Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2018 - 2019

Introduction à la géométrie algébrique

Exercices, feuille 1

Exercice 1 Soit $C \subset \mathbb{A}^2$ la courbe définie par le polynôme $f(x, y) = (x-1)^3 - y^2$.

(a) La courbe C est-elle non singulière ? Est-elle irréductible ? Est-elle rationnelle ?

(b) Montrer que $(2, 1) \in \mathbb{A}^2$ est un point non singulier de C et donner une équation de la droite tangente à C en $(2, 1)$.

(c) Montrer que tout élément de l'anneau $A(C)$ admet un unique représentant de la forme

$$p(x) + q(x)y,$$

où p, $q \in \mathbf{k}[X]$ sont des polynômes.

Exercice 2 Est-il vrai que le carré symétrique du cercle S^1 est homéomorphe au plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$?

Exercice 3 Trouver un polynôme irréductible $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ tel que le lieu des zéros $Z(f) \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ de f dans $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ soit réductible.

Exercice 4 Un cas particulier du théorème de Bézout. Soit $C \subset \mathbb{P}^2$ une droite ou une conique non singulière, et soit $D \subset \mathbb{P}^2$ une courbe algébrique telle que $C \not\subset D$. Montrer que la somme des multiplicités d'intersection de C et D en leurs points d'intersection est égal au produit des degrés de C et D.

Exercice 5 Soit d un nombre entier strictement positif, et soit $C \subset \mathbb{P}^2$ une courbe irréductible de degré d.

(a) Supposons que C a deux points singuliers d'ordres m_1 et m_2, respectivement. Montrer que $m_1 + m_2 \leq d$.

(b) Montrer que, par cinq points quelconques de $\mathbb{P}^2$, on peut toujours tracer une conique.

(c) Supposons que C a cinq points singuliers d'ordres $m_1, \ldots, m_5$, respectivement. Montrer que

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 \leq 2d.$$

(d) Montrer que toute courbe irréductible de degré 4 dans $\mathbb{P}^2$ a au plus trois points singuliers.

Exercice 6 (a) Soient $X \subset \mathbb{A}^3$ et $Y \subset \mathbb{A}^3$ deux variétés affines. Est-il vrai que $X \cap Y$ est aussi une variété affine ?

(b) Est-il vrai que, sous l'identification $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$, la topologie de Zariski de $\mathbb{A}^2$ coïncide avec la topologie produit (chacun des facteurs $\mathbb{A}^1$ étant muni de la topologie de Zariski) ?

Exercice 7 (a) Montrer que tout sous-ensemble algébrique de $\mathbb{A}^2$ est soit $\varnothing$, soit $\mathbb{A}^2$, soit une collection finie de points, soit une réunion d'une courbe algébrique (c'est-à-dire, d'un sous-ensemble algébrique défini dans $\mathbb{A}^2$ par un polynôme appartenant à $\mathbb{K}[X, Y]$ et ayant le degré supérieur ou égal à 1) et d'une collection finie de points.

(b) Soit $Y \subset \mathbb{A}^2$ une variété algébrique telle que Y ait au moins deux points et Y soit différent de $\mathbb{A}^2$. Montrer que Y est une courbe algébrique irréductible.

Exercice 8 (a) Soit X un espace topologique irréductible. Montrer que tout sous-ensemble ouvert non vide $Y \subset X$ est irréductible et dense dans X.

(b) Soit Z un espace topologique non vide, et soit $V \subset Z$ un sous-espace topologique irréductible. Montrer que l'adhérence $\overline{V}$ de V dans Z est aussi irréductible.

Exercice 9 Considérons l'application $\psi : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$ définie par $(x, y, z) \mapsto (xyz, xy, x)$.

(a) Décrire l'ensemble $\psi(\mathbb{A}^3)$.

(b) L'ensemble $\psi(\mathbb{A}^3)$ est-il ouvert dans $\mathbb{A}^3$ (pour la topologie de Zariski) ?

(c) L'ensemble $\psi(\mathbb{A}^3)$ est-il dense dans $\mathbb{A}^3$?

(d) L'ensemble $\psi(\mathbb{A}^3)$ est-il fermé dans $\mathbb{A}^3$?

Exercice 10 Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que $\mathbb{A}^n$ (muni de la topologie de Zariski) est un espace topologique irréductible.

Exercice 11 Considérons l'application $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}^3$ définie par $\varphi(t) = (t, t^2, t^3)$. Montrer que $C = \varphi(\mathbb{A}) \subset \mathbb{A}^3$ est un ensemble algébrique. Quel est le nombre minimal d'éléments dans un système de générateurs de l'idéal $I(C) \subset \mathbb{K}[X_0, X_1, X_2]$?