Sorbonne Université
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Mathématiques fondamentales*, M2
Année 2018 - 2019

Introduction à la géométrie algébrique

Exercices, feuille 5

Exercice 1 Soit (X, Y) une paire topologique.

(a) Montrer que $\dim Y \leq \dim X$.

(b) Supposons que X est irréductible et de dimension finie, et supposons que $Y \subset X$ est sous-ensemble fermé différent de X. Montrer que $\dim Y < \dim X$.

(c) Supposons que X est réunion de sous-ensembles fermés $X_1, \ldots, X_N$. Montrer que $\dim X = \max_{i=1}^{N} \dim X_i$.

Exercice 2 Considérons l'application $\varphi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}^3$ définie par $\varphi(t) = (t^3, t^4, t^5)$.

(a) Montrer que $C = \varphi(\mathbb{A}) \subset \mathbb{A}^3$ est une variété algébrique.

(b) Montrer que la hauteur de l'idéal premier $I(C) \subset \mathbb{K}[X_1, X_2, X_3]$ est égal à 2.

(c) Montrer que l'idéal $I(C)$ ne peut pas être engendré par deux éléments.

Exercice 3 Soit $n \geq 1$ un entier, et soit $\mathfrak{A} \subset \mathbb{K}[X_0, \ldots, X_n]$ un idéal homogène. On pose $Y = \mathcal{Z}(\mathfrak{A})$.

(a) Supposons que $\mathfrak{A}$ peut être engendré par q éléments. Montrer que $\dim Y \geq n - q$.

(b) Montrer que toute intersection complète stricte est une intersection complète ensembliste.

(c) Soit $C \subset \mathbb{P}^3$ la cubique tordue. Montrer que C n'est pas une intersection complète stricte.

(d) Montrer que C est une intersection complète ensembliste. Plus précisement, trouver deux hypersurfaces Z_2 et Z_3 de degrés 2 et 3, respectivement, dans $\mathbb{P}^3$ telles que $C = Z_2 \cap Z_3$.

Exercice 4 Soit $n \geq 1$ un entier, et soit $p \in \mathbb{A}^n$ un point. Montrer que toute dérivation $D : \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n] \to \mathbb{K}$ de $\mathbb{A}^n$ en p est de la forme

$$f \mapsto a_1 \frac{\partial f}{\partial X_1}(p) + \ldots + a_n \frac{\partial f}{\partial X_n}(p),$$

où $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Exercice 5 Soit $n \geq 1$ un entier. Soit $Y \subset \mathbb{A}^n$ une variété algébrique, et soit $x \in Y$ un point. Notons $\mathfrak{M}_x \subset A(Y)$ l'idéal maximal formé par les fonctions régulières qui s'annulent en x, et notons $\mathfrak{M}_{x,Y}$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{x,Y}$. Montrer que les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathfrak{M}_x/\mathfrak{M}_x^2$ et $\mathfrak{M}_{x,Y}/\mathfrak{M}_{x,Y}^2$ sont isomorphes.

Exercice 6 Montrer que la courbe $\widetilde{C}$ de l'exercice 6 de la feuille 4 est non singulière.

Exercice 7 Soit $n \geq 1$ un entier, et soit $Y \subset \mathbb{P}^n$ une variété quasi-projective. Montrer que, pour tout point $x \in Y$, on a $\dim T_x Y \geq \dim Y$ (où $T_x Y$ est l'espace tangent de Zariski à Y en x), et qu'il y a égalité sur un ouvert dense de Y.