Université Pierre et Marie Curie
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Education et Formation*, Section CAPES, M1
Année 2011 - 2012

ANNEAUX ET CORPS

Exercices

Exercice 2.1. Soient A et B deux anneaux, et soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Notons A^* et B^* les groupes des éléments inversibles de A et B, respectivement. Montrer que la restriction f^* de f sur A^* est un morphisme $f^* : A^* \to B^*$ de groupes A^* et B^*.

Exercice 2.2. Soient A et B deux anneaux, et soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.

(a) Montrer que $f(A)$ est un sous-anneau de B.
(b) Montrer que le noyau de f est un idéal de A.
(c) Choisissons un élément a de A. Montrer que l'ensemble

$$\{x \in A \mid \text{il existe un élément } y \text{ de } A \text{ tel que } x = ay\}$$

est un idéal de A.

Exercice 2.3. Soit A un anneau, et soit I un idéal de A. Montrer les énoncés suivants :

(a) il existe une unique structure d'anneau sur l'ensemble quotient A/I telle que la projection canonique $\pi : A \to A/I$ soit un morphisme d'anneaux ;
(b) pour tout morphisme d'anneaux $f : A \to B$ tel que $I \subset \ker(f)$, il existe un unique morphisme d'anneaux $\widetilde{f} : A/I \to B$ tel que $f = \widetilde{f} \circ \pi$; le noyau de $\widetilde{f}$ est l'image de $\ker(f)$ dans A/I.

Exercice 2.4. Soit n un nombre entier strictement positif.

(a) Montrer que $n\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.
(b) Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si n est un nombre premier.

Exercice 2.5. Considérons l'ensemble

$$A = \{z = a + ib \in \mathbb{C} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

muni de l'addition et la multiplication habituelles. Montrer que A est un anneau. Est-il intègre ? Est-ce un corps ? Déterminer les éléments inversibles de A.

Exercice 2.6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un automorphisme du corps des nombres réels.

(1) Montrer que f est une application croissante.
(2) Montrer que f est l'identité.

Soit K le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant $\sqrt{2}$.

(3) Décrire K explicitement.
(4) Montrer qu'il existe un isomorphisme d'anneaux
$$i : \mathbb{Q}[X]/(X^2 - 2) \to K.$$
(5) Faire la liste des automorphismes $g : K \to K$.