Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2020 - 2021

Topologie algébrique des variétés I

Examen

Vendredi 8 janvier 2021

Durée : 3 heures

L'usage des notes du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.

Exercice 1 Soit M une variété topologique compacte (sans bord) de dimension n, où $n \geq 1$ est un entier. Pour chacun des énoncés suivants, déterminer s'il est vrai ou faux (les réponses doivent être justifiées).

(a) Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, les groupes $H_k(M;\mathbb{Z})$ et $H^k(M;\mathbb{Z})$ sont isomorphes.

(b) Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, les groupes $H_k(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $H^k(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sont isomorphes.

(c) Si $H_n(M;\mathbb{Z}) = 0$, alors M n'est pas orientable.

(d) Si M est connexe, alors $H_n(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 2 Soit M une variété topologique connexe (sans bord) de dimension n, où $n \geq 1$ est un entier.

(a) Montrer que le groupe $H_c^n(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ de cohomologie à support compact de M (à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(b) Supposons que M est orientable. Montrer que le groupe $H_c^n(M;\mathbb{Z})$ de cohomologie à support compact de M (à coefficients dans $\mathbb{Z}$) est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Exercice 3 (a) Soit $k \geq 1$ un entier, et soit M une variété topologique compacte (sans bord) de dimension $4k$. On suppose que M admet une structure de CW-complexe fini et que M est orientable et orientée. Montrer que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ et la signature $\sigma(M)$ de M sont de même parité.

(b) Soit N une variété topologique compacte (sans bord). On suppose qu'il existe une variété topologique compacte X à bord vérifiant les propriétés suivantes :
— le bord ∂X de X soit homéomorphe à N ;
— X admette une structure de CW-complexe fini pour laquelle le bord ∂X de X devient un sous-complexe.
Montrer que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(N)$ de N est paire.

Exercice 4 Dans cet exercice, on peut utiliser l'énoncé suivant concernant Tor (il n'est pas nécessaire de justifier cet énoncé) :
— pour tout groupe abélien H, le groupe $\mathrm{Tor}(H, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est isomorphe à la torsion de H.

Soit $n \geq 1$ un entier, et soit M une variété topologique (à bord) de dimension n. On note ∂M le bord de M (on suppose que ∂M n'est pas vide). Supposons que M est connexe, compacte, orientable et orientée. On note $[M] \in H_n(M, \partial M;\mathbb{Z})$ la classe fondamentale de M. Soit A une composante connexe de ∂M. On pose $B = \partial M \setminus A$.

(a) Justifier le fait que le groupe $H_{n-1}(\partial M, B;\mathbb{Z})$ est naturellement identifié avec $H_{n-1}(A;\mathbb{Z})$.

(b) Soit G un groupe abélien. Montrer que $H_n(M, B; G) = 0$.

TSVP

(c) Montrer qu'il existe une suite exacte courte (scindée)

$$0 \to H_n(M, B; \mathbb{Z}) \otimes (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H_n(M, B; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(M, B; \mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0.$$

(d) En déduire que le groupe $H_{n-1}(M, B; \mathbb{Z})$ est sans torsion.

(e) Montrer que le groupe $H_{n-1}(A; \mathbb{Z})$ n'est pas trivial.

(f) En déduire que la variété topologique A est orientable, $H_{n-1}(A; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ et $d([M])$ est un générateur de $H_{n-1}(A; \mathbb{Z})$, où $d : H_n(M, \partial M; \mathbb{Z}) \to H_{n-1}(\partial M, B; \mathbb{Z}) \simeq H_{n-1}(A; \mathbb{Z})$ est un morphisme de la suite exacte longue du triplet $(M, \partial M, B)$.

Exercice 5 Montrer qu'il n'existe pas de variété topologique M (sans bord) de dimension 5 telle que

$$H_0(M; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}, \quad H_2(M; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad H_5(M; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z},$$

et $H_i(M; \mathbb{Z}) = 0$ pour tout entier strictement positif i différent de 2 et 5. (*Indication* : on peut utiliser la suite exacte courte $0 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to 0$.)