Université Pierre et Marie Curie
Master de Sciences et Technologies
Mention *Mathématiques et Applications*
Spécialité *Education et Formation*, Section CAPES, M1
Année 2011 - 2012

Algèbre et géométrie 1

Interrogation de contrôle continu

Mercredi 23 novembre 2011

Durée : une heure

Documents, téléphones portables, calculatrices et baladeurs sont interdits.
Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

1. Donner la définition d'un sous-groupe distingué et la définition d'un groupe monogène. Formuler le théorème de Lagrange (concernant l'indice d'un sous-groupe).

2. Considérons l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n \leq 20 \text{ et } \mathrm{PGCD}(n, 20) = 1\}.$$

(a) Trouver le nombre d'éléments de A.
(b) On munit l'ensemble A de l'opération $*$ qui associe à deux éléments quelconques a et b de A le reste de ab dans la division par 20. Montrer que $(A, *)$ est un groupe.
(c) Soit a un élément de A. Montrer que $a^8 - 1$ est divisible par 20.

3. Soit G un groupe, et soit H un sous-groupe d'indice 2 de G.
(a) Montrer que, pour tout élément g de G, on a $gH = Hg$.
(b) Déduire que le sous-groupe H est distingué.
(c) Considérons l'action de H sur G par les translations à gauche :

$$\begin{aligned} \rho : H &\to S_G, \\ h &\mapsto t_{h,\text{gauche}}. \end{aligned}$$

Quel est le nombre d'orbites de cette action ?

4. Trouver un groupe infini G tel que tout élément de G soit d'ordre au plus 2.