3.6. **Géométrie euclidienne.** Nous nous restreignons désormais au cas euclidien : $K = \mathbb{R}$, et b est un produit scalaire sur $E \simeq \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une forme bilinéaire b symétrique *définie positive* (autrement dit, de signature $(n, 0)$). Alors, E admet une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *orthonormée* (autrement dit, orthogonale et telle que, pour tout $i = 1, \ldots, n$, on ait $q(e_i) = b(e_i, e_i) = 1$), et on peut, sans restreindre la généralité, supposer que $q(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, ce qui identifie $O(E)$ à $O(n)$. On pose $||x||^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ pour tout $x \in E$. Les éléments de $SO(n) = \{u \in O(n) \mid det(u) = 1\} = O(n)^+$ s'appellent les *rotations* de E. Le complémentaire de $SO(n)$ dans $O(n)$ est noté $O(n)^-$. Pour n impair, il contient $-\mathbf{I}_n$, de sorte que $O(2m+1) \simeq SO(2m+1) \times \{\pm 1\}$; pour n pair, il contient des éléments d'ordre 2, mais aucun n'est central, donc on a seulement $O(2m) \simeq SO(2m) \rtimes \{\pm 1\}$.

Dans le cas $n = 2$, le groupe

$$SO(2) = \{R_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$$

est commutatif (et isomorphe à $U(1) = \{z \in \mathbb{C}^*, |z| = 1\}$). Tout élément de $O(2)^-$ est une symétrie orthogonale S_D par rapport à une droite vectorielle D de $\mathbb{R}^2$, et $O(2) = SO(2) \rtimes_\tau \{\pm 1\}$, où -1, représentable par une symétrie arbitraire $S_D = S_D^{-1}$, agit sur $SO(2)$ par

$$\tau(-1)(R_\theta) = R_{-\theta},$$

c'est-à-dire, $S_D R_\theta S_D^{-1} = R_{-\theta}$.

Soit W un sous-espace vectoriel de E, d'orthogonal $W^\perp$. La relation $E = W \oplus W^\perp$ permet de définir la *projection orthogonale* π_W sur W (c'est-à-dire, parallèlement à $W^\perp$) et de même, la *symétrie orthogonale* σ_W par rapport à W ; si W est un hyperplan H, cette symétrie s'appelle la *réflexion* τ_H par rapport à H. Toute symétrie orthogonale σ_W est une isométrie, et vérifie $\sigma_W^2 = id_E$.

Un *espace affine euclidien* $\mathcal{E}$ est un espace affine réel dont l'espace vectoriel directeur est un espace euclidien (E, b). Pour deux points P et Q de $\mathcal{E}$, on appelle *distance* de P à Q le nombre $d(P, Q) = (q(\overrightarrow{PQ}))^{\frac{1}{2}}$. Une *isométrie affine* de $\mathcal{E}$ est une application $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui conserve les distances. Ainsi, les translations $t_{\overrightarrow{v}}$, $\overrightarrow{v} \in E$ sont des isométries affines. Les isométries affines de $\mathcal{E}$ forment un sous-groupe, noté $OA(\mathcal{E})$, du groupe affine $GA(\mathcal{E})$ (exercice : déduire cette affirmation de la Proposition 27). De plus, $OA(\mathcal{E}) \simeq E \rtimes_\tau O(E)$, pour l'action naturelle τ de $O(E)$ sur E.

Parmi les isométries affines φ, on distingue en particulier :

- les *déplacements* (respectivement, *antidéplacements*), dont la partie linéaire $\overrightarrow{\varphi} \in O(n)^+$ est une rotation vectorielle (respectivement, $\overrightarrow{\varphi} \in O(n)^-$) ; le groupe $OA(n)^+ \simeq E \rtimes_\tau O(n)^+$ des déplacements contient les translations ;
- les *rotations*, qui sont les déplacements φ possédant au moins un point fixe. Si $n = 2$, $\varphi \neq id_{\mathcal{E}}$ est une rotation affine si et seulement si $\overrightarrow{\varphi}$ est une rotation vectorielle différente de l'identité : alors, $Ker(\overrightarrow{\varphi} - id_E) = 0$, et $\varphi \neq id_{\mathcal{E}}$ a un unique point fixe, appelé *centre* de la rotation ;
- les *symétries orthogonales* $\sigma_{\mathcal{W}}$ par rapport à un sous-espace affine $\mathcal{W}$ de $\mathcal{E}$: ici $\sigma_{\mathcal{W}}$ est la symétrie affine par rapport à $\mathcal{W}$ parallèlement à l'orthogonal $W^\perp$ de la direction W de $\mathcal{W}$. Quand $\mathcal{W} = \mathcal{H}$ est un hyperplan de $\mathcal{E}$, on parle de la *réflexion* $\tau_{\mathcal{H}}$ par rapport à $\mathcal{H}$; c'est un antidéplacement, d'ordre 2 dans le groupe $OA(n)$. Le composé de deux réflexions par rapports à des hyperplans parallèles de direction H est une translation par un vecteur $\overrightarrow{v} \in H^\perp$.