Université Pierre et Marie Curie
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2014 - 2015

Introduction à la topologie des variétés algébriques réelles

Exercices, feuille 1

Exercice 1 Classifier (à homéomorphisme près) les paires topologiques $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}A)$, où A est une courbe non singulière de degré 5 dans $\mathbb{R}P^2$.

Exercice 2 Constructions de courbes algébriques réelles maximales
Rappelons qu'une courbe non singulière A de degré d dans $\mathbb{R}P^2$ est dite *maximale* si le nombre de composantes connexes de la partie réelle $\mathbb{R}A$ de A est égal à $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$.

(a) Construction de Harnack.
Soit L une droite dans $\mathbb{R}P^2$. Montrer par récurrence qu'il existe une courbe maximale de degré d dans $\mathbb{R}P^2$ dont une composante connexe de la partie réelle coupe L en d points réels distincts.

(b) Construction de Hilbert.
Soit C une conique non singulière dans $\mathbb{R}P^2$ telle que la partie réelle $\mathbb{R}C$ de C soit non vide. Montrer par récurrence qu'il existe une courbe maximale de degré d dans $\mathbb{R}P^2$ dont une composante connexe de la partie réelle coupe $\mathbb{R}C$ en $2d$ points distincts.

(c) Soit c un entier compris entre $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ et 0 (si d est pair) ou 1 (si d est impair). En utilisant une variation d'une des deux constructions ci-dessus, montrer qu'il existe une courbe non singulière de degré d dans $\mathbb{R}P^2$ avec c composantes connexes de la partie réelle.

Exercice 3 Soit A une courbe non singulière de degré d dans $\mathbb{R}P^2$. On dit qu'une collection d'ovales de $\mathbb{R}A$ forme un *nid* si, pour deux ovales quelconques de cette collection, un de ces ovales entoure l'autre ovale. La *profondeur* d'un nid est le nombre d'ovales dans ce nid. Montrer les affirmations suivantes :

(a) la profondeur de tout nid de $\mathbb{R}A$ est inférieure ou égale à $[d/2]$;

(b) la somme des profondeurs de deux nids disjoints quelconques de $\mathbb{R}A$ est inférieure ou égale à $[d/2]$;

(c) la somme des profondeurs de cinq nids disjoints quelconques de $\mathbb{R}A$ est inférieure ou égale à d, à condition qu'aucun ovale de ces cinq nids n'entoure tous les autres ovales des nids.

Exercice 4 Topologie des surfaces

(a) Quel est le quotient de $S^1 \times S^1$ par l'involution $(\theta_1, \theta_2) \mapsto (\theta_2, \theta_1)$?

(b) Caractéristique d'Euler de la sphère S^2.
Étant donné un graphe connexe Γ plongé dans S^2, on note s (respectivement, a) le nombre de sommets (respectivement, le nombre d'arêtes) de Γ, et on note f le nombre de composantes connexes de $S^2 \setminus \Gamma$. Montrer que, quel que soit le graphe connexe plongé $\Gamma \subset S^2$, on a

$$f - a + s = 2.$$

Indication : on pourra commencer par traiter le cas d'un arbre, puis traiter le cas général par récurrence sur le nombre de composantes connexes de $S^2 \setminus \Gamma$.

(c) Soit S une surface connexe compacte sans bord, et soit $\Gamma \subset S$ un graphe connexe plongé tel que toute composante connexe de $S \setminus \Gamma$ soit homéomorphe à un disque. Comme précédemment, on note s (respectivement, a) le nombre de sommets (respectivement, le nombre d'arêtes) de

Γ, et on note f le nombre de composantes connexes de $S \setminus \Gamma$. Montrer que le nombre $f - a + s$ ne dépend que de la surface S (et pas de Γ).

Ce nombre s'appelle la *caractéristique d'Euler* de la surface S, et est un invariant topologique de S.

Indication : il suffit de montrer que ce nombre est le même pour un graphe Γ et un graphe Γ' tel que la subdivision de S définie par Γ' soit un raffinement de la subdivision définie par Γ.

(d) Soit $n \geq 1$ un nombre entier. Calculer la caractéristique d'Euler de la somme connexe

$$\#_{i=1}^{n}(S^1 \times S^1)$$

de n copies du tore de dimension 2.

(e) Soit $n \geq 1$ un nombre entier. Calculer la caractéristique d'Euler de la somme connexe $\#_{i=1}^{n}\mathbb{R}P^2$.

Exercice 5 On dit que d droites dans $\mathbb{C}P^2$ sont *en position générale* si trois quelconques de ces droites ne soient pas concourantes. On appelle *L-courbe* une courbe algébrique non singulière dans $\mathbb{R}P^2$ obtenue par une petite perturbation d'une réunion de droites en position générale.

(a) En considérant une petite perturbation d'une réunion de d droites en position générale dans $\mathbb{C}P^2$, calculer le genre d'une courbe non singulière de degré d dans $\mathbb{C}P^2$.

(b) Pour tout entier $1 \leq d \leq 4$, construire une L-courbe maximale de degré d dans $\mathbb{R}P^2$.

(c) Montrer qu'une L-courbe de degré $d \geq 5$ dans $\mathbb{R}P^2$ ne peut pas être maximale.

Exercice 6 Espace des courbes

Soit C_d l'espace des courbes de degré d dans $\mathbb{C}P^2$, et soit $\Delta_d \subset C_d$ le sous-ensemble constitué des points qui correspondent aux courbes singulières. Rappelons que C_d peut être identifié avec un certain espace projectif $\mathbb{C}P^N$. Le but de cet exercice est de montrer que Δ_d est une hypersurface algébrique de C_d, et de caractériser les points non singuliers de Δ_d. Pour cela nous utiliserons l'ensemble intermédiaire

$$\tilde{\Delta}_d = \{(A, p) \in C_d \times \mathbb{C}P^2 \mid p \text{ est un point singulier de } A\} \subset C_d \times \mathbb{C}P^2.$$

On a clairement $\Delta_d = \pi(\tilde{\Delta}_d)$, où $\pi_{C_d} : \tilde{\Delta}_d \to C_d$ est la projection naturelle.

(a) Quelle est la dimension de l'espace C_d ?

(b) Montrer que $\tilde{\Delta}_d$ est une sous-variété algébrique de $C_d \times \mathbb{C}P^2$.

(c) Montrer que la sous-variété $\tilde{\Delta}_d$ est non singulière, et que π est un biholomorphisme local sur son image en (C, p) si et seulement si p est un point double non dégénéré de C.

Indication : on pourra se ramener au cas où $p = [0 : 0 : 1]$, et faire un calcul explicite.

(d) En déduire qu'une courbe C correspond à un point non singulier de Δ_d si et seulement si C admet un unique point singulier et ce dernier est un point double non dégénéré. Déterminer dans ce cas l'espace tangent à Δ_d en C.

(e) Faire l'étude analogue de l'espace $\mathbb{R}C_d$ des courbes de degré d dans $\mathbb{R}P^2$.