Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2018 - 2019

Introduction à la géométrie algébrique

Exercices, feuille 4

Exercice 1 Soient $n, m \geq 1$ des entiers, et soient $X \subset \mathbb{P}^n$ et $Y \subset \mathbb{P}^m$ des variétés algébriques (respectivement, quasi-projectives). Montrer que $X \times Y \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ est une variété algébrique (respectivement, quasi-projective).

Exercice 2 Soient $n, m \geq 1$ des entiers, et soient $X \subset \mathbb{P}^n$ et $Y \subset \mathbb{P}^m$ des variétés quasi-projectives.

(a) Montrer que les projections $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ et $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ sont des applications régulières.

(b) Soit $\ell \geq 1$ un entier, et soit $Z \subset \mathbb{P}^\ell$ une variété quasi-projective. Montrer qu'une application $f : Z \to X \times Y$ est régulière si et seulement si ses composantes $\mathrm{pr}_X \circ f : Z \to X$ et $\mathrm{pr}_Y \circ f : Z \to Y$ sont des applications régulières.

Exercice 3 Soient $n, m \geq 1$ des entiers. Soit $X \subset \mathbb{P}^m$ une variété quasi-projective, et soit $u : X \to \mathbb{P}^n$ une application régulière. Montrer que le graphe $\Gamma_u \subset X \times \mathbb{P}^n$ est un sous-ensemble fermé.

Exercice 4 Soient $n, m \geq 1$ des entiers. Montrer que la variété quasi-projective $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ est isomorphe à $\mathbb{A}^{n+m}$.

Exercice 5 Soit $n, d \geq$ des entiers, et soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une hypersurface définie par un polynôme homogène F de degré d.

(a) Montrer que l'image $\nu_d^n(X)$ de X par l'application de Veronese $\nu_d^n : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ (où $N = \binom{n+d}{n} - 1$) est l'intersection d'un hyperplan de $\mathbb{P}^N$ avec $\nu_d^n(\mathbb{P}^n)$.

(b) En déduire que $\mathbb{P}^n \setminus X$ est affine.

Exercice 6 Soit $C \subset \mathbb{A}^2$ la courbe algébrique définie par le polynôme $y^2 - x^3$, et soit $\varphi : X \to \mathbb{A}^2$ l'éclatement de $\mathbb{A}^2$ en $(0,0)$ (ici $X \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$). On note E le diviseur exceptionnel de l'éclatement, et on note $\widetilde{C}$ l'adhérence (dans X) de $\varphi^{-1}(C \setminus \{0,0\})$.

(a) Trouver des équations polynomiales de $\widetilde{C} \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$.

(b) Montrer que E et $\widetilde{C}$ ont exactement un point en commun.

(c) Montrer que $\widetilde{C}$ est une variété quasi-projective isomorphe à $\mathbb{A}^1$.

(d) Montrer que φ induit un homéomorphisme entre $\widetilde{C}$ et C. Cet homéomorphisme est-il un isomorphisme (de variétés quasi-projectives) ?

Exercice 7 (a) Soit $n \geq 1$ un entier, et soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une variété algébrique. Supposons que X est aussi une variété affine. Montrer que la variété X est formée d'un seul point.

(b) Montrer que deux courbes algébriques quelconques dans $\mathbb{P}^2$ ont une intersection non vide.

(c) Montrer que $\mathbb{A}^2$ et $\mathbb{P}^2$, munis de leurs topologies de Zariski, ne sont pas homéomorphes.