ruban de Möbius*, c'est-à-dire, l'espace topologique M obtenu comme quotient de $[0;1] \times [0;1]$ par la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par $(x, 0) \sim (1 - x, 1)$ pour tout $x \in [0;1]$. On note C le *cercle central* de M, c'est-à-dire, l'image par l'application quotient $\mathrm{pr} : [0;1] \times [0;1] \to M$ du segment $\{1/2\} \times [0;1]$, et on note ∂M le *bord* de M, c'est-à-dire, l'image par l'application quotient pr de $(\{0\} \times [0;1]) \cup (\{1\} \times [0;1])$.

(a) Montrer que le ruban de Möbius M a le même type d'homotopie que le cercle $\mathbb{S}^1$.

(b) Montrer que le cercle central C de M est un rétracte par déformation de M.

(c) Montrer que le bord ∂M de M n'est pas un rétracte de M.

(d) Les revêtements $p : E \to M$ de M tels que E soit connexe par arcs sont-ils tous galoisiens ?

(e) Décrire, à isomorphisme modéré près, tous les revêtements $p : E \to M$ de M tels que E soit connexe par arcs.

TSVP

Exercice 3

Soit X un espace topologique non vide et connexe par arcs. La *suspension* $S(X)$ de X est l'espace quotient du produit $X \times [0;1]$ par la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par $(x,0) \sim (y,0)$ et $(x,1) \sim (y,1)$ pour tous $x, y \in X$. Montrer que la suspension $S(X)$ de X est simplement connexe.

Exercice 4

Construire un espace topologique non vide et connexe par arcs dont le groupe fondamental soit isomorphe au produit libre $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ des groupes $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 5

Dans cet exercice, on pourra utiliser les faits suivants de la théorie des groupes. Soit G un groupe, et soit $[G,G] \subset G$ le sous-groupe engendré par les commutateurs d'éléments de G. Alors, le sous-groupe $[G,G]$ est distingué, et le quotient $G/[G,G]$ est abélien. De plus, tout morphisme de G dans un groupe abélien se factorise à travers $G/[G,G]$.

Soit B un espace topologique non vide, connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Soit $b_0 \in B$ un point. Un revêtement $p : E \to B$ est dit *abélien* si

- p est galoisien,
- le groupe de Galois $\mathrm{Aut}(p)$ de p est abélien.

(a) Soit $p : E \to B$ un revêtement abélien, et soit $x_0 \in p^{-1}(b_0)$ un point. Le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, x_0)) \subset \pi_1(B, b_0)$ est-il forcement distingué ? Le groupe $p_*(\pi_1(E, x_0))$ est-il forcement abélien ?

(b) Un revêtement universel de B est-il forcement abélien ?

(c) Montrer qu'il existe un revêtement abélien $u : E_u \to B$ de B tel que le groupe de Galois de u soit $\pi_1(B, b_0)/[\pi_1(B, b_0), \pi_1(B, b_0)]$.

(d) Soit $y_0 \in u^{-1}(b_0)$ un point. Montrer que, pour tout revêtement abélien $p : E \to B$ et tout point $x_0 \in p^{-1}(b_0)$, il existe un unique morphisme modéré $\xi : E_u \to E$ entre les revêtements u et p tel que $\xi(y_0) = x_0$.

(e) Montrer que ξ est un revêtement. Le revêtement ξ est-il forcement abélien ?